Lineare Darstellungen von Symmetrischen Gruppen

150 232 (Holtkamp) 2st., Mi 12.00-14.00, NA 2/24

Voraussetzungen:
Die Vorlesung wendet sich an Studierende im Hauptstudium
(wirklich erforderlich sind nur Lineare Algebra I und II).

Themen:
Wörter und Permutationen, Lineare Darstellungen, Charaktere,
Young-Tableaux, Robinson-Schensted-Knuth Algorithmus,
Komultiplikationen und die Hopfalgebra der Permutationen, Haken-Formel,
Littlewood-Richardson Regel, Satz von Murnaghan-Nakayama,
(Nichtkommutative) Symmetrische Funktionen, ...

G. FROBENIUS (etwa ab 1880),
A. YOUNG (Konstruktion der irreduziblen Darstellungen S_n bis 20er Jahre)

Literatur

[BS] *D.Blessenohl - M.Schocker: Noncommutative Character Theory of Symmetric Groups (Lecture Notes, http://www.lacim.uqam.ca/ mschock/).*

[JK] *G.James - A.Kerber: The Representation Theory of the Symmetric Group (Addison-Wesley).*

[S] *B.E.Sagan: The Symmetric Group (Wadsworth).*

1 Permutationen und Wörter

Sei $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, ...\}$ die Menge der natürlichen Zahlen und $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$. Sei $\underline{n} = \{1, 2, ..., n\}$.

Definition. *Sei X Menge und $\alpha : X \to X$ Abbildung. Falls α bijektiv, so heißt α* **Permutation** *von X.*

Definition.
Eine Menge G zusammen mit einer assoziativen Verknüpfung $\cdot : G \times G \to G$ und Einselement $1_G \in G$ (mit $1_G \cdot g = g = g \cdot 1_G$ für alle $g \in G$) heißt **Monoid**.
Existiert zusätzlich zu jedem $g \in G$ ein Inverses g' (mit $g' \cdot g = 1_G = g \cdot g'$), so heißt G **Gruppe**.
Für Homomorphismen $f : G \to H$ fordert man $f(g_1 \cdot_G g_2) = f(g_1) \cdot_H f(g_2)$, $f(1_G) = 1_H$.
Eine **Operation (von links)** *einer Gruppe G auf einer Menge X ist eine Abbildung $* : G \times X \to X$ mit $1_G * x = x$ für alle $x \in X$ und $(g_1 g_2) * x = g_1 * (g_2 * x)$.*

Beispiel 1. *Freies Monoid über Alphabet X:*
Elemente sind Wörter, z.B. babc, wenn $a, b, c \in X$. Verknüpfung ist Hintereinanderschreiben (Konkatenationsprodukt .): cb . ab = cbab. Das Einselement ist das leere Wort $\emptyset$.
(Achtung: speziell für $X = \mathbb{N}$ darf die Konkatenation nicht mit Zahlen-Multiplikation verwechselt werden!)

Es gilt:
Die Menge $S(X)$ aller Permutationen von X bildet bzgl. der Komposition von Abbildungen eine Gruppe. □

$S_n := S(\underline{n})$ heißt n-te symmetrische Gruppe.
Für $\pi, \sigma \in S_n$ ist $\pi\sigma$ die Abbildung

$$\begin{tikzcd} \underline{n} \arrow[r, "\sigma"'] \arrow[rr, bend left] & \underline{n} \arrow[r, "\pi"'] & \underline{n} \end{tikzcd}$$

Es gilt:
Die Gruppe S_n operiert auf $\underline{n}$ durch $(\sigma, i) \mapsto \sigma(i)$.

Sei $\mathbb{N}^k$ die Menge der Wörter $w = w_1...w_k$ der Länge k im freien Monoid über $\mathbb{N}$. Dann wird durch $(\sigma, w) \mapsto w_{\sigma(1)}...w_{\sigma(k)}$ eine Operation, genannt Polya-Aktion, von S_k auf $\mathbb{N}^k$ definiert.

