4. Elementare Kombinatorik

Rechenregeln für endliche Mengen

- Erinnerung: für endliche Mengen M ist $|M|$ die Anzahl der Elemente von M, auch Kardinalität von M genannt

$|M| = n \;\Leftrightarrow\; M$ gleichmächtig wie $[n] = \{1, \dots, n\} \;\Leftrightarrow\; \exists$ Bijektion $M \to [n]$

- falls $A \cap B = \varnothing$ dann gilt $|A \cup B| = |A| + |B|$ und im Allgemeinen für paarweise disjunkte endliche Mengen $A_1, \dots, A_k$ gilt die Additionsregel

$$\left|\bigcup_{i=1}^{k} A_i\right| = |A_1 \cup \dots \cup A_k| = |A_1| + \dots + |A_k| = \sum_{i=1}^{k} |A_i| \,.$$

Wieso? Beweis? klar ✓

- für beliebige endliche Mengen A, B gilt $|A \times B| = |A| \cdot |B|$ und im Allgemeinen für endliche Mengen $A_1, \dots, A_k$ gilt die Multiplikationsregel

$$\left|\prod_{i=1}^{k} A_i\right| = |A_1 \times \dots \times A_k| = |A_1| \cdot \ldots \cdot |A_k| = \prod_{i=1}^{k} |A_i| \,.$$

Wieso? Beweis? z. B. Induktion nach k und $|A_k|$ ✓

- $|A| = |B| \iff \exists$ Bijektion $A \to B$ Gleichheitsregel

Geordnete Teilmengen/Tupel

k-Tupel von n-elementigen Mengen

Für natürliche Zahlen n, $k \in \mathbb{N}_0$ ist die Anzahl der k-Tupel einer n-elementigen Menge M gegeben durch

$$|M^k| \overset{\text{Multiplikationsregel}}{=} |M|^k = n^k \,.$$

Für $n = k = 0$ gilt $0^0 = 1$, gerechtfertigt durch den leeren 0-Tupel.

Bsp.: es gibt $2^3 = 8$ verschiedene binäre Tripel (3-Tupel mit Elementen aus $\{0, 1\}$)

$$(0,0,0)\,,\ (0,0,1)\,,\ (0,1,0)\,,\ (0,1,1)\,,\ (1,0,0)\,,\ (1,0,1)\,,\ (1,1,0)\,,\ (1,1,1)$$

k-Tupel von n-Mengen ohne Doppelungen/Wiederholungen

Für natürliche Zahlen n, $k \in \mathbb{N}_0$ ist die Anzahl der k-Tupel einer n-elementigen Menge M, in denen kein Element doppelt vorkommt, gegeben durch

$$|M| \cdot (|M| - 1) \cdot \ldots \cdot \big(|M| - (k-1)\big) = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot \big(n - (k-1)\big) =: (n)_k \,.$$

Für die fallende Faktorielle $(n)_k$ schreibt man auch $n^{\underline{k}}$ (z. B. im Skript).

- wegen des leeren Produkts ist $(n)_0 = 1$ und tatsächlich ist das leere 0-Tupel das einzige Tupel, welches hier gezählt wird
- für $n < k$ gilt $(n)_k = 0$ und für $n = k$ erhält man die Anzahl der Auflistungen

Permutationen

Definition (Permutation)

Eine bijektive Abbildung $\pi\colon M \to M$ auf einer (abzählbaren) Menge M heißt Permutation.

Ist M eine endliche Menge $\{m_1, \ldots, m_n\}$, wobei wir annehmen, dass die m_i paarweise verschieden sind, so kann man eine Permutation $\pi\colon M \to M$ darstellen durch

$$\begin{pmatrix} m_1 & m_2 & \ldots & m_n \\ \pi(m_1) & \pi(m_2) & \ldots & \pi(m_n) \end{pmatrix}.$$

Falls $M = [n]$, dann schreiben wir auch abkürzend nur die „untere Zeile" $(\pi(1), \ldots, \pi(n))$ an Stelle von $\begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ \pi(1) & \pi(2) & \ldots & \pi(n) \end{pmatrix}$.

Bsp.: $\pi(1) = 2$, $\pi(2) = 4$, $\pi(3) = 3$ und $\pi(4) = 1$ definiert eine Permutation auf $[4]$ und wird beschrieben durch:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{bzw.} \quad (2, 4, 3, 1)\,.$$

Fakultät

Definition (Fakultät)

Für jede natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}_0$ heißt

$$n! := \prod_{i=1}^{n} i = (n)_n$$

Fakultät von n. Insbesondere ist $0! = 1$.

Bemerkungen

- Bsp.: $1! = 1$, $2! = 2$, $3! = 6$, $4! = 24$, $5! = 120$
- Fakultät ist schnell wachsende Funktion auf $\mathbb{N}_0$, z. B. $70! > 10^{100}$
- Anzahl Permutationen einer n-elementigen Menge M
  $=$ Anzahl Bijektion von M nach M
  $=$ Anzahl der n-Tupel von M ohne Doppelungen $= (n)_n = n!$
- $0! = 1$ entspricht der leeren Abbildung, die eine Bijektion auf $\varnothing$ ist

Ungeordnete Teilmengen

k-elementige Teilmengen n-elementigen Mengen

Für natürliche Zahlen $n, k \in \mathbb{N}_0$ mit $n \geqslant k$ ist die Anzahl der k-elementigen Teilmengen einer n-elementigen Menge M gegeben durch

$$\left|\{A \subseteq M \colon |A| = k\}\right| = \binom{n}{k} := \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} .$$

Für $k > n$ gibt es offensichtlich keine k-elementigen Teilmengen von M.

Insbesondere $\binom{n}{k} \in \mathbb{N}_0$ und heißt Binomialkoeffizient.

Beweis: Sei M eine n-elementige Menge und $k \in \mathbb{N}_0$ mit $n \geqslant k$.

- es gibt $(n)_k$ geordnete k-Tupel (k-elementige Teilmengen) mit Elementen aus M ohne Wiederholungen und es gilt

$$(n)_k = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

- hierbei zählen wir jede k-elementige Teilmenge $A \subseteq M$ genau so oft, wie wir die Elemente von A anordnen können, also $|A|! = k!$ Mal

$\Rightarrow \left|\{A \subseteq M \colon |A| = k\}\right| = \frac{(n)_k}{k!} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$ $\square$

Rekursive Identität der Binomialkoeffizienten

Satz

Für alle natürlichen Zahlen n, $k \in \mathbb{N}$ mit $n > k$ gilt

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}.$$

1. Beweis (einsetzen und nachrechnen):

$$\begin{aligned}
\binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1} &= \frac{(n-1)!}{k!(n-1-k)!} + \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-1-(k-1))!} \\
&= \frac{(n-k)(n-1)!}{k!(n-k)!} + \frac{k(n-1)!}{k!(n-k)!} \\
&= \frac{(n-k+k)(n-1)!}{k!(n-k)!} \\
&= \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k}.
\end{aligned}$$

$\square$

Rekursive Identität der Binomialkoeffizienten

Satz

Für alle natürlichen Zahlen $n, k \in \mathbb{N}$ mit $n > k \geqslant 1$ gilt

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}.$$

2. Beweis (kombinatorische Interpretation ausnutzen):
Sei M eine n-elementige Menge und $x \in M$ (existiert wegen $n \geqslant 2$).

