Test

Videos 'Graph Minors' by Jim Geelen

Papers: 'A new proof of the flat wall theorem' by Paul Wollan

'A generalisation of the Grid Theorem' by Geelen + Joeris.

Kapitel 1: Einleitung zum Struktursatz

1.1 Die Aussage

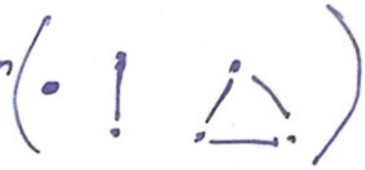
Definition 1.1.1.: Sei G ein Graph. Ein IG ist ein Graph, der aus einer Familie $(B_g : g \in V(G))$ von zusammenhängenden Teilgraphen besteht, sodass es genau dann eine Kante zwischen B_g und $B_{g'}$ gibt, wenn es in G eine Kante von g nach g' in G gibt. Die B_g heißen Verzweigungsmengen. Ein G-Minor in H ist ein IG, der Teilgraph von H ist. G ist Minor von H, falls H einen G-Minor hat.

Leitfrage: Wie sehen ~~g~~Graphen ohne K^t-Minor aus?

$t=1$: Leer.

$t=2$: G besteht aus isolierten Ecken.

$t=3$: Bäume, Wälder

$t=4$: ~~≤ 2-Summen von~~ ≤ 2-Sum 

Jeder Block ist Series-Parallel.

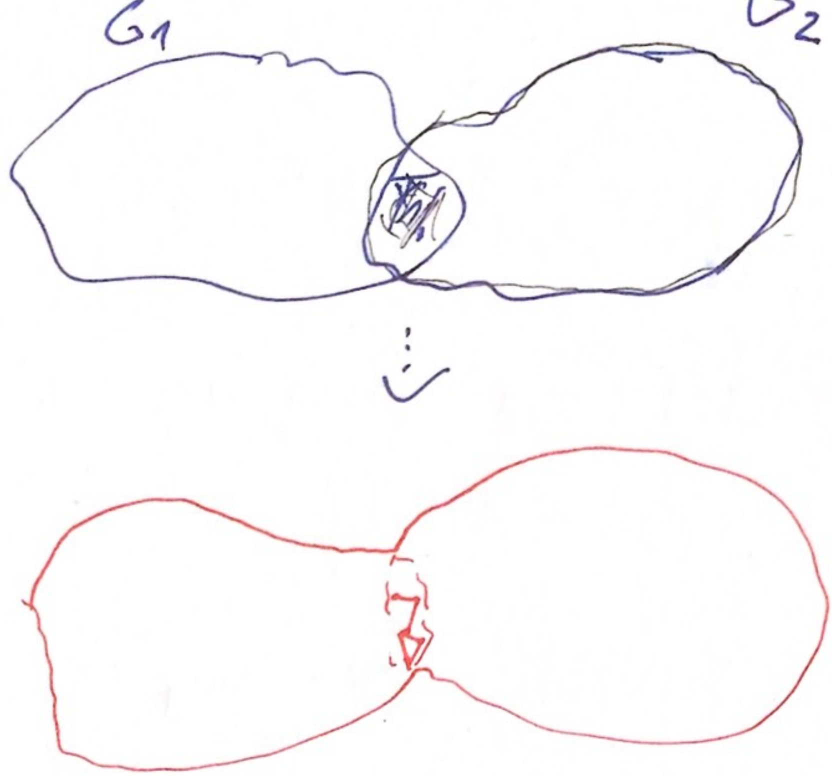
≤ 1-Sum (Series-~~Paral~~ Parallel)

Baumweite ≤ 2

Definition 1.1.2: Für Graphen G_1, G_2 ist der Graph G eine k-Summe von G_1 und G_2 falls:

- $\rightarrow$ $|V(G_1) \cap V(G_2)| = k$.
- $\rightarrow$ $V(G_1) \cap V(G_2)$ ist vollständig in G_1, G_2
- $\rightarrow$ $V(G) = V(G_1) \cup V(G_2)$
- $\rightarrow$ $E(G) \supseteq E(G_1) \cup E(G_2) \setminus E(G_1 \cap G_2)$
- $\rightarrow$ $E(G) \subseteq E(G_1) \cup E(G_2)$

G ist eine $\leq k$-Summe von G_1 und G_2 falls er eine l-Summe ist mit $l \leq k$. Für $\mathcal{G}$ eine Klasse von Graphen ist $\leq k$-Sum$(\mathcal{G})$ die Klasse von Graphen, die man aus Graphen von $\mathcal{G}$ mit $\leq k$-Summen bauen kann.