Ist $k = 3$, $\sigma : 1 \mapsto 3, 2 \mapsto 2, 3 \mapsto 1$, $w = 2.7.5$, so ist $\sigma * w = 5.7.2$.

Matrix-Schreibweise:
man schreibt $\pi \in S_n$ als zweizeilige Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & ... & n \\ \pi(1) & \pi(2) & ... & \pi(n) \end{pmatrix}$$

Bsp: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 2 & 4 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} = \mathrm{id}_5.$
(Achtung: Hier rechnen wir "von rechts nach links",
meist wird anders als bei Abbildungen von links nach rechts gerechnet!)

Wort-Schreibweise:
wie oben, aber man notiert
nur die untere Zeile, d.h. ein Wort über dem Alphabet $\underline{n}$ mit der Eigenschaft, dass jeder Buchstabe mit Multiplizität 1 (d.h. genau einmal) vorkommt.
Bsp: 23145.
(Achtung: Verknüpfung ist nicht die des freien Monoids!)

Zykel-Schreibweise:
Ein Zykel $(i_1, ..., i_r)$ der Länge r ist ein r-Tupel von paarweise verschiedenen Zahlen aus $\underline{n}$ und wird aufgefasst als Permutation $i_1 \mapsto i_2 \mapsto ... \mapsto i_r \mapsto i_1$.
Jedes $\pi \in S_n$ lässt sich als Produkt von (disjunkten) Zykeln schreiben:
wähle $i \in \underline{n}$. Man notiert den Zykel $(i, \pi(i), \pi^2(i), ..., \pi^p(i))$, dabei ist p die kleineste Zahl ≥ 0 mit $\pi^{p+1}(i) = i$. Anschließend wählt man ein neues i, das in keinem bisherigen Zykel vorkam,... usw.
Die Bezeichnung jedes einzelnen Zykels ist eindeutig bis auf zyklische Permutation: $(1,2,3) = (2,3,1) = (3,1,2)$. Das Produkt von (disjunkten) Zykeln ist unabhängig von der Reihenfolge der Zykel: $(2,4,3)(1,5) = (1,5)(2,4,3)$.

Beispiel 2. $S_1 = \{\mathrm{id}\}$ = *Gruppe, die nur aus dem Einslement besteht.*
$S_2 = \{\mathrm{id}, (1,2)\} = \mathbb{Z}_2$ *(multiplikativ geschrieben:* $(\{\pm 1\}, \cdot)$*).*
$S_3 = \{\mathrm{id}, (1,2), (1,3), (2,3), (1,2,3), (1,3,2)\}$.
S_3 *ist nicht kommutativ: Der Zentralisator* Z_π *von* $\pi = (1,2)$*, d.h. die Menge* $\{\sigma : \sigma\pi = \pi\sigma\}$ *ist* $\{\mathrm{id}, (1,2)\}$.

Übung:
$|S_n| = n!$ (Induktion über n, n Möglichkeiten für Bild von n).

S_n wird erzeugt von den Transpositionen $(i, i+1)$, $i = 1, ..., n-1$ (d.h. jede Permutation lässt sich als Produkt von solchen Transpositionen schreiben; per Induktion über Zykel-Länge).

Es gibt einen wohldefinierten Gruppenhomomorphismus

$$\mathrm{sgn}: S_n \to (\{1, -1\}, \cdot), \text{ mit } \pi \mapsto (-1)^k,$$

wenn $\pi = \tau_1 \cdot ... \cdot \tau_k$ als Produkt von Transpositionen.

(äquivalent $\pi \mapsto (-1)$ hoch Anzahl der
Inversionen (i, j): $1 \leq i < j < n, \pi(i) > \pi(j)$.)

Definition.
Eine **Komposition** *(oder* **Zerlegung***) von $n \in \mathbb{N}_0$ ist ein Tupel
$\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_l) =: \lambda_1.\lambda_2....\lambda_l$ (als Wort), $\lambda_i \in \mathbb{N}$, mit $|\lambda| := \lambda_1 + ... + \lambda_l = n$.
Bez: $\lambda \models n$.*

Gilt zusätzlich $\lambda_1 \geq ... \geq \lambda_l$, so heißt λ **Partition** *von n, in Zeichen $\lambda \vdash n$.*

Bsp: Es gibt drei Partitionen von 3, und zwar 1.1.1, 2.1 und 3, d.h. drei (nicht nur bzgl. Reihenfolge verschiedene) Möglichkeiten, 3 als Summe zu schreiben.