- die Menge der k-elementigen Teilmengen von M kann man aufspalten in die Mengen solcher Teilmengen,
  - die x nicht enthalten — davon gibt es $\binom{n-1}{k}$
  - die x enthalten — davon gibt es $\binom{n-1}{k-1}$

$\Rightarrow$

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$$

$\square$

Bemerkung:

- rekursive Berechnung wegen vieler Doppelberechnungen nicht effizient

Pascalsches Dreieck und weitere Rechenregeln

Wir ordnen die Binomialkoeffizienten wie folgt im Pascalschen Dreieck an:

$$
\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & \binom{0}{0} & & & & \\
 & & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & & \\
 & & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & & \\
 & \binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3} & \\
\binom{4}{0} & & \binom{4}{1} & & \binom{4}{2} & & \binom{4}{3} & & \binom{4}{4} \\
\iddots & & & & \vdots & & & & \ddots
\end{array}
$$

Satz

Für alle natürlichen Zahlen n, $k \in \mathbb{N}_0$ mit $n \geqslant k$ gilt:

- $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ $\qquad \frac{n!}{k!(n-k)!}$ ist symmetrisch in k und $n-k$
- $\sum_{\ell=0}^{n} \binom{n}{\ell} = 2^n$ $\qquad$ beweisen wir gleich

Binomischer Lehrsatz

Satz (Binomischer Lehrsatz)

Seien $x, y \in \mathbb{R}$. Dann gilt für alle $n \in \mathbb{N}_0$

$$(x+y)^n = \sum_{\ell=0}^{n} \binom{n}{\ell} x^{n-\ell} y^{\ell}.$$

Konsequenzen:

- für $x = y = 1$ folgt die Identität $2^n = (1+1)^n = \sum_{\ell=0}^{n} \binom{n}{\ell}$
- für $n = 2$ folgen die binomischen Formeln

$$(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2 \qquad \text{und} \qquad (x-y)^2 = x^2 - 2xy + y^2$$

- für $n = 3$ gilt $(x+y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$.

Beweis: $(x+y)^n = \sum_{\ell=0}^{n} \binom{n}{\ell} x^{n-\ell} y^{\ell}$

Beweis (Induktion nach n)

- Induktionsanfang $n = 0$: klar, wegen $(x+y)^0 = 1 = \binom{0}{0} x^0 y^0$ ✓
- Induktionsschritt von n nach $n+1$:

$$(x+y)^{n+1} \overset{\text{I.A.}}{=} (x+y) \cdot \sum_{\ell=0}^{n} \binom{n}{\ell} x^{n-\ell} y^{\ell}$$

Es gilt

$$x \sum_{\ell=0}^{n} \binom{n}{\ell} x^{n-\ell} y^{\ell} = \sum_{\ell=0}^{n} \binom{n}{\ell} x^{n+1-\ell} y^{\ell} = x^{n+1} + \sum_{\ell=1}^{n} \binom{n}{\ell} x^{n+1-\ell} y^{\ell}$$

sowie

$$y \sum_{\ell=0}^{n} \binom{n}{\ell} x^{n-\ell} y^{\ell} = \sum_{\ell=0}^{n} \binom{n}{\ell} x^{n-\ell} y^{\ell+1} = \sum_{\ell=1}^{n+1} \binom{n}{\ell-1} x^{\overbrace{n-(\ell-1)}^{=n+1-\ell}} y^{\ell} = \sum_{\ell=1}^{n} \binom{n}{\ell-1} x^{n+1-\ell} y^{\ell} + y^{n+1}.$$

Mit $\binom{n+1}{\ell} = \binom{n}{\ell} + \binom{n}{\ell-1}$ folgt also

$$(x+y)^{n+1} = \underbrace{\binom{n+1}{0} x^{n+1} y^0}_{=x^{n+1}} + \sum_{\ell=1}^{n} \binom{n+1}{\ell} x^{n+1-\ell} y^{\ell} + \underbrace{\binom{n+1}{n+1} x^0 y^{n+1}}_{=y^{n+1}} = \sum_{\ell=0}^{n+1} \binom{n+1}{\ell} x^{n+1-\ell} y^{\ell}$$

□

Kugeln auf Gefäße aufteilen

Partitionen einer natürlichen Zahl

Für natürliche Zahlen $m \in \mathbb{N}_0$ und $\ell \in \mathbb{N}$ gibt es genau

$$\binom{m+\ell-1}{\ell-1} = \binom{\ell+m-1}{m}$$

Möglichkeiten, um m als Summe von ℓ natürlichen Zahlen $m_1, \dots, m_\ell \in \mathbb{N}_0$ darzustellen, d. h. $\left|\left\{(m_1, \dots, m_\ell) \in \mathbb{N}_0^\ell \colon m_1 + \cdots + m_\ell = m\right\}\right| = \binom{m+\ell-1}{\ell-1}$.

Interpretation: Verteile m ununterscheidbare Kugel auf ℓ unterscheidbare Gefäße

Gefäß i bekommt m_i Kugeln

Beweis: Betrachte m als Folge von m Einsen und für $i = 1, \dots, \ell - 1$ „trenne“ m_i von m_{i+1} durch das Einfügen einer Null. Z. B. für $m = 6$ und $\ell = 4$ kodiert

110111001

die Zerlegung

$$m_1 = 2\,, \quad m_2 = 3\,, \quad m_3 = 0 \quad \text{und} \quad m_4 = 1\,.$$

Tatsächlich definiert dies eine Bijektion zwischen den Zerlegungen von m und den 0-1-Folgen der Länge $m + \ell - 1$ mit m Einsen. Eine solche 0-1-Folge ist bestimmt durch die Platzierung der Nullen und dafür gibt es $\binom{m+\ell-1}{\ell-1}$ Möglichkeiten. $\square$

Anagramme

Zeichenketten mit vorgegebener Buchstabenverteilung

Für natürliche Zahlen $\ell \in \mathbb{N}$ und $m_1, \ldots, m_\ell \in \mathbb{N}_0$ und Buchstaben/Zeichen $Z_1, \ldots, Z_\ell$ gibt es genau

$$\frac{\left(\sum_{i=1}^{\ell} m_i\right)!}{\prod_{i=1}^{\ell}(m_i!)} =: \binom{m_1 + \cdots + m_\ell}{m_1, \ldots, m_\ell}$$

verschiedene Zeichenketten der Länge $m := \sum_{i=1}^{\ell} m_i$, für $i = 1, \ldots, \ell$ jeweils m_i-Mal das Zeichen Z_i enthalten.

