Übungen zur Mengenlehre
WiSe 2015/16

5. Übungsblatt

(Abgabe: 08.01.2016)

Wenn nicht anders angegeben, können Sie auf diesem Blatt alle Axiome von **ZFC** benutzen.

Aufgabe 1 (Einbettungen von Ordinalzahlen in $\mathbb{R}$) – 4P.

In dieser Aufgabe seien $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{R}$ versehen mit ihren üblichen Totalordnungen.

1. Zeigen Sie, dass es für jede Ordinalzahl $\alpha < \omega_1$ eine ordnungserhaltende Injektion $f : \alpha \to \mathbb{Q}$ gibt.

2. Zeigen Sie, dass es keine ordnungserhaltende Injektion $f : \omega_1 \to \mathbb{R}$ gibt.

Aufgabe 2 (Konfinalität) – 6P.

Seien α, β Ordinalzahlen. Eine Funktion $f : \beta \to \alpha$ heißt *unbeschränkt* in α genau dann, wenn $\bigcup f[\beta] = \alpha$ gilt. Die *Konfinalität* von α – bezeichnet durch $\mathrm{cf}(\alpha)$ – ist die kleinste Ordinalzahl β, sodass es eine in α unbeschränkte Funktion $f : \beta \to \alpha$ gibt.

Eine Limes-Ordinalzahl α mit $\mathrm{cf}(\alpha) = \alpha$ nennen wir *regulär*. Eine Limes-Ordinalzahl α mit $\mathrm{cf}(\alpha) < \alpha$ nennen wir *singulär*.

Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

1. Für eine beliebige Limes-Ordinalzahl α ist $\mathrm{cf}(\alpha)$ eine unendliche reguläre Kardinalzahl.

2. $\aleph_0$ ist regulär.
   Jede Nachfolgerkardinalzahl (also eine von der Form $\aleph_{\alpha+1}$) ist regulär.
   Wenn α eine Limes-Ordinalzahl ist, so ist $\mathrm{cf}(\aleph_\alpha) = \mathrm{cf}(\alpha)$.

3. Für eine unendliche Limes-Kardinalzahl κ und eine unendliche reguläre Kardinalzahl λ gilt genau dann $\mathrm{cf}(\kappa) \leq \lambda$, wenn es eine Folge $\langle \kappa_i \mid i < \lambda \rangle$ von Kardinalzahlen $\kappa_i < \kappa$ gibt, sodass $\sum_{i<\lambda} \kappa_i = \kappa$ gilt.

Bitte wenden!

4. Sei κ eine reguläre Kardinalzahl. Dann gibt es für jede Kardinalzahl λ eine Kardinalzahl $\lambda' > \lambda$, sodass $\mathrm{cf}(\lambda') = \kappa$ ist.

5. Es seien κ, λ unendliche Kardinalzahlen mit $\lambda < \mathrm{cf}(\kappa)$. Zeigen Sie, dass dann $\kappa^\lambda = \sum_{\alpha<\kappa} |\alpha|^\lambda$ gilt, wobei $|\alpha|$ die kleinste Kardinalzahl bezeichne, die zu α gleichmächtig ist.
   Folgern Sie hieraus, dass für beliebige Ordinalzahlen α, β gilt, dass $\aleph_{\alpha+1}^{\aleph_\beta} = \aleph_\alpha^{\aleph_\beta} \cdot \aleph_{\alpha+1}$.

Aufgabe 3 (Kardinalität und AC) – 6P.

In dieser Aufgabe dürfen Sie nur die Axiome von **ZF**, also insbesondere *nicht* das Auswahlaxiom benutzen.

1. Es seien X, Y Mengen, sodass es eine Bijektion $b : X \sqcup Y \to X \times Y$ gibt. Zeigen Sie, dass es dann entweder eine Injektion $f : X \to Y$ oder eine Surjektion $g : X \to Y$ gibt.

   [**Hinweis:** Betrachten Sie die Komposition $X \to X \sqcup Y \xrightarrow{b} X \times Y \to Y$]

2. Zeigen Sie, dass die folgende Aussage äquivalent zum Auswahlaxiom ist: Für jede Menge X gibt es eine Bijektion $b : X \times X \to X$.

   [**Hinweis:** Für eine gegebene Menge X wenden Sie den ersten Aufgabenteil auf die Gleichung $(X \sqcup \aleph(X))^2 = X \sqcup \aleph(X)$ an.]

Aufgabe 4* (Bonusaufgabe) – 4 Bonus-P.

1. Es sei κ eine Limes-Kardinalzahl. Zeigen Sie, dass dann $2^\kappa = (2^{<\kappa})^{\mathrm{cf}(\kappa)}$ gilt, wobei $2^{<\kappa} = \bigcup\{2^\mu \mid \mu < \kappa \text{ ist unendliche Kardinalzahl}\}$ ist.

   [**Hinweis:** Verwenden Sie Aufgabe 3.3. auf diesem Blatt.]

2. Sei κ eine unendliche singuläre Kardinalzahl und $\kappa' < \kappa$ eine unendliche Kardinalzahl, sodass es eine unendliche Kardinalzahl λ gibt mit $2^{\kappa''} = \lambda$ für alle unendlichen Kardinalzahlen κ'' mit $\kappa' \leq \kappa'' < \kappa$. Zeigen Sie, dass dann $2^\kappa = \lambda$ ist.

3. Wenn β eine Ordinalzahl ist, sodass für alle Ordinalzahlen α gilt, dass $2^{\aleph_\alpha} = \aleph_{\alpha+\beta}$, so ist $\beta < \omega$.

   [**Hinweis:** Sei α minimal, sodass $\alpha + \beta > \beta$. Nutzen Sie dann den letzten Aufgabenteil, um zu sehen, dass $2^{\aleph_{\alpha+\alpha}} = \aleph_{\alpha+\beta} < \aleph_{\alpha+\alpha+\beta}$ ist.]