Universität Hamburg
DER FORSCHUNG | DER LEHRE | DER BILDUNG

Lösungen zu 'Mathematik II (Elementare Lineare Algebra)'
Blatt 10
Nathan Bowler

A: Präsenzaufgaben

1. *Basis des Zeilenraums*

   Finden Sie mithilfe des Gauß-Verfahrens eine Basis des Zeilenraums der Matrix $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & -2 \end{pmatrix}$.

   Lösung: Wir subtrahieren das Zweifache der ersten Zeile von der Zweiten, und addieren die erste Zeile zu der Dritte.

   $$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & -2 \end{pmatrix}$$

   Wir teilen die zweite Zeile durch 2, dann addieren das Dreifache davon zu der Dritten.

   $$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

   Wir multiplizieren die dritte Zeile mit -2.

   $$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

   Diese Matrix ist in Zeilenstufenform, also bilden die von Null verschiedenen Zeilen eine Basis des Zeilenraums: $\{(1, -1, 0), (0, 1, \frac{1}{2}), (0, 0, 1)\}$.

2. *Basis des Spaltenraums*

   Finden Sie mithilfe des Gauß-Verfahrens eine Basis des Spaltenraums der Matrix $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 \\ -1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

   Lösung: Der Spaltenraum der matrix ist gleich der Zeilenraum der transponierten Matrix

   $$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \\ 4 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

   Diesen Zeilenraum finden wir wie in Aufgabe 1. Wir vertauschen die erste zwei Zeilen, dann subtrahieren das Vierfache der ersten Zeile von der Dritten.

   $$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 9 & -4 \end{pmatrix}$$

Wir teilen die zweite Zeile durch -1, dann subtrahieren das Neunfache davon von der Dritten.

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 14 \end{pmatrix}$$

Wir teilen die dritte Zeile durch 14.

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Diese Matrix ist in Zeilenstufenform. Die gesuchte Basis ist deshalb $\{(1,-2,1),(0,1,-2),(0,0,1)\}$.

3. *Basis des Kerns*

   Finden Sie mithilfe des Gauß-Jordan Verfahrens eine Basis des Kerns der Matrix $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

   Lösung: Wir teilen die erste Zeile durch 2 und subtrahieren sie von der Zweiten.

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 2 \\ 0 & \frac{1}{2} & -1 \end{pmatrix}$$

   Wir multiplizieren die zweite Zeile durch 2 und subtrahieren die Hälfte davon von der Ersten.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

   Für jedes Element $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ des Kerns gilt deshalb $x = -3z$ und $y = 2z$, woraus folgt $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3z \\ 2z \\ z \end{pmatrix} = z\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Deshalb ist $\left\{\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$ eine Basis des Kerns.

B: Aufgaben

1. *Basis des Zeilenraums*

   Finden Sie mithilfe des Gauß-Verfahrens eine Basis des Zeilenraums der Matrix $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

   Lösung: Wir subtrahieren das Zweifache der ersten Zeile von der Zweiten und addieren die erste Zeile zu der Dritten.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -5 & -2 \\ 0 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

   Wir teilen die zwiete Zeile durch -5, dann subtrahieren das Vierfache davon von der Dritten.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{2}{5} \\ 0 & 0 & \frac{2}{5} \end{pmatrix}$$

Wir teilen die dritte Zeile durch $\frac{2}{5}$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{2}{5} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Diese Matrix ist in Zeilenstufenform, also bilden die von Null verschiedenen Zeilen eine Basis des Zeilenraums: $\{(1,2,1),(0,1,\frac{2}{5}),(0,0,1)\}$.

2. *Basis des Spaltenraums*

Finden Sie mithilfe des Gauß-Verfahrens eine Basis des Spaltenraums der Matrix $\begin{pmatrix} 2 & -3 & 5 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & -3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

Lösung: Der Spaltenraum der matrix ist gleich der Zeilenraum der transponierten Matrix

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 1 \\ -3 & 2 & -3 & 1 \\ 5 & 2 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Diesen Zeilenraum finden wir wie in Aufgabe 1. Wir teilen die erste Zeile durch 2 und addieren passende Vielfäche davon zu den Anderen.

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{7}{2} & 0 & \frac{5}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & -3 & -\frac{7}{2} \\ 0 & \frac{3}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Wir teilen die zweite Zeile durch $\frac{7}{2}$ und addieren passende Vielfäche davon zu den anderen.

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{5}{7} \\ 0 & 0 & -3 & -\frac{22}{7} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{11}{7} \end{pmatrix}$$

Wir teilen die zweite Zeile durch -3 und die Dritte durch $-\frac{11}{7}$.

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{5}{7} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{22}{21} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Diese Matrix ist in Zeilenstufenform. Die gesuchte Basis ist deshalb $\{(1,\frac{1}{2},1,\frac{1}{2}),(0,1,0,\frac{5}{7}),(0,0,1,\frac{22}{21}),(0,0,0,1)\}$.

3. *Basis des Kerns*

Finden Sie mithilfe des Gauß-Jordan Verfahrens eine Basis des Kerns der Matrix $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 6 & -9 & -4 \end{pmatrix}$.

Lösung: Wir subtrahieren passende Vielfäche der ersten Zeile von den Anderen.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & -2 \\ 0 & -15 & -10 \end{pmatrix}$$

Wir teilen die zweite Zeile durch -3 und addieren das Zweifache davon zu der Dritten.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Wir subtrahieren die zweite Zeile von der Ersten.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Für ein Element $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ des Kerns gilt deshalb $x = -\frac{1}{3}z$ und $y = -\frac{2}{3}z$. Es folgt, dass $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3}z \\ -\frac{2}{3}z \\ z \end{pmatrix} = z \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} \\ 1 \end{pmatrix}$. Deshalb ist $\left\{ \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ eine Basis des Kerns.

4. *Basis des Zeilenraums*
   Finden Sie mithilfe des Gauß-Verfahrens eine Basis der linearen Hülle der Vektoren $(0, 1, 1)$, $(-1, 2, 1)$ und $(-3, 2, -1)$ in $\mathbb{R}^3$.

   Wir wenden das Gauß-Verfahren an für die Matrix, deren Zeilen die gegebenen Vektoren sind:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ -3 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

   Wir vertauschen die ersten zwei Zeilen.

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -3 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

   Wir teilen die erste Zeile durch -1 und addieren das Dreifache davon zu der Dritten.

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -4 & -4 \end{pmatrix}$$

   Wir addieren das Vierfache der zweiten Zeile zu der Dritten und das Zweifache der zweiten Zeile zu der Ersten.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

   Die gesuchte Basis ist also $\{(1, 0, 1), (0, 1, 1)\}$.

5. *Rang und die Dimension des Kerns*
   Was ist der Rang der Matrix $A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & -6 \\ -6 & 3 & 9 \end{pmatrix}$? Was ist die Dimension des Kerns von A? Was ist die Dimension des Kerns von A^T?

Lösung: Der Rang ist 1, weil der Zeilenraum von $(4, -2, -6)$ erzeugt wird. Die Dimension des Kerns ist die Anzahl von Spalten minus die Dimension: 3-1 = 2. Die Dimension des Kerns der transponierten Matrix ist die Anzahl von Zeilen minus die Dimension: 2 - 1 = 1.