Insbesondere $\binom{m_1+\cdots+m_\ell}{m_1,\ldots,m_\ell} \in \mathbb{N}_0$ und heißt Multinomialkoeffizient.

Bemerkungen:

- Wörter, die aus einem Wort durch Vertauschung/Permutation der Buchstaben entstehen, nennt man Anagramme, z. B.

  AMPEL LAMPE PALME oder ERLE LEER
- in dem Problem oben müssen die Wörter nicht unbedingt Sinn ergeben
- für $m_1 = \cdots = m_\ell = 1$ ergibt jede Permutation ein anderes Anagramm

  $\longrightarrow \ell!$ „Anagramme“

Anagramme – Beweis

Zeichenketten mit vorgegebener Buchstabenverteilung

Für natürliche Zahlen $\ell \in \mathbb{N}$ und $m_1, \ldots, m_\ell \in \mathbb{N}_0$ und Buchstaben/Zeichen $Z_1, \ldots, Z_\ell$ gibt es genau

$$\frac{\left(\sum_{i=1}^{\ell} m_i\right)!}{\prod_{i=1}^{\ell}(m_i!)} = \binom{m_1 + \cdots + m_\ell}{m_1, \ldots, m_\ell}$$

verschiedene Zeichenketten der Länge $m := \sum_{i=1}^{\ell} m_i$, für $i = 1, \ldots, \ell$ jeweils m_i-Mal das Zeichen Z_i enthalten.

Beweis

- ausgehend von der Zeichenkette beginnend mit m_1 Zeichen Z_1, gefolgt von m_2 Zeichen Z_2, hinzu m_ℓ Zeichen Z_ℓ, gibt es $\left(\sum_{i=1}^{\ell} m_i\right)!$ Permutationen dieser Zeichenkette
- allerdings ergeben Permutationen die gleiche Zeichenkette, wenn sie jeweils nur Zeichen vom gleich Typ vertauschen
- so gibt es für jede Permutation genau $\prod_{i=1}^{\ell}(m_i!)$ Permutationen, die die gleiche Zeichenkette erzeugen (unabhängig kann man jeweils auf $m_i!$ Weisen die Zeichen vom Typ Z_1 vertauschen)
- es gibt also nur $\left(\sum_{i=1}^{\ell} m_i\right)!/\prod_{i=1}^{\ell}(m_i!)$ Permutationen, die unterschiedliche Zeichenketten erzeugen

□

Multinomialsatz

- für $\ell = 2$ reduzieren Multinomialkoeffizienten zu Binomialkoeffizienten

$$\binom{m_1+m_2}{m_1} = \frac{(m_1+m_2)!}{m_1!m_2!} = \binom{m_1+m_2}{m_1, m_2} = \binom{m_1+m_2}{m_2}$$

- der Multinomialsatz erweitert dementsprechend den binomischen Lehrsatz

Satz (Multinomialsatz)

Seien $\ell \in \mathbb{N}_0$ und $x_1, \ldots, x_\ell \in \mathbb{R}$. Dann gilt für alle $n \in \mathbb{N}_0$

$$(x_1 + \cdots + x_\ell)^n = \left(\sum_{i=1}^{\ell} x_i\right)^n = \sum_{n_1+\cdots+n_\ell=n} \binom{n}{n_1, \ldots, n_\ell} \prod_{i=1}^{\ell} x_i^{n_i}$$
$$= \sum_{n_1+\cdots+n_\ell=n} \binom{n}{n_1, \ldots, n_\ell} x_1^{n_1} \cdot \ldots \cdot x_\ell^{n_\ell},$$

wobei die Summe über alle ℓ-Tupel $(n_1, \ldots, n_\ell) \in \mathbb{N}_0^\ell$ mit $\sum_{i=1}^{\ell} n_i = n$ läuft.

Multinomialsatz – Beweis

Satz (Multinomialsatz)

Seien $\ell \in \mathbb{N}_0$ und $x_1, \ldots, x_\ell \in \mathbb{R}$. Dann gilt für alle $n \in \mathbb{N}_0$

$$(x_1 + \cdots + x_\ell)^n = \sum_{n_1 + \cdots + n_\ell = n} \binom{n}{n_1, \ldots, n_\ell} x_1^{n_1} \cdot \ldots \cdot x_\ell^{n_\ell}.$$

Beweis: Wir können

$$(x_1 + \ldots + x_\ell)^n = \underbrace{(x_1 + \ldots + x_\ell) \cdot \ldots \cdot (x_1 + \ldots + x_\ell)}_{n \text{ Faktoren}}$$

durch Ausmultiplizieren berechnen. Für $n_1, \ldots, n_\ell \in \mathbb{N}_0$ mit $n_1 + \ldots + n_\ell = n$ zählen wir, wie oft das Produkt $x_1^{n_1} \cdot \ldots \cdot x_\ell^{n_\ell}$ beim Ausmultiplizieren auftritt. Beim Ausmultiplizieren wählen wir aus jedem der n Faktoren $(x_1 + \ldots + x_\ell)$ eine Variable aus. Wir wählen also eine Zeichenkette der Länge n aus den Zeichen $x_1, \ldots, x_\ell$. Um das Produkt $x_1^{n_1} \cdot \ldots \cdot x_\ell^{n_\ell}$ zu erhalten, muss in der Zeichenkette, die wir auswählen, die Variable x_1 genau n_1-mal auftreten, die Variable x_2 n_2-mal und so weiter. Wir wissen bereits (siehe Anagramme), dass es genau $\binom{n}{n_1, \ldots, n_\ell}$ solche Zeichenketten gibt. Damit ist der Koeffizient vor $x_1^{n_1} \cdot \ldots \cdot x_\ell^{n_\ell}$, der sich beim Ausmultiplizieren von $(x_1 + \ldots + x_\ell)^n$ ergibt, der Multinomialkoeffizient $\binom{n}{\ldots}$. □

Ziehen von Elementen

Grundproblem

Wieviele Möglichkeiten gibt es, k Elemente aus einer n-elementigen Menge zu ziehen?

