Wichtige Sätze und Definitionen zu
§1: Relationen und Halbgruppen
aus der Vorlesung:

LV-NR	150 239
Veranstaltung	Diskrete Mathematik II, 4.0 std
Dozent	Holtkamp, R.
	mit Dank an Herrn T. Doliwa
	für die Unterstützung

Es sei $[n]$ stets die Menge $\{1,\ldots,n\}$ und $\mathrm{Abb}\,(X,Y)$ die Menge aller Abbildungen von $X \to Y$.

1.1
Es seien A und B Mengen und $A \times B$ ihr kartesiches Produk ($A \times B := \{(a,b) \mid a \in A, b \in B\}$).

a) *Die* **Potenzmenge** *$Pot\,(A)$ ist die Menge aller Teilmengen von A.*

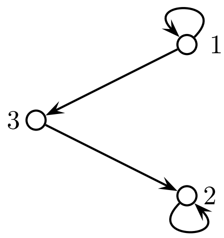
b) *Eine* **Relation zwischen** *A* **und** *B ist ein Element $R \in Pot\,(A \times B)$, d.h eine Teilmenge $R \subseteq A \times B$.*

c) *Ist $A = B$, so spricht man von einer (binären)* **Relation auf** *A.*

d) *Allgemeiner ist für $n \in \mathbb{N}$ eine n-äre Relation eine Teilmenge von $\underbrace{A \times \ldots \times A}_{n\text{-mal}} := A \times \underbrace{(A \times \ldots \times A)}_{n-1\text{-mal}}$.*

e) *Ist $(a,b) \in R$, so sagt man, a steht mit b in Relation (Schreibweise: aRb).*

Beispiel
Abbildungen zwischen zwei Mengen, gerichtete Graphen
$R = \{(1,1), (2,2), (1,3), (3,2)\}$:



Satz 1 (Anzahl von Relationen)
Bezeichnet $Rel\,(A)$ die Menge aller Relationen auf A und $Rel_r\,(A)$ die Menge aller Relationen auf A mit genau r Elementen (Pfeilen), so ist

$$\#Rel_r\,(A) = \binom{n^2}{r}$$

und

$$\#Rel\,(A) = \sum_{r=0}^{n} \binom{n^2}{r} = 2^{\,n^2}$$

1.2

a) $\mathrm{Def}\,(R) := \{a \in A \mid \exists\ \ b \in A \ \mathit{mit}\ \ (a,b) \in R\}$
$\mathrm{Bild}\,(R) := \{b \in A \mid \exists\ \ a \in A \ \mathit{mit}\ \ (a,b) \in R\}$

b) *R heißt* **injektiv** $:\Longleftrightarrow$ *für jedes $b \in \mathrm{Bild}(R)$ ist $\#\{a \in \mathrm{Def}(R) \mid (a,b) \in R\} = 1$*

c) es sei $R^{inv} \subseteq A \times A$ die Relation $\{(b,a) \in A \times A \mid (a,b) \in R\}$

1.3

Es sei H Menge, $\circ \in \mathrm{Abb}(H \times H, H)$. Man sagt $\circ$ ist eine **binäre Verknüpfung** *auf H und schreibt $(a \circ b) \circ c$ usw. statt $\circ(\circ(a,b), c)$. H zusammen mit $\circ$ heißt* **Halbgruppe** $:\Longleftrightarrow$ *$\circ$ ist* **assoziativ**, *d.h. $(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)\ \forall\ a,b,c \in H$.*
$e \in H$ heißt **neutrales Element** *der Halbgruppe $(H, \circ) \Longleftrightarrow e \circ a = a$ und $a \circ e = a\ \forall\ a \in H$.*
Eine Halbgruppe mit neutralem Element heißt auch **Monoid**.
Konvention: Ist $\circ$ kommutativ, d.h. $a \circ b = b \circ a\ \forall\ a,b \in H$, so schreibt man oft $+$ oder $\cdot$ statt $\circ$, auch bezeichnet man neutrale Elemente mit 0 (bei additiver Verknüpfung) bzw. 1 (bei multiplikativer Verknüpfung).

Satz 2 (Komposition von Relationen)
Für R, S auf A sei $S \circ R$ die Relation

$$\{(a,c) \in A \times A \mid \exists\ b \in A \text{ mit } (a,b) \in R \text{und } (b,c) \in S\}$$

Dann ist die Menge $Rel(A)$ aller Relationen zusammen mit $\circ$ eine Halbgruppe.
$Rel(A)$ zusammen mit der Komposition bildet (sogar) ein Monoid. Das neutrale Element ist

$$\mathrm{Id}_A := \{(a,a) \mid a \in A\}$$

1.4

H sei Halbgruppe und $a \in H$.

a) Man definiert (rekursiv) die **n-te Potenz** *von a:*

$$a^n := \begin{cases} a^0 = 1 & : \textit{falls } H \textit{ Monoid} \\ a & : n = 1 \\ a \circ a^{n-1} & : n \geq 2 \end{cases}$$

b) Ist $(H, +)$ additiv geschriebene Halbgruppe, $a \in H$, $n \geq 1$, so definiert man

$$n \cdot a := \begin{cases} a & : n = 1 \\ a + (n-1) \cdot a & : n \geq 2 \end{cases}$$

c) Für $m \geq 2$ heißt eine Relation Z auf A **Zykel der Länge m** $\Longleftrightarrow$ *es existieren $a_1, \ldots, a_m \in A$, paarweise verschieden, mit $Z = \{(a_1, a_2), (a_2, a_3), \ldots, (a_{m-1}, a_m), (a_m, a_1)\}$.*

1.5

Ist $(H, \circ)$ Halbgruppe, so heißt eine Teilmenge U von H zusammmen mit (der Einschränkung von) $\circ$ auf U eine **Unterhalbgruppe**, *wenn gilt:*

$$a,b \in U \quad \Longrightarrow \quad a \circ b \in U \qquad \textit{(Abgeschlossenheit)}$$

Eine Unterhalbgruppe U heißt **Untermonoid**, *wenn $e \in U$.*

Satz 3 (Monoid der Abbildungen)
Die Menge $\mathrm{Abb}(A, A)$ der Abbildungen $A \to A$ bildet zusammen mit der Komposition ein Monoid, das als Untermonoid von $(Rel(A), \circ)$ aufgefasst werden kann.