Series-Parallel:

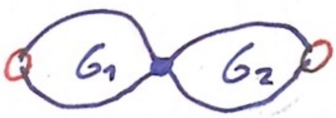
 ist series-Parallel.

Für 

und 

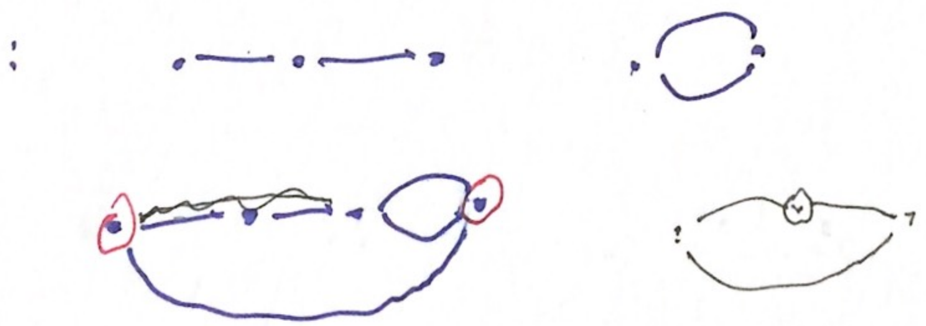
series-Parallel:

sind



und

Z.B:



Ein Graph G ist auch genau dann Series-Parallel, wenn wir von G auf $\bullet\!\!-\!\!\bullet$ kommen können durch eine Folge von Operationen der folgenden Typen:

- → Entfernen von Unterteilungsecken
- → Kollabieren von parallelen Kanten.

<u>Definition 1.1.3</u>: Eine <u>Baumzerlegung</u> eines Graphen G besteht aus einem Baum T und eine Familie $\mathcal{V} = (V_t)_{t \in V(T)}$ von <u>Teilen</u>, sodass:

- → Jede Ecke in einem Teil vorkommt
- → Jede Kante in einem $G[V_t]$ vorkommt
- → Falls $v \in V_t \cap V_{t'}$ und t'' auf tTt', so gilt $v \in V_{t''}$

Die <u>Weite</u> von $(T, \mathcal{V})$ ist $\max_{t \in V(T)} (|V_t| - 1)$

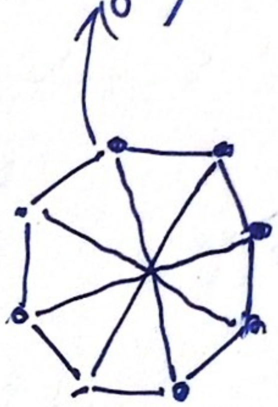
Die <u>Baumweite</u> von G ist die minimale Weite einer Baumzerlegung. Für $t \in V(T)$ ist der <u>Torso</u> an t der Graph auf V_t, deren Kanten die Kanten von $G[V_t]$ sind, zusammen mit allen vw, sodass es $t' \neq t$ gibt mit $v, w \in V_t \cap V_{t'}$. Die <u>Adhäsionsmenge</u> $V_{tt'}$ für eine Kante tt' von T ist $V_t \cap V_{t'}$. Die <u>Adhäsion</u> von $(T, \mathcal{V})$ ist die Maximale Größe einer Adhäsionsmenge.

Satz 1.1.4: $\leq k\text{-sum}(\mathcal{G})$ ist die Klasse von Graphen, die eine Baumzerlegung besitzen von Adhäsion $\leq k$, sodass alle Torsos in $\mathcal{G}$ liegen.

Beweis: Übung.