Hierbei unterscheidet man folgende Varianten:

- ziehen mit Zurücklegen, wobei die Reihenfolge, in der die Elemente gezogen werden, mit berücksichtigt wird

  k-Tupel $\Longrightarrow n^k$

- ziehen ohne Zurücklegen, mit Berücksichtigung der Reihenfolge

  k-Tupel ohne Wiederholung $\Longrightarrow (n)_k$

- ziehen ohne Zurücklegen, ohne Berücksichtigung der Reihenfolge

  k-elementige Teilmengen $\Longrightarrow \binom{n}{k}$

- ziehen mit Zurücklegen, ohne Berücksichtigung der Reihenfolge

  ???

Ziehen mit Zurücklegen ohne Reihenfolge

Satz

Für natürliche Zahlen $n \in \mathbb{N}$ und $k \in \mathbb{N}_0$ gibt es genau $\binom{n+k-1}{k}$ Möglichkeiten, k Elemente mit Zurücklegen aus einer n-elementigen Menge zu ziehen, wobei die Reihenfolge, in der die Elemente gezogen werden, nicht berücksichtigt wird.

Beweis:

Wenn die Reihenfolge, in der die Elemente gezogen werden, keine Rolle spielt, so müssen wir nur zählen, wie oft jedes Element der n-elementigen Menge gezogen wurde.

D. h. wir zählen Zerlegungen der natürlichen Zahl $m = k$ in $\ell = n$ Summanden $m_1, \ldots, m_\ell \in \mathbb{N}_0$ mit

$$m_1 + \cdots + m_\ell = m\,.$$

Für diese Problem wissen wir bereits, dass es $\binom{m+\ell-1}{\ell-1} = \binom{\ell+m-1}{m}$ unterschiedliche Kombinationen gibt und wegen $m = k$ und $\ell = n$ folgt der Satz. $\square$

Ziehen von Elementen

Grundproblem

Wieviele Möglichkeiten gibt es, k Elemente aus einer n-elementigen Menge zu ziehen?

Hierbei unterscheidet man folgende Varianten:

- ziehen mit Zurücklegen, wobei die Reihenfolge, in der die Elemente gezogen werden, mit berücksichtigt wird
  k-Tupel $\Longrightarrow n^k$
- ziehen ohne Zurücklegen, mit Berücksichtigung der Reihenfolge
  k-Tupel ohne Wiederholung $\Longrightarrow (n)_k$
- ziehen ohne Zurücklegen, ohne Berücksichtigung der Reihenfolge
  k-elementige Teilmengen $\Longrightarrow \binom{n}{k}$
- ziehen mit Zurücklegen, ohne Berücksichtigung der Reihenfolge
  $\binom{n+k-1}{k}$

Taubenschlag-/Schubfachprinzip

Beobachtung (Schubfachprinzip)

Für natürliche Zahlen m und $n \in \mathbb{N}$ mit $m > n$ gilt, falls m Objekte auf n Fächer verteilt werden, so gibt es mindestens ein Fach mit mindestens zwei Objekten.

Für $m > n$ gibt es keine injektive Abbildung von einer m-elmentigen Menge M in eine n-elementige Menge N.

Allgemeiner gilt, wenn m Objekte auf n Fächer verteilt werden, so gibt es mindestens ein Fach mit mindestens $\lceil \frac{m}{n} \rceil$ Objekten.

Satz (Unendliche Variante)

Sei M eine unendliche Menge und $n \in \mathbb{N}$. Sind $M_1, \ldots, M_n$ Teilmengen von M mit $M = M_1 \cup \cdots \cup M_n$, so ist (mindestens) eine der Mengen $M_1, \ldots, M_n$ unendlich.

Beweis: Angenommen, $M_1, \ldots, M_n$ sind endlich. Dann existiert $m \in \mathbb{N}_0$ definiert als das Maximum der Mächtigkeiten der M_i, d. h. $m = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} |M_i|$. Dann gilt aber

$$|M| \leqslant \sum_{i=1}^{n} |M_i| \leqslant m \cdot n$$

und somit ist auch M endlich. ↯ $\square$

Zwei einfache Anwendungen des Schubfachprinzips

Teilerfremde und teilende Paare

Für $n \in \mathbb{N}$ seien $n+1$ beliebige natürliche Zahlen $1 \leqslant x_1 < \cdots < x_{n+1} \leqslant 2n$ gegeben. Dann gibt es

- zwei Indizes $1 \leqslant i < j \leqslant n$, sodass x_i und x_j teilerfremd sind
- und es gibt zwei Indizes $1 \leqslant k < \ell \leqslant n$, sodass $x_k \mid x_\ell$.

Beweis: Für die erste Aussage müssen wir uns nur klar machen, dass es unter $n+1$ Zahlen zwischen 1 und $2n$, in jedem Fall ein Zahlenpaar der Form a, $a+1$ gibt. D. h. es gibt ein i und a sodass $x_i = a$ und $x_{i+1} = a+1$ gilt und offensichtlich sind $x_i = a$ und $x_{i+1} = a+1$ teilerfremd. Formal können wir auch die Zahlen zwischen 1 und $2n$ in n Schubladen $S_1, \ldots, S_n$ der Form $S_j = \{2j-1, 2j\}$ unterteilen und wegen des Schubfachprinzips muss eine der Schubladen mindestens zwei der x_i enthalten.

Für die zweite Aussage betrachten wir als Schubladen die n ungeraden Zahlen zwischen 1 und $2n$ und wir legen x_i in die Schublade der ungeraden Zahl u, falls u der größte ungerade Teiler von x_i ist. Wegen des Schubfachprinzips gibt es also ein ungerades u und $x_k < x_\ell$, sodass u der größte ungerade Teiler von x_k und x_ℓ ist. Also ist $x_k = 2^a u$ und $x_\ell = 2^b u$ für $a < b$ aus $\mathbb{N}_0$. Somit gilt $x_\ell = 2^{b-a} x_k$. □

Allgemeine Additionsregel

$$A_1, \dots, A_n \text{ paarweise disjunkt und endlich } \implies \left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| = \sum_{i=1}^{n} |A_i|$$

Frage

Was passiert wenn die Mengen A_i nicht paarweise disjunkt sind?

