Universität Hamburg
DER FORSCHUNG | DER LEHRE | DER BILDUNG

Musterlösungen zu 'Mathematik II (Elementare Lineare Algebra)'
Blatt 6
Nathan Bowler

A: Präsenzaufgaben

1. *Koordinatengleichung finden*
   Stellen Sie die Menge $\{(0,1)+t(1,-3)|t\in\mathbb{R}\}$ als eine Menge der Form
   $$\{(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2|a_1x_1+a_2x_2+c=0\}$$
   dar.

   Lösung: Aus der Vorlesung wissen wir, dass die Gerade $\{(P_1,P_2)+t(v_1,v_2)|t\in\mathbb{R}\}$ die Lösungsmenge der Gleichung
   $$v_2x_1-v_1x_2-v_2P_1+v_1P_2=0$$
   ist. In diesem Fall gilt $v_2=-3$, $v_1=1$ und $-v_2P_1+v_1P_2=-(-3)\times 0+1\times 1=1$. Deshalb lässt die Menge sich wie folgt darstellen:
   $$\{(x_1,x_2)|-3x_1-x_2+1=0\}$$

2. *Geradengleichung in Parameterform finden*
   Stellen Sie die Menge $\{(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2|3x_1-x_2-5=0\}$ als eine Menge der Form $\{P+tv|t\in\mathbb{R}\}$ dar.

   Lösung: Wir benutzen wieder die Formeln aus der Vorlesung, um folgende Darstellung zu finden:
   $$\left\{\left(\frac{5}{3},0\right)+t\left(\frac{1}{3},1\right)\middle| t\in\mathbb{R}\right\}$$

3. *Gleichheit von Geraden Überprüfen*
   Welche der folgenden Geraden sind gleich?

   (a) $\{(0,1)+t(1,-3)|t\in\mathbb{R}\}$
   (b) $\{(8,-8)+t(1,-3)|t\in\mathbb{R}\}$
   (c) $\{(-1,4)+t(-2,6)|t\in\mathbb{R}\}$

   Lösung: Wie in Aufgabe 1, können wir diese Mengen als Lösungsmengen von Koordinatengleichungen darstellen:

   (a) $\{(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2|-3x_1-x_2+1=0\}$
   (b) $\{(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2|-3x_1-x_2+16=0\}$
   (c) $\{(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2|6x_1+2x_2-2=0\}$

   Die Mengen (a) und (c) sind gleich, weil die Koordinatengleichungen äquivalent sind. Die Menge (b) is aber nicht mit diesen gleich, weil sie der Vektor $(8,-8)$ enthält, der nicht in den Anderen liegt.

B: Aufgaben

1. *Geraden sind immer durch Koordinatengleichungen definierbar*
   Beweisen Sie, dass die Gerade $g = \{(P_1, P_2) + t(v_1, v_2) | t \in \mathbb{R}\}$ die Lösungsmenge der Gleichung

   $$v_2x_1 - v_1x_2 - v_2P_1 + v_1P_2 = 0$$

   ist.

   Lösung: Sei zunächst (x_1, x_2) ein Vektor in g. Dann hat (x_1, x_2) der Form $(P_1, P_2) + t(v_1, v_2)$ mit t eine reele Zahl. Also gilt

   $$\begin{aligned} v_2x_1 - v_1x_2 - v_2P_1 + v_1P_2 &= v_2(P_1 + tv_1) - v_1(P_2 + tv_2) - v_2P_1 + v_1P_2 \\ &= v_2P_1 + tv_1v_2 - v_1P_2 - tv_1v_2 - v_2P_1 + v_1P_2 \\ &= 0\,, \end{aligned}$$

   woraus folgt, dass (x_1, x_2) in der Lösungsmenge der gegebenen Gleichung ist.
   Sei nun (x_1, x_2) eine Lösung dieser Gleichung. Setze $t := \frac{x_1 - P_1}{v_1}$. Dann gilt per Definition $P_1 + tv_1 = x_1$. Es gilt auch

   $$\begin{aligned} P_2 + tv_2 &= P_2 + \frac{x_1 - P_1}{v_1}v_2 \\ &= \frac{v_1P_2 + v_2x_1 - v_2P_1}{v_1} \\ &= \frac{v_1x_2}{v_1} \\ &= x_1 \end{aligned}$$

   woraus folgt $(x_1, x_2) = (P_1, P_2) + t(v_1, v_2) \in g$.