Satz ~~Wagner~~ 1.1.5 (Wagner): Die Klasse von Graphen ohne K^5-Minor ist

$$\leq 3\text{-sum}\left(\text{Planar} + V_8\right)$$



Definition 1.1.6: $\leq k\text{-apex}(\mathcal{G})$ ist die Klasse von Graphen G, sodass es $X \subseteq V(G)$ mit $|X| \leq k$, sodass $G \setminus X \in \mathcal{G}$

Vermutung 1.1.7 (Jorgensen) Jeder 6-zusammenhängende Graph ohne K^6-Minor liegt in $1\text{-apex}(\text{Planar})$

Definition 1.1.8: Das $k \times k$ Gitter ist der Graph mit Eckenmenge $[k]^2$ und eine Kante von (i,j) nach (i',j') genau dann, wenn $|i-i'|+|j-j'|=1$.

Satz 1.1.9. (Der Gittersatz): Zu jedem $k \in \mathbb{N}$ gibt es ein $f(k) \in \mathbb{N}$, sodass jeder Graph ohne $k \times k$-Gitter als Minor Baumweite $\leq f(k)$ hat (in $f(k)$-Sum(Größe $\leq f(k)+1$) liegt).

Satz 1.1.10 (Erdös-Posa): Zu jedem $k \in \mathbb{N}$ gibt es ein $f(k) \in \mathbb{N}$, sodass jeder Graph ohne $k \cdot \triangle$-Minor in $\leq f(k)$-apex (≤ 1-Sum ($\bullet$, $\bullet\!-\!\bullet$))

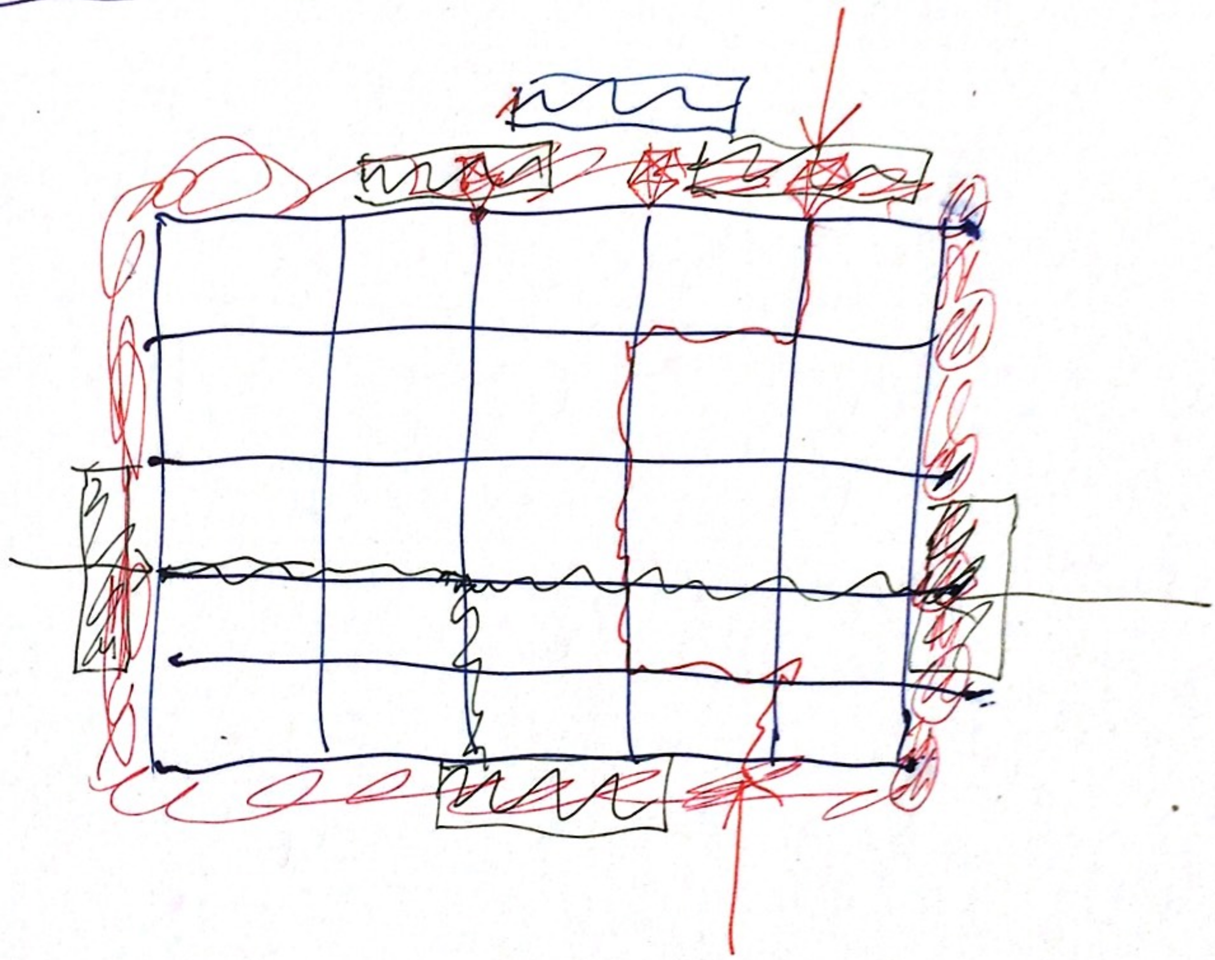
Lemma 1.1.11: Sei $\mathcal{G}$ eine Klasse von Graphen ohne K^t-Minor und $k \in \mathbb{N}$. Dann hat kein Graph in $\leq k$-Sum($\mathcal{G}$) ein K^t-Minor.