Antworten:

- Elemente die in mehreren A_i vorkommen, werden in der Summe mehrfach gezählt, z. B. für zwei Mengen A, B gilt:
$$|A| + |B| = |A \cup B| + |A \cap B|$$
- **allgemein:** seien $A_1, \dots, A_n \subseteq X$ und $f\colon X \to \mathbb{N}_0$ ordne jedem Element seine Vielfachheit in der Mengenfamilie zu
$$f(x) = |\{i \in [n] : x \in A_i\}| = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{1}_{A_i}(x)\,,$$
wobei die Indikatorfunktion $\mathbb{1}_A(\cdot)$ einer Menge A durch $\mathbb{1}_A(x) = 1$ falls $x \in A$ und $\mathbb{1}_A(x) = 0$ sonst definiert ist, dann gilt
$$\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| \leqslant \sum_{i=1}^{n} |A_i| = \sum_{i=1}^{n} \sum_{x \in X} \mathbb{1}_{A_i}(x) = \sum_{x \in X} \sum_{i=1}^{n} \mathbb{1}_{A_i}(x) = \sum_{x \in X} f(x)$$

Verallgemeinerung von $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$

Für drei Mengen A, B und C gilt:

- $|A| + |B| + |C|$ zählt alle Elemente in $A \cup B \cup C$ mindestens einmal, aber die Elemente in den paarweisen Schnitten $A \cap B$, $A \cap C$ und $B \cap C$ werden mindestens zweimal gezählt
- Idee: paarweise Schnitte einfach abziehen

$$|A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C|$$

Problem: Elemente in $A \cap B \cap C$ werden in $|A| + |B| + |C|$ dreimal gezählt, aber durch $-|A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C|$ auch dreimal abgezogen, da sie in jedem der drei Schnitte enthalten sind, d. h. Elemente in $A \cap B \cap C$ werden oben gar nicht mehr mitgezählt

$\Rightarrow$ einfach wieder hinzuaddieren, ergibt die richtige Formel:

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$$

Siebformel – Prinzip von Inklusion und Exklusion

Satz (Siebformel)

Für endliche Mengen $A_1, \ldots, A_n$ gilt

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| = \sum_{\varnothing \neq J \in \wp([n])} (-1)^{|J|-1} \left|\bigcap_{j \in J} A_j\right|.$$

Bemerkungen:

- die Summe läuft über alle nicht-leeren Teilmengen von $[n] = \{1, \ldots, n\}$
- für die 1-elementigen Mengen $J = \{j\}$ erhält man die Summanden $|A_j|$
- für $n = 2$ und 3 erhalten wir die bekannten Formeln
- Durchschnitte mit leerer Indexmenge definiert man als Grundmenge, hier $\bigcap_{j \in \varnothing} A_j = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$, und so erhält man durch umstellen die elegante Identität

$$\sum_{J \in \wp([n])} (-1)^{|J|} \left|\bigcap_{j \in J} A_j\right| = 0$$

Nützliches Lemma

Lemma

Für jede natürliche Zahl $\ell \geqslant 1$ und jede ℓ-elementige Menge gibt es genauso viele Teilmengen mit gerader, wie mit ungerader Anzahl von Elementen.

Beweis: Sei L eine nicht-leere ℓ-elementige Menge. Wegen $\ell > 0$ folgt aus dem binomischen Lehrsatz

$$0 = (1-1)^\ell = \sum_{k=0}^{\ell} \binom{\ell}{k} (-1)^k .$$

Durch Umstellen erhalten wir

$$\begin{aligned} \big|\{K \subseteq L \colon |K| \text{ ungerade}\}\big| &= \sum_{\substack{0 \leqslant k \leqslant \ell \\ k \text{ ungerade}}} \binom{\ell}{k} \\ &= \sum_{\substack{0 \leqslant k \leqslant \ell \\ k \text{ gerade}}} \binom{\ell}{k} = \big|\{K \subseteq L \colon |K| \text{ gerade}\}\big| \end{aligned}$$

$\square$

Beweis der Siebformel

Siebformel

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| = \sum_{\varnothing \neq J \in \wp([n])} (-1)^{|J|-1} \left|\bigcap_{j \in J} A_j\right|.$$

Beweis: Sei $x \in \bigcup_{i=1}^{n} A_i$ beliebig und $I_x = \{i \in [n] \colon x \in A_i\}$.

- x wird in $\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right|$ genau einmal gezählt
- x trägt zur Summe $\sum_{\varnothing \neq J \in \wp([n])} (-1)^{|J|-1} \left|\bigcap_{j \in J} A_j\right|$ bei $\iff J \subseteq I_x,\ J \neq \varnothing$

$\Rightarrow$ x trägt in der Summe genau $\sum_{\varnothing \neq J \in \wp(I_x)} (-1)^{|J|-1}$ bei

Wegen der Definition ist $I_x \neq \varnothing$ und $\ell := |I_x| \geqslant 1$ und wegen dem Lemma gilt

$$0 = \sum_{j=0}^{\ell} \binom{\ell}{j} (-1)^j = \sum_{J \in \wp(I_x)} (-1)^{|J|} = (-1)^0 + \sum_{\varnothing \neq J \in \wp(I_x)} (-1)^{|J|}.$$

Durch Umstellen und Division mit (-1) erhalten wir also $\sum_{\varnothing \neq J \in \wp(I_x)} (-1)^{|J|-1} = 1$.

$\Rightarrow$ x wird in $\sum_{\varnothing \neq J \in \wp([n])} (-1)^{|J|-1} \left|\bigcap_{j \in J} A_j\right|$ genau einmal gezählt $\square$

Fixpunktfreie Permutation

Briefe falsch verschicken

Es werden n unterschiedliche Briefe zufällig auf n voraddressierte Briefumschläge verteilt. Was ist die Wahrscheinlichkeit, dass **jeder** Brief in einen falschen Umschlag kommt?

Mathematisch: Eine Permutation $\pi\colon [n] \to [n]$ heisst fixpunktfrei, falls $\pi(i) \neq i$ für alle $i \in [n]$. Wieviele Permutationen auf $[n]$ sind fixpunktfrei?

Antwort

EULERsche Zahl $\mathrm{e} = 2{,}7\,1828\,1828\ldots$

Es gibt ungefähr (für große n) $n!/\mathrm{e}$ fixpunktfreie Permutationen auf $[n]$, d. h. mit Wahrscheinlichkeit $1/\mathrm{e} \approx 0{,}367$ liegen alle Briefe im falschen Umschlag für große n. Die Wahrscheinlichkeit liegt zwischen 0,36 und 0,37 für alle $n \geqslant 5$.