Definition. *Sei $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2 ..., \lambda_l) \vdash n$. Dann ist $S_\lambda := S(\{1, 2, ..., \lambda_1\} \times ... \times S(\{(n-\lambda_l)+1, ..., (n-\lambda_l)+\lambda_l\}$ Untergruppe von S_n (also bzgl. der Multiplikation und Inversion abgeschlossene Teilmenge),
heißt* **Young Untergruppe** *von S_n zur Partition λ.*

Bsp: $S_{(3,3,2,1)} = S(\{1, 2, 3\}) \times S(\{4, 5, 6\}) \times S(\{7, 8\}) \times S(\{9\})$
mit $(1, 4) \notin S_{(3,3,2,1)}$, aber z.B. $(1, 3, 2)(5, 6) \in S_{(3,3,2,1)}$.

Jeder Permutation π von n ist eine eindeutige Partition $\lambda = z(\pi)$ zugeordnet, der **Zykeltyp** (auch Zykel-Partition). Sind die Zykel in der Zykelschreibweise der Länge nach absteigend geordnet, gibt λ_1 die Länge des ersten Zykels, λ_2 die Länge des zweiten Zykels, usw., an.
Bsp:
$\pi = 23145 \mapsto_z \lambda = 3.1.1$
Man schreibt für den Zykeltyp 3.1.1 auch $(1^2, 3^1)$
bzw. allgemein $(1^{m_1}, 2^{m_2}, ...)$.
Es gilt $z(\pi) = z(\pi^{-1})$ für alle π.

Wiederholung/Bemerkung: $\pi \mapsto z(\pi)$ Zykeltyp von π ist Zahlen-Partition
$\pi = 23145 \mapsto_z \lambda = 3.1.1$
Man schreibt für den Zykeltyp 3.1.1 auch $(3^1, 1^2)$ oder sog. Ferrer-Diagramm
xxx
x
x
MAGMA-Befehl:
CycleStructure() gibt Partition in Multiplizitäten-Schreibweise.

Definition. *Sei G Gruppe und $\sigma \in G$.*
Die Abbildung $G \to G, \alpha \mapsto \sigma\alpha\sigma^{-1}$ heisst **Konjugation** *mit σ.*
Ein Gruppenelement τ ist **konjugiert** *zu α, bez. $\tau \approx \alpha$, wenn es ein Gruppenelement σ gibt mit $\tau = \sigma\alpha\sigma^{-1}$.*

Die Relation $\approx$ ist Äquivalenzrelation. Man erhält eine Mengenpartition der Gruppe in disjunkte Konjugationsklassen K.

Durch $(\sigma, \alpha) \mapsto \sigma * \alpha := \sigma\alpha\sigma^{-1}$ wird eine Operation(v.links) von G auf sich definiert: id operiert trivial und $(\sigma_1\sigma_2) * \alpha = \sigma\sigma_2\alpha\sigma_2^{-1}\sigma^{-1} = \sigma_1 * (\sigma_2 * \alpha)$.

Satz 1. *Gegeben sei $\pi \in S_n$.*
Ist $\pi = (i_1, ..., i_l) \cdot ... \cdot (i_m, i_{m+1}, ..., i_n)$ in Zykelschreibweise, so ist für jedes $\sigma \in S_n$:
$$\sigma\pi\sigma^{-1} = (\sigma i_1, ..., \sigma i_l) \cdot ... \cdot (\sigma i_m, \sigma i_{m+1}, ..., \sigma i_n).$$
Es gibt eine Bijektion zwischen den Partitionen von n und den Konjugationsklassen von S_n.