2. *Ebenengleichung in Koordinatenform finden*
   Stellen Sie die Menge $\{(0, 1, -2) + s(1, -1, 0) + t(-1, 0, 1) | s, t \in \mathbb{R}\}$ als eine Menge der Form

   $$\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 | a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + c = 0\}$$

   dar.

   Lösung: Wir müssen a_1, a_2 und a_3 finden, sodass $a_1 - a_2 = 0$ und $-a_1 + a_3 = 0$. Das heißt, $a_1 = a_2 = a_3$. Wir setzen also $a_1 = a_2 = a_3 := 1$. Nun benutzen wir die Formel $c = -a_1P_1 - a_2P_2 - a_3P_3 = -0 \times 1 - 1 \times 1 - (-2) \times 1 = 1$. Also haben wir folgende Darstellung der gegebenen Menge:

   $$\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 | x_1 + x_2 + x_3 + 1 = 0\}$$

3. *Ebenengleichung in Parameterform finden*
   Stellen Sie die Menge $\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 | 3x_1 - x_2 + x_3 - 5 = 0\}$ als eine Menge der Form

   $$\{P + sv + tw | t \in \mathbb{R}\}$$

   dar.

   Lösung: wir wenden die Formeln aus der Vorlesung an, um folgende Darstellung zu finden:

   $$\left\{ \left(\frac{5}{3}, 0, 0\right) + s\left(\frac{1}{3}, 1, 0\right) + t\left(-\frac{1}{3}, 0, 1\right) \middle| s, t \in \mathbb{R} \right\}$$

4. *Gleichheit von Ebenen Überprüfen*
   Welche der folgenden Ebenen sind gleich?

   (a) $\{(0,0,0) + s(1,1,-1) + t(2,3,0) | s, t \in \mathbb{R}\}$
   (b) $\{(1,1,-1) + s(2,3,5) + t(1,2,6) | s, t \in \mathbb{R}\}$
   (c) $\{(0,-1,-7) + s(1,1,-1) + t(0,1,7) | s, t \in \mathbb{R}\}$

   Lösung: Wie in Aufgabe 2, können wir diese Mengen als Lösungsmengen von Koordinatengleichungen darstellen:

   (a) $\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 | 3x_1 - 2x_2 + x_3 = 0\}$
   (b) $\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 | 8x_1 - 7x_2 + x_3 = 0\}$
   (c) $\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 | 8x_1 - 7x_2 + x_3 = 0\}$

   Die Mengen (b) und (c) sind deshalb gleich, aber sie sind nicht mit der Menge (a) gleich, weil diese den Vektor $(2,3,0)$ enthält, der nicht in (b) und (c) liegt.

5. *Schnitt von zwei Ebenen als Gerade darstellen*
   Stellen Sie die Menge $\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 | x_1 + x_2 + x_3 = 1 \text{ und } x_1 - x_2 = 0\}$ als eine Menge der Form $\{P + tv | t \in \mathbb{R}\}$ dar.

   Lösung: Der Stützpunkt $P = (P_1, P_2, P_3)$ muss die Gleichungen $P_1 + P_2 + P_3 = 1$ und $P_1 - P_2 = 0$ erfüllen. Wir können zum Beispiel $P := (0,0,1)$ setzen. Der Richtungsvektor $v = (v_1, v_2, v_3)$ muss die Gleichungen $v_1 + v_2 + v_3 = 0$ und $v_1 - v_2 = 0$ erfüllen, also muss er ein Vielfach von $(1,1,-2)$ sein. Die Menge lässt sich also wie folgt darstellen:

   $$\{(0,0,1) + t(1,1,-2) | t \in \mathbb{R}\}$$