Beweis: Sei A_i die Menge der Permutationen π auf $[n]$ mit Fixpunkt $\pi(i) = i$. Die Siebformel ergibt also für die Anzahl der Permutationen **mit** Fixpunkt

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| = \sum_{\emptyset \neq J \in \wp([n])} (-1)^{|J|-1} \left|\bigcap_{j \in J} A_j\right| = \sum_{j=1}^{n} \binom{n}{j} (-1)^{j-1} (n-j)! = n! \sum_{j=1}^{n} \frac{(-1)^{j-1}}{j!}.$$

Wegen $\sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{j!} = \mathrm{e}^{-1} = 1/\mathrm{e}$ (Analysis) folgt $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-1)^{j-1}}{j!} = 1 - 1/\mathrm{e}$. □

Relationen und Graphen

Idee: Relation $R \subseteq M^2$ auf einer Menge M kann graphisch dargestellt werden, indem man die geordneten Paare in R als Pfeile zwischen den Elementen von M zeichnet

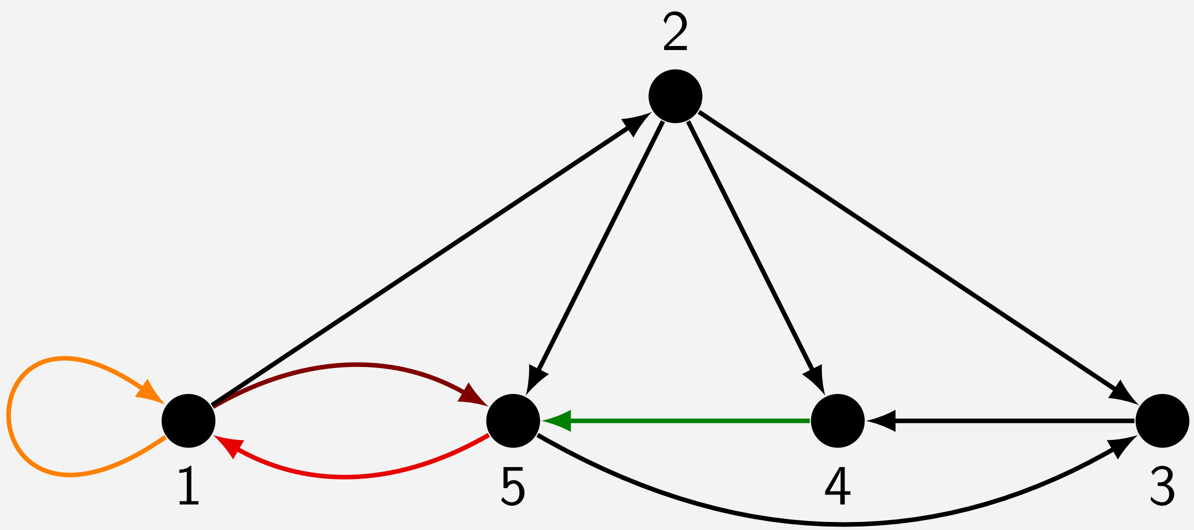
Definition (Gerichteter Graph)

Ein gerichteter Graph ist ein Paar $D = (V, A)$ mit $A \subseteq V^2$ und Kantenmenge A und Ecken/Knotenmenge V. Kanten der Form (v, v) heißen Schlingen.

Beispiel

Gerichteter Graph der Relation:

- $R := \{(1,1), (1,2), (1,5), (2,3), (2,4), (2,5), (3,4), (4,5), (5,1), (5,3)\}$
- auf $M := \{1,2,3,4,5\}$



Eigenschaften von Relationen und Graphen

Sei R eine Relation auf der Menge V:

- R ist reflexiv, falls jeder Ecke $v \in V$ im zugehörigen gerichteten Graphen eine Schlinge hat.
- R ist irreflexiv, falls keine Ecke $v \in V$ im zugehörigen gerichteten Graphen eine Schlinge hat.
- R ist symmetrisch, falls im gerichteten Graphen für jede Kante $(u, v) \in A$ auch die „umgekehrte“ Kante (v, u) in A vorhanden ist.
- R ist antisymmetrisch, falls für je zwei verschiedene Ecken u, $v \in V$ im gerichteten Graphen höchstens eine Kante vorhanden ist.
- R ist transitiv, falls für den gerichteten Graphen folgendes gilt: Immer wenn man entlang der gerichteten Kanten einen Weg (bzw. Kreis falls $u = v$) von einer Ecke u zu einer Ecke v finden kann, dann ist bereits die Kante (u, v) vorhanden.

HASSEdiagramme von Ordnungsrelationen

Ordnungsrelation/Teilordnung/partielle Ordnung:

reflexiv, antisymmetrisch, transitiv

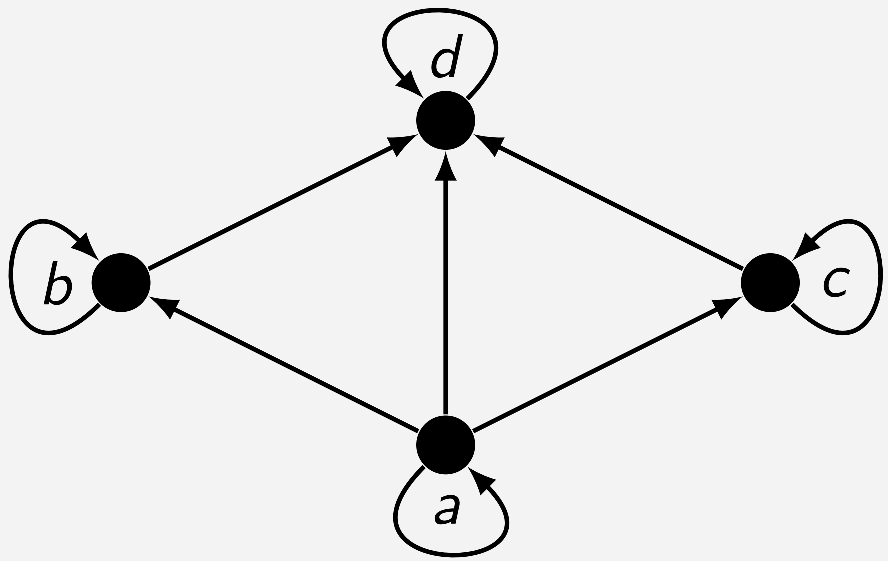
Vereinfachte Darstellung:

- reflexiv $\Rightarrow$ Graph hat an jeder Ecke eine Schlinge
  $\longrightarrow$ Schlingen einfach weglassen
- transitiv $\Rightarrow$ Wege erzwingen „abkürzende Kanten“
  $\longrightarrow$ nur Wege ohne Abkürzungen zeichnen
  $\Rightarrow$ (u, v) nur darstellen, wenn es **keinen** gerichteten Weg von u nach v mit mindestens zwei Kanten im Graphen der Relation gibt
- restlichen Graphen so zeichnen, dass alle Pfeilspitzen nach oben zeigen
  $\longrightarrow$ und dann Pfeilspitzen weglassen
- die sich ergebende Darstellung einer Ordnungsrelation heißt:
  HASSEdiagramm