Beweis: Übung.

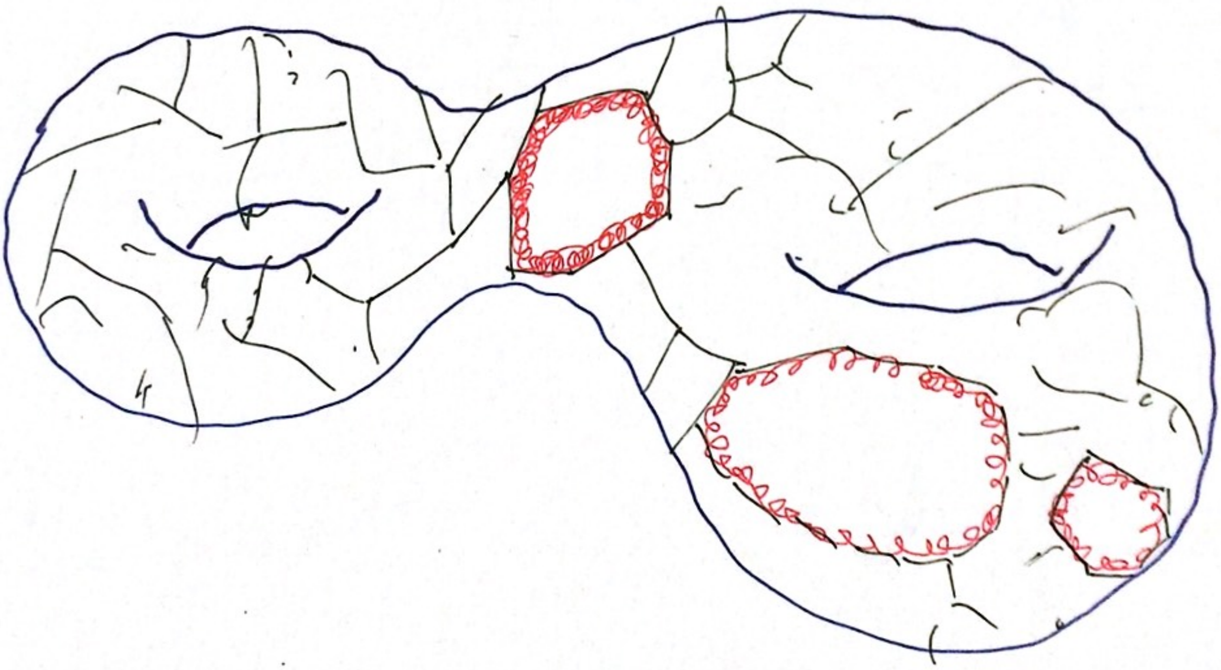
Lemma 1.1.12: Sei $\mathcal{G}$ eine Klasse von Graphen ohne K^t-Minor und $k \in \mathbb{N}$. Dann hat kein Graph in $\leq k$-apex($\mathcal{G}$) ein K^{t+k}-Minor.