Des Weiteren gilt: Ist eine Relation F auf A, $X := \mathrm{Def}(F), Y := \mathrm{Bild}(F)$, und ist F injektive Abbildung $X \to Y$, so ist

$$F^{inv} \circ F = \mathrm{Id}_X, \quad F \circ F^{inv} = \mathrm{Id}_Y \text{ und } \#X = \#Y$$

1.6
Sei $R \in Rel(A)$, $B \subseteq A$, $B^c := A - B$

a) Die **Einschränkung** *$R\big|B$ von R auf B ist die Relation $\{(a,b) \in R \mid a,b \in B\}$ auf B. (Teilrelation von R)*

b) R heißt **zusammenhängend** *$:\Longleftrightarrow$ wenn $R = R\big|B \cup R\big|B^c$, so muss $R\big|B$ oder $R\big|B^c$ leer sein.*

c) die bezüglich $\subseteq$ maximalen zusammenhängenden Teilrelationen von R heißen **Zusammenhangskomponenten***.*

Beispiel
(Vereingungen von Zykeln und ähnliches)

1.7
Es sei $R \in Rel(A)$. Die Relation R heißt

a) reflexiv $\Longleftrightarrow \mathrm{Id}_A \subset R$ (d.h. $\forall\ a \in A:\ (a,a) \in R$)

b) transitiv $\Longleftrightarrow R \circ R \subseteq R$ (d.h. mit $(a,b) \in R$ und $(b,c) \in R$ ist auch $(a,c) \in R$)

c) Quasiordnung $\Longleftrightarrow R$ ist reflexiv und transitiv

d) symmetrisch $\Longleftrightarrow R = R^{inv}$ (d.h. mit $(a,b) \in R$ ist auch $(b,a) \in R$)

e) antisymmetrisch $\Longleftrightarrow R \cap R^{inv} \subseteq \mathrm{Id}_A$ (d.h. ist $(a,b) \in R$ und $(b,a) \in R$, so $a = b$)

f) Äquivalenzrelation $\Longleftrightarrow R$ ist reflexiv, transitiv und symmetrisch

g) partielle Ordnung $\Longleftrightarrow R$ ist reflexiv, transitiv und antisymmetrisch (bez. oft mit $\leq$ statt R)

h) totale partielle Ordnung $\Longleftrightarrow R$ ist partielle Ordnung und $\forall\ a,b \in A : (a,b) \in R \wedge (b,a) \in R$

Beispiele

- $(\mathbb{N}_0, +)$
- $(\mathbb{N}_0, \cdot)$
- $(\mathbb{N}_0, \max)$
- $(\mathbb{N}_0, \min)$
- $(H, \circ_H) \rightsquigarrow (H^n, \circ_H)$
- $(\mathbb{N}^n, +)$
- $(\mathrm{Pot}(\mathbb{N}), \cup)$
- $(\mathrm{Pot}(\mathbb{N}), \cap)$

Satz 4 (Zerlegung in Zusammenhangskomponenten)
Es sei $R \in Rel\,(A)$.

(i) R sei Abbildung, A sei endliche Menge und R sei injektiv (also bijektiv).
Dann ist jede Zusammenhangskomponente Z von R ein Zykel und R ist disjunkte Vereinigung $R = Z_1 \dot\cup \ldots \dot\cup Z_r$ von Zykeln $Z_1, \ldots, Z_r$.
(Zykelzerlegung der Permutation R)

(ii) R sei Äquivalenzrelation. Dann gilt für jede Zusammenhangskomponente Z von R:

$$\mathrm{Def}(Z) = \mathrm{Bild}(Z) \text{ und } Z = \mathrm{Def}(Z) \times \mathrm{Def}(Z).$$

Weiterhin gilt: A ist disjunkte Vereinigung (nichtleerer) Teilmengen $A_i, i \in I$, so dass

$$R = \bigcup_{i \in I} Z_i \text{ mit } Z_i := A_i \times A_i.$$

Die in Satz 4(ii) gegebenen Mengen $A_i, i \in I$, heißen **Äquivalenzklassen** (bzgl. R) und die Menge aller Äquivalenzklassen wird mit A/R bezeichnet. (Alternativ schreibt man statt R oft $\sim$ und dann statt A/R auch $A/\sim$)

Aufgabe

Es sei R die Relation auf [4], die (als gerichteter Graph) gegeben ist durch:

Wie sieht die Folge $R, R^2, R^3, R^4, R^5 \ldots$ der Potenzen von R aus?
Zunächst: $S := R^2 = R \circ R$ ist gegeben durch

Dann: $T := R^3 = R \circ R^2$ ist gegeben durch

Es ist leicht zu sehen, dass die Folge der Potenzen gegeben ist durch $R, S, T, S, T, \ldots$, wobei sich S, T immer wiederholen.
Insbesondere bilden R, S und T eine 3-elementige Unterhalbgruppe von $(Rel\,([4])\,, \circ)$.