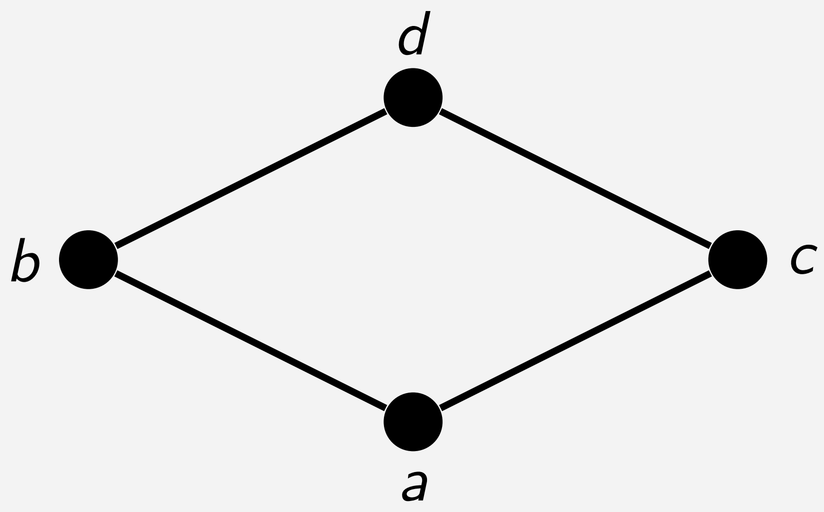
Hassediagramme – Beispiel

- $R := \{(a,a),(b,b),(c,c),(d,d),(a,b),(a,c),(a,d),(b,d),(c,d)\}$
- auf $M := \{a,b,c,d\}$

gerichteter Graph von R



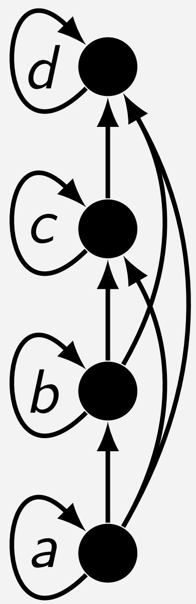
Hassediagramm von R



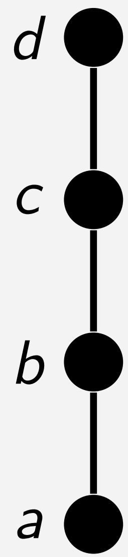
HASSEdiagramme – Beispiel 2

- $R := \{(a, a), \ldots, (d, d), (a, b), (a, c), (a, d), (b, c), (b, d), (c, d)\}$
- auf $M := \{a, b, c, d\}$

gerichteter Graph von R



HASSEdiagramm von R



Hüllenbildung

Idee:

- falls Relation R nicht ... erfüllt, dann erweitere/verringere R so wenig wie möglich bis ... erfüllt ist

Definition (Reflexive Hülle)

Für eine Relation R auf einer Menge M sei

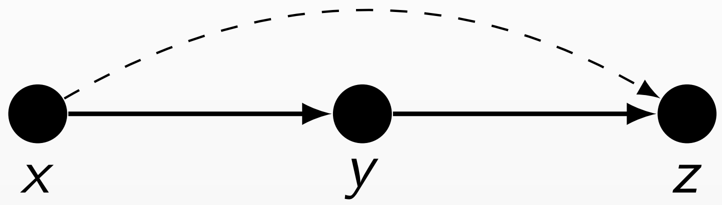
$$R' := R \cup \{(x, x) : x \in M\}.$$

Dann ist R' die kleinste reflexive Relation, die R umfasst, und diese wird die reflexive Hülle von R genannt.

Bsp.: Für $<$ auf $\mathbb{N}$ ist $\leqslant$ die reflexive Hülle.

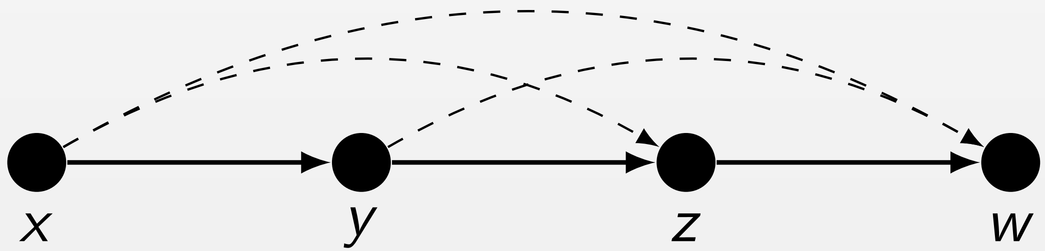
Transitive Hülle – Beispiele

- $R_1 := \{(x,y),(y,z)\}$ auf $M_1 = \{x,y,z\}$



$\Rightarrow$ für Transitivität fehlt (x,z)

- $R_2 := \{(x,y),(y,z),(z,w)\}$ auf $M_2 = \{x,y,z,w\}$



$\Rightarrow$ für Transitivität fehlen nicht nur (x,z) und (y,w), sondern auch (x,w)

Transitive Hülle

Allgemein:

- wir brauchen für Transitivität die Eigenschaft:

$$\text{falls } (x_1, x_2), \ldots, (x_{n-1}, x_n) \in R \implies (x_1, x_n) \in R$$

Definition (Transitive Hülle)

Für eine Relation R auf einer Menge A ist

$$\begin{aligned} R^+ := \big\{(x, y) \colon \ & \text{es gibt } n \geqslant 2 \text{ und } x_1, \ldots, x_n \in A \text{ mit} \\ & x = x_1,\ y = x_n \text{ und } (x_1, x_2), \ldots, (x_{n-1}, x_n) \in R\big\} \end{aligned}$$

die kleinste transitive Relation mit $R \subseteq R^+$, die transitive Hülle von R heißt.

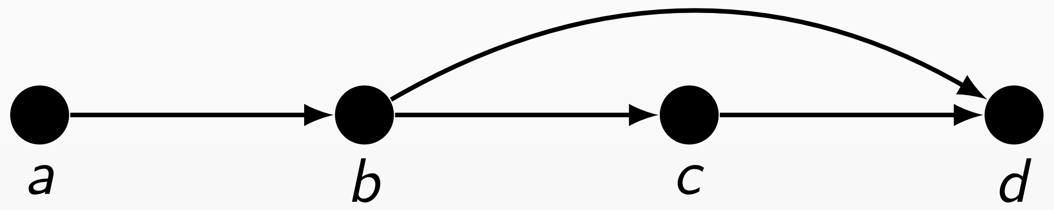
Des Weiteren ist $R^* = R^+ \cup R'$ die reflexive, transitive Hülle von R und R^* ist die kleinste reflexive, transitive Relation, die R umfasst.