Beweis:
1) Wendet man die Abbildung $\sigma\pi\sigma^{-1}$ auf $\sigma(i_k)$ an, so erhält man $\sigma(\pi(i_k))$, d.h. σ angewandt auf den (zyklischen) Nachfolger von i_k. Dies ist der zyklische Nachfolger von $\sigma(i_k)$ auf der rechten Seite der Gleichung.
2) Somit erhält die Konjugation den Zykeltyp (insbesondere: Permutationen mit verschiedenem Zykeltyp können nicht konjugiert sein). Haben zwei Permuationen $\pi = (i_1, ..., i_l) \cdot ... \cdot (i_m, i_{m+1}, ..., i_n)$ und $\tau = (j_1, ..., j_l) \cdot ... \cdot (j_m, j_{m+1}, ..., j_n)$ den gleichen Zykeltyp, so lässt sich leicht eine Permutation σ angeben mit $\tau = (\sigma i_1, ..., \sigma i_l) \cdot ... \cdot (\sigma i_m, \sigma i_{m+1}, ..., \sigma i_n)$. Somit sind dann τ und π konjugiert. □

Für $\lambda \vdash n$, sei K_λ die zugehörige Konjugationsklasse und $k_\lambda = |K_\lambda|$ deren Mächtigkeit. Außerdem sei z_λ die Mächtigkeit des Zentralisators $\{\sigma : \sigma\pi\sigma^{-1} = \pi\}$, π vom Zykeltyp λ (unabhängig von der Wahl von π!).

Da die Elemente $\tau * \pi \in K_\lambda$ der Bahn von π bijektiv den Restklassen $\bar{\tau} = \tau Z_\pi$ bzgl. Z_π entsprechen, gilt $k_\lambda = [S_n : Z_\pi] = \frac{n!}{z_\lambda}$.

Satz 2. *Ist der Zykeltyp λ bestimmt durch $(1^{m_1}, 2^{m_2}, ..., n^{m_n})$, so gilt:*

$$k_\lambda = \frac{n!}{z_\lambda} = \frac{n!}{1^{m_1}m_1! \cdot 2^{m_2}m_2! \cdot ... \cdot n^{m_n}m_n!}$$

Beweis-Skizze:

Gesucht ist z_λ, d.h. die Anzahl der Permutationen σ mit $\sigma\pi\sigma^{-1} = \pi$, π vom Zykeltyp λ. Jedes solche σ darf die Zykel der Länge i untereinander permutieren oder eine zyklische Permutation innerhalb der Zykel vornehmen (s.o.). Es gibt $m_i!$ Möglichkeiten für die erste Operation und i^{m_i} Möglichkeiten für die letzte, woraus sich die gesuchte Zahl als $\prod_{i=1}^n i^{m_i}(m_i!)$ ergibt. □

Bsp: $n = 5$, $\lambda = 3.1.1$
$k_\lambda = \frac{5!}{1^2 2! \cdot 3 \cdot 1!} = 120/6 = 20.$

2 Darstellungen

Alle Vektorräume V seien $\mathbb{C}$-Vektorräume, endlich-dimensional (falls nichts anderes erwähnt). Die allgemeine lineare Gruppe $GL(V)$ der invertierbaren linearen Abbildungen von V wird gegeben durch die Gruppe GL_m der invertierbaren $m \times m$-Matrizen, wenn $\dim V = m$.

Definition. *Sei G Gruppe. Ein Vektorraum V zusammen mit einer Operation $G \times V \to V$ von G mit $g*(\lambda_1\mathbf{v_1}+\lambda_2\mathbf{v_2}) = \lambda_1(g*\mathbf{v_1})+\lambda_2(g*\mathbf{v_2})$ (für alle $g, \lambda_i, \mathbf{v_i}$) heißt G-***Modul**. Man sagt auch: Der Vektorraum V ist mit einer Darstellung von G versehen.*

Homomorphismen von G-Moduln V, V' sind lineare Abbildungen f mit $f(g * \mathbf{v}) = g *' f(\mathbf{v})$.

