Übungen zur Mengenlehre
WiSe 2015/16

6. Übungsblatt

(Abgabe: 22.01.2016)

Aufgabe 1 (Kombinatoren) – 3P.
Ein λ-Term heiße genau dann *Kombinator*, wenn in ihm keine Variable frei vorkommt.

1. Geben Sie (mit Beweis) einen λ-Term F an, sodass für alle Kombinatoren M, N, L gilt:
$$FMNL \rightsquigarrow N(\lambda x.M)(\lambda yz.yLM).$$
2. Geben Sie (mit Beweis) einen Kombinator F an, sodass für jede Variable x gilt, dass $Fx \rightsquigarrow xF$.

Aufgabe 2 (Reduktion und Subsitution) – 3P.
Es seien M, N und L λ-Terme und v eine Variable. Zeigen Sie:

1. Wenn $M \rightsquigarrow N$, so gilt auch $M[v \leftarrow L] \rightsquigarrow N[v \leftarrow L]$.
2. Wenn $M \rightsquigarrow N$, so gilt auch $L[v \leftarrow M] \rightsquigarrow L[v \leftarrow N]$.

Aufgabe 3 (Satz von Church-Rosser) – 6P.
Zeigen Sie die folgenden Aussagen für λ-Terme M, N, N_1, N_2:

1. (4P.) Wenn $M \rightsquigarrow N_1$ und $M \rightsquigarrow N_2$ ist, dann gibt es einen λ-Term N_3, sodass $N_1 \rightsquigarrow N_3$ und $N_2 \rightsquigarrow N_3$ gilt.

   [**Hinweis:** Nehmen Sie zunächst an, dass M auf N_1 unter Verwendung genau einer β-Reduktion reduziert.]
2. Es sei $\cong$ die minimale Äquivalenzrelation auf λ-Termen, sodass aus $M \rightsquigarrow N$ bereits $M \cong N$ folgt. Dann folgt aus $M \cong N$, dass es einen λ-Term L gibt mit $M \rightsquigarrow L$ und $N \rightsquigarrow L$.
3. Wenn N_1, N_2 reduziert sind mit $M \rightsquigarrow N_1$ und $M \rightsquigarrow N_2$, dann α-reduziert N_1 auf N_2.

Bitte wenden!

Definitionen für Aufgabe 4

Eine Funktion $f : \mathbb{N}^p \to \mathbb{N}$ mit $p \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ heißt *p-stellige numerische Funktion*.

Die Menge $\mathcal{P}$ der *primitiv-rekursiven* Funktionen ist die kleinste Menge $\mathcal{A}$ von (beliebig-stelligen) numerischen Funktionen, die die folgenden Eigenschaften erfüllt:

(a) Für jede Funktion von der Form $U_i^p : \mathbb{N}^p \to \mathbb{N}, (n_1, \ldots, n_p) \mapsto n_i$ mit $i, p \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ und $i < p$ ist $U_i^p \in \mathcal{A}$.

(b) Für die Funktionen $s : \mathbb{N} \to \mathbb{N}, n \mapsto n + 1$ und $N : \mathbb{N} \to \mathbb{N}, n \mapsto 0$ ist $s, N \in \mathcal{A}$.

(c) $\mathcal{A}$ ist abgeschlossen unter Komposition: Wenn $f_1, \ldots, f_m \in \mathcal{A}$ p-stellige Funktionen sind und $g \in \mathcal{A}$ eine m-stellige Funktion, so gilt für die p-stellige numerische Funktion h mit $h(\vec{n}) = g(f_1(\vec{n}), \ldots, f_m(\vec{n}))$ für alle $\vec{n} \in \mathbb{N}^p$, dass $h \in \mathcal{A}$.

(d) $\mathcal{A}$ ist abgeschlossen unter primitiver Rekursion: Wenn $f \in \mathcal{A}$ eine p-stellige numerische Funktion ist und $g \in \mathcal{A}$ eine $p + 2$-stellige numerische Funktion, dann ist für die $p + 1$-stellige numerische Funktion h mit $h(0, \vec{n}) = f(\vec{n})$ und $h(k+1, \vec{n}) = g(h(k, \vec{n}), k, \vec{n})$ für alle $k \in \mathbb{N}$ und $\vec{n} \in \mathbb{N}^p$ bereits $h \in \mathcal{A}$.

Die Menge $\mathcal{B}$ der *berechenbaren* Funktionen ist die kleinste Menge $\mathcal{A}$ numerischer Funktionen, die die obigen Eigenschaften (a) bis (d) erfüllt und zusätzlich noch die folgende Eigenschaft:

(e) $\mathcal{A}$ ist abgeschlossen unter Minimierung: Sei $f \in \mathcal{A}$ eine $p + 1$-stellige Funktion mit der Eigenschaft, dass es für jedes $\vec{n} \in \mathbb{N}^p$ ein $m \in \mathbb{N}$ gibt, sodass $f(\vec{n}, m) = 0$ ist. Dann gilt für die p-stellige numerische Funktion h mit $h(\vec{n}) = \mu m\,[f(\vec{n}, m)]$ für $\vec{n} \in \mathbb{N}$, dass $h \in \mathcal{A}$.

Die Ackermann-Funktion A ist die binäre numerische Funktion, die für $n, m \in \mathbb{N}$ definiert ist durch:

$$\begin{aligned} A(0, n) &= n + 1, \\ A(m + 1, 0) &= A(m, 1) \\ A(m + 1, n + 1) &= A(m, A(m + 1, n)). \end{aligned}$$

Bitte zweites Blatt beachten!

Aufgabe 4 (λ-Kalkül und Berechenbarkeit) – 4P. + 4 Bonus-P.

1. Zeigen Sie, dass es jede primitiv-rekursive Funktion einen λ-Term implementiert.

2. (Bonus) Zeigen Sie, dass die Ackermann-Funktion nicht primitiv-rekursiv ist.

   [**Hinweis:** Zeigen Sie zunächst, dass es für jedes $f \in \mathcal{P}$ ein $k \in \mathbb{N}$ gibt, sodass für alle $n \geq k$ gilt, dass $\max\{g(n_1, \ldots, n_k) \mid \sum_{i=1}^{k} n_i \leq n\} < A(k, n)$ ist.]

3. Zeigen Sie, dass die Ackermann-Funktion berechenbar ist. Folgern Sie hieraus, dass $\mathcal{P} \subsetneq \mathcal{B}$.

4. (2P.) Zeigen Sie, dass jede berechenbare Funktion einen λ-Term implementiert.

5. (Bonus) Zeigen Sie, dass jede Funktion, die einen λ-Term implementiert bereits berechenbar ist.

   [**Achtung:** Diese Aufgabe können Sie vermutlich nicht ohne Vorwissen aus der Berechenbarkeitstheorie lösen.]