Übungen zur Mengenlehre
WiSe 2015/16

1. Übungsblatt

(Abgabe: 30.10.2015)

Aufgabe 1 (Geordnete Paare) – 2P.

Wie in der Vorlesung definieren wir $(x, y) := \{\{x\}, \{x, y\}\}$ für beliebige Mengen x, y. Zeigen Sie, dass diese Definition in der Tat geordnete Paare definiert, d.h. dass für alle Mengen x, y, x', y' folgendes gilt:

$$(x, y) = (x', y') \quad \leftrightarrow \quad x = x' \text{ und } y = y'.$$

Aufgabe 2 (Produkt und Funktionenmenge) – 2P. + 2P.

1. Zeigen Sie, dass für je zwei Mengen X, Y die Klasse

   $$X \times Y := \{(x, y) \mid x \in X \text{ und } y \in Y\}$$

   eine Menge ist.
   Welche Axiome von **ZF** haben Sie in Ihrem Beweis benutzt?

2. Zeigen Sie, dass für je zwei Mengen X, Y die Klasse

   $$^{Y}X := \{f \subseteq X \times Y \mid \text{Für alle } x \in X \text{ gibt es genau ein } y \in Y, \text{ sodass } (x, y) \in f\}.$$

   eine Menge ist.
   Welche Axiome von **ZF** haben Sie in Ihrem Beweis benutzt?

Bitte wenden!

Aufgabe 3 (Peano-Strukturen) – 3P. + 4 Bonus-P.

Eine *Peano-Struktur* ist ein Tripel (M, σ, ν) aus einer beliebigen Menge M, einer Funktion $\sigma \in {}^M M$ und einer Konstante $\nu \in M$, sodass die folgenden drei Eigenschaften gelten:

$(P1)$ $(\forall m, n \in M)(\sigma(m) = \sigma(n) \rightarrow m = n)$;

$(P2)$ $(\forall m \in M)\sigma(m) \neq \nu$;

$(P3)$ $(\forall A \subseteq M)[(\nu \in A \wedge (\forall m \in M)(m \in A \rightarrow \sigma(m) \in A)) \rightarrow A = M)$.

1. Es sei $s \in {}^{\mathbb{N}}\mathbb{N}$ definiert durch $s(n) := n \cup \{n\}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass dann $(\mathbb{N}, s, 0)$ eine Peano-Struktur ist.

b)* Zeigen Sie, dass je zwei Peano-Strukturen (M, σ, ν) und (M', σ', ν') isomorph sind, d.h. dass es eine Bijektion $f \in {}^M M'$ gibt, sodass $f(\nu) = \nu'$ und für alle $m, n \in M$, $m = \sigma(n) \leftrightarrow f(m) = \sigma'(f(n))$.

Aufgabe 4 (Substitution von Klassen) – 7P.

Zeigen Sie, dass für eine beliebige Mengen x und Klassen K, L, M folgendes gilt:

1. $K = L \rightarrow L = K$;
2. $K = L \wedge L = M \rightarrow K = M$;
3. $K = L \wedge L = x \rightarrow K = x$;
4. $K = L \wedge x \in K \rightarrow x \in L$;
5. $K = L \wedge M \in K \rightarrow M \in L$;
6. Zeigen Sie, dass $K = L \wedge \varphi(K) \rightarrow \varphi(L)$ gilt, wobei $\varphi(K)$ eine beliebige mengentheoretische Formel ist, in der K vorkommt und $\varphi(L)$ dieselbe Formel, bei der jedes Vorkommen von K durch L ersetzt wurde.
[**Hinweis:** Sie können ohne Beweis benutzen, dass zwei Formeln φ und ψ äquivalent sind, wann immer ψ aus φ dadurch entsteht, dass man Teilformeln von φ durch äquivalente Teilformeln ersetzt.]
7. K ist eine Menge genau dann wenn K Element einer Menge ist.