Beweis: Angenommen schon, und sei $G \in \leq k\text{-apex}(\mathcal{G})$ mit einem IK^{t+k}-Teilgraph. Sei $X \subseteq V(G)$ mit $|X| \leq k$ und $G \setminus X \in \mathcal{G}$. Wenn wir alle Verzweigungsmengen aus dem IK^{t+k} löschen, die X treffen, kriegen wir ein $IK^{t'}$ mit $t' \geq t$. $\#$ $\square$

Tatsache 1.1.13: Für jede Fläche S gibt es ein t, sodass K^t nicht in S einbettbar ist.



Definition 1.1.14: Sei $C = v_1 \dots v_k$ ein Kreis in einem Graphen G. Wir sagen, dass H durch Einfügen eines Wirbels der Tiefe d aus G gebaut wird, wenn H aus G besteht, zusammen mit, ~~...~~ für $1 \le i \le k$ und $2 \le j \le d$, eine neue Ecke v_i^j (wir setzen $v_i^1 := v_i$), und Kanten zwischen allen v_i^j und allen anderen $v_{i'}^{j'}$ mit $|i-i'| \le 1 \pmod k$)



~~Sei $\mathcal{G}$ die Klasse von Minoren von Graphen~~

Definition 1.1.15 Sei S eine Fläche. Ein Graph G ist bis auf n Wirbeln der Tiefe d in S einbettbar, wenn es ein G' gibt, der in S einbettbar ist, sodass man G aus G' durch Einfügen von $\leq n$ Wirbeln der Tiefe $\leq d$ entlang disjunkten Gebietumrandenden Kreisen von G' bauen kann.

Sei $\mathcal{G}_n$ die Klasse von Minoren von Graphen, die in Flächen von Genus $\leq n$ bis auf n Wirbeln der Tiefe n einbettbar sind.

Satz 1.1.16 (Der Struktursatz: Robertson + Seymour)

Zu jedem $t \in \mathbb{N}$ gibt es ein $f(t) \in \mathbb{N}$, sodass jeder Graph ohne K^t-Minor in

$$\leq f(t)\text{-sum}\left(\leq f(t)\text{-apex}\left(\mathcal{G}_{f(t)}\right)\right)$$

liegt.

1.2 Anwendungen

Definition 1.2.1: Eine *Präordnung* auf einer Menge X ist eine reflexive, transitive Relation auf X.

Eine Präordnung $\leq$ auf X ist eine *Wohlquasiordnung* (oder wqo), falls es keine unendliche Folge $(x_1, x_2, \ldots)$ in X gibt mit $x_i \not\leq x_j$ für $i < j$.

Tatsache 1.2.2.: Sei $\preceq$ eine w.q.o auf X. Für jede nach unten abgeschlossene Teilmenge Y von X gibt es eine endliche Folge $x_1 \ldots x_k$ in X mit $Y = \{ x \in X \mid (\nexists i \leq k)\, x_i \preceq x \}$

Satz 1.2.3 (Der Minorensatz: Robertson ~~+~~ Seymour)

Endliche Graphen sind bezüglich der Minorenrelation wohlquasigeordnet.

Korollar 1.2.4: Es gibt nur abzählbar viele ~~Klassen~~ von endlichen Graphen, die unter Minoren abgeschlossen sind.

Satz 1.2.5 (Minorenprüfungssatz; Robertson + Seymour):

Zu jedem Graphen H gibt es ein $O(n^3)$-Algorithmus, womit man erkennen kann, ob ein Graph G einen H-Minor hat.

Korollar 1.2.6 (Der Zugehörigkeitsprüfungssatz; Robertson + Seymour)

Zu jedem unter Minoren abgeschlossenen Klasse $\mathcal{G}$ von Graphen gibt es ein $O(n^3)$-Algorithmus, womit man erkennen kann, ob ein Graph G in $\mathcal{G}$ liegt.

Probleme: Die ~~Beschränkung~~ Laufzeit des Algorithmus ist von der Klasse von ausgeschlossenen Minoren abhängig. Diese Klasse kann:

→ sehr groß sein. z.B. für ≤1-apex (Planar) hat die Klasse mehr als 1000 Elemente (und ist unbekannt)

→ Unbekannt sein.

<u>Beispiel 1.2.7</u>: Ein Graph G heißt <u>knotenfrei einbettbar</u>, falls es eine Einbettung von G in $\mathbb{R}^3$ gibt, sodass kein Kreis von G ein geknotetes Bild hat. Wir haben keine Ahnung, wie viele ausgeschlossene Minoren es gibt.