Bemerkung

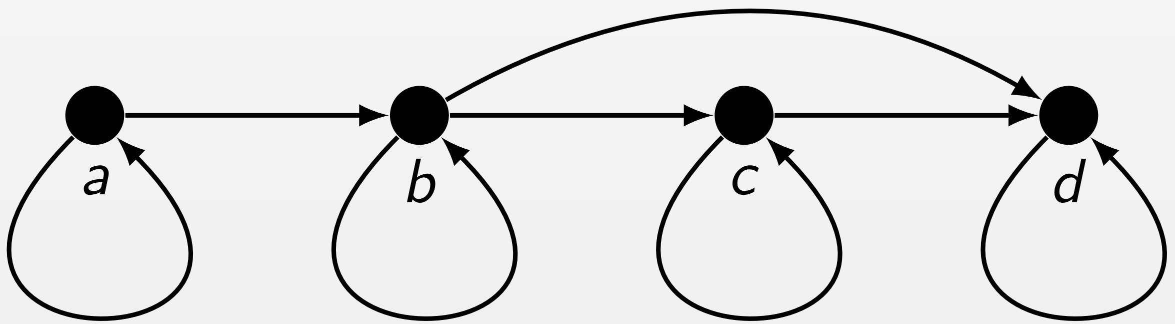
- Relationen die transitiv und reflexiv sind, heißen Quasiordnungen

Beispiel

$R = \{(a,b),(b,c),(c,d),(b,d)\}$

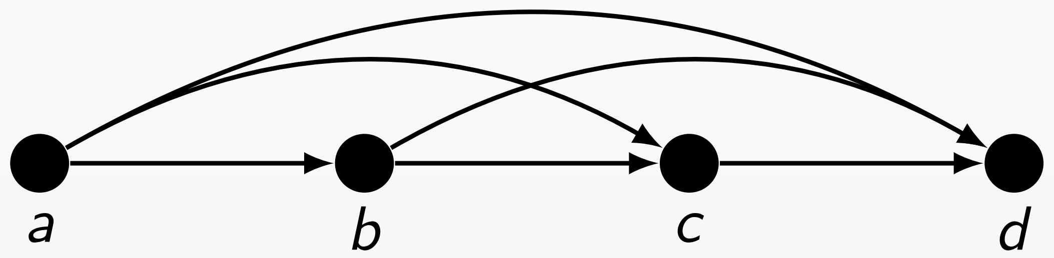


$R' = \{(a,a),(b,b),(c,c),(d,d),(a,b),(b,c),(c,d),(b,d)\}$

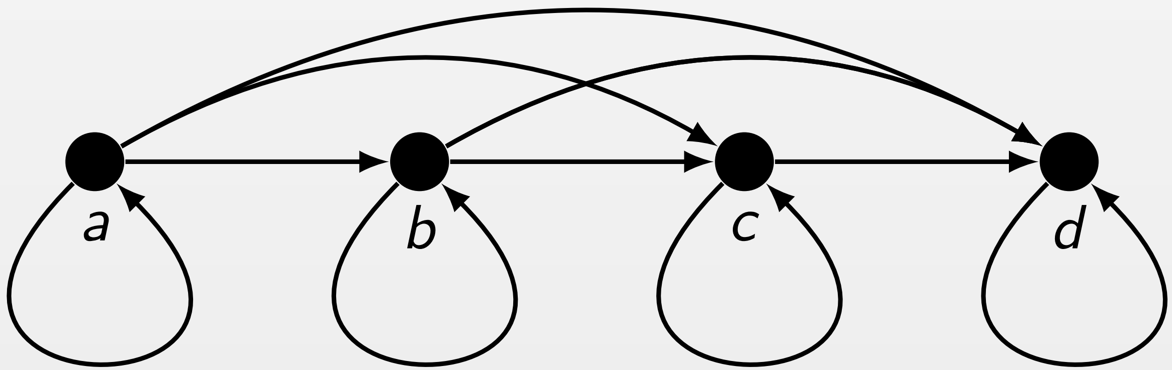


Beispiel

$$R^+ = \{(a,b),(a,c),(a,d),(b,c),(b,d),(c,d)\}$$



$$R^* = \{(a,a),(b,b),(c,c),(d,d),(a,b),(a,c),(a,d),(b,c),(b,d),(c,d)\}$$



Quasiordnungen zu Teilordnungen

Definition (Quasiordnung)

Eine reflexive und transitive Relation heißt Quasiordnung.

Idee:

- „entferne“ symmetrische Paare der Quasiordnung durch gleichsetzen/Äquivalenzen

Satz

Für jede Quasiordnung $\preccurlyeq$ auf einer Menge A wird durch

$$a \sim b \quad :\Leftrightarrow \quad (a \preccurlyeq b \text{ und } b \preccurlyeq a)$$

eine Äquivalenzrelation auf A definiert. Auf $A/\sim$ definiert dann

$$[a] \preccurlyeq [b] \quad :\Leftrightarrow \quad a \preccurlyeq b$$

eine Teilordnung.

Beweis des Satzes

Beweis: Der Beweis hat drei Teile

1. $\sim$ ist eine Äquivalenzrelation,
2. $\preccurlyeq$ ist wohldefiniert und
3. $\preccurlyeq$ ist eine Teilordnung.

zu 1: Reflexivität und Transitivität vererben sich von $\preccurlyeq$ und Symmetrie folgt von der Definition von $\sim$.

zu 2: Es ist zu zeigen, dass die Definition unabhängig von den gewählten Repräsentanten ist. D. h. für alle $a' \in [a]$ und $b' \in [b]$ muss gelten:

$$a \preccurlyeq b \quad \Leftrightarrow \quad a' \preccurlyeq b' \,.$$

Es gilt: $a' \in [a] \Rightarrow a' \sim a \Rightarrow a' \preccurlyeq a$ und $a \preccurlyeq a'$.
Ebenso $b' \in [b] \Rightarrow b' \preccurlyeq b$ und $b \preccurlyeq b'$.
Wegen der Transitivität von $\preccurlyeq$ gilt also $a \preccurlyeq b \Rightarrow a' \preccurlyeq a \preccurlyeq b \preccurlyeq b' \Rightarrow a' \preccurlyeq b'$ und ebenso $b \preccurlyeq a \Rightarrow b' \preccurlyeq a'$.

zu 3: Reflexivität und Transitivität vererben sich von $\preccurlyeq$.
Für die Antisymmetrie seien $a, b \in A$ mit $[a] \preccurlyeq [b]$ und $[b] \preccurlyeq [a]$. Aus der Definition von $\preccurlyeq$ folgern wir $a \preccurlyeq b \preccurlyeq a$ und somit $a \sim b$, also $[a] = [b]$. $\square$