Eine **Matrix-Darstellung** *einer Gruppe G ist ein Gruppenhomomorphismus $d : G \to GL_m$. Dabei heißt m Dimension oder Grad der Darstellung.*

Es gilt:

Ist eine Matrixdarstellung d (mit Grad $\dim V$) gegeben, so definiert dies eine G-Modul-Operation $G \times V \to V$ durch $g * \mathbf{v} := d(g)\mathbf{v}$. (Man prüft leicht $(g_1g_2) * \mathbf{v} = g_1 * (g_2 * \mathbf{v})$ usw.)

Umgekehrt: Ist ein G-Modul V mit Vektorraum-Basis B gegeben, so erhält man durch $d(g)$:= Matrix der lineraren Abbildung $g* : V \to V$ eine Matrix-Darstellung.

[klar: Homomorphismen werden dann durch Matrizen T mit $Td(g) = d'(g)T$ beschrieben.]

Beispiel 3. *Triviale Darstellung (G beliebig):* $g \mapsto (1) \in GL_1$.

Sei G *zyklische Gruppe mit erzeugendem Element* a*, Ordnung* n*, d.h.* $G = \{1, a, a^2, a^3, ..., a^{n-1}\}$*. Eindimensionale Darstellungen gibt es dann genau* n *verschiedene, da* $d(a^n) = d(1_G) = (1)$ *sein muss, also* c *eine der* n*-ten Einheitswurzeln sein darf (z.B.* $1, i, -1, -i$ *für* $n = 4$*).*

Sgn-Darstellung: $sgn : S_n \to GL_1$.

(Definierende oder) Standard-Darstellung von S_n*: (Grad=* n*)*
Sei $d(\pi) = (\delta_{i,\pi(j)})$ *[Kronecker-Delta]*

also $d(\mathrm{id}) = 1_{n\times n}$, $d((1,2,3)) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$*, usw.*

Die gegebene S_n*-Modulstruktur auf dem Vektorraum* V *mit Basis* $\underline{n}$ *ist genau die lineare Fortsetzung der schon betracheten Operation von* S_n *auf* $\underline{n}$*.*

Es gilt:
Sei V ein G-Modul und W ein H-Modul. Dann ist das Tensorprodukt $V \otimes W$ ein $G \times H$-Modul mit $(g, h) * (\mathbf{v} \otimes \mathbf{w}) = (g\mathbf{v}) \otimes (h\mathbf{w})$ (linear fortgesetzt für alle Elemente von $V \otimes W$).

Sind d_G, d_H zugehörige Matrixdarstellungen bzgl. Basen $\mathbf{v_i}$ von V, $\mathbf{w_j}$ von W, so ist die Matrixdarstellung für den $G \times H$-Modul bzgl. der Basis $\mathbf{v_i} \otimes \mathbf{w_j}$ (also $\mathbf{v_1} \otimes \mathbf{w_1}, \mathbf{v_1} \otimes \mathbf{w_2}, ...$) die Tensorprodukt-Darstellung $d_G \otimes d_H : (g, h) \mapsto d_G(g) \otimes d_H(h)$, wobei das Tensorprodukt $X \otimes Y$ von Matrizen $X = (x_{ij}), Y = (y_{ij})$ gegeben ist durch die Blockmatrix $\begin{pmatrix} x_{11}Y & x_{22}Y & ... \\ x_{21}Y & ... & \\ ... & & \end{pmatrix}$

Definition.
Sei G *Gruppe. Sei* $\mathbb{C}[G]$ *der Vektorraum mit Basis* G *(d.h. für jedes* $g \in G$ *ein Basisvektor* $\mathbf{g}$*) und Operation* $G \times \mathbb{C}[G] \to \mathbb{C}[G]$ *gegeben durch* $g * \sum_i \lambda_i \mathbf{g_i} = \sum_i \lambda_i (g \cdot g_i)$ *[Produkt in G]. Dies definiert die* **Linksreguläre Darstellung** *von* G*.*

Man prüft dabei leicht nach, dass die Linksmultiplikation eine Operation von G ist; ebenso wie die Rechtsmultiplikation. Weiterhin ist durch lineare Fortsetzung eine Multiplikation $\mathbb{C}[G] \times \mathbb{C}[G] \to \mathbb{C}[G]$ erklärt, d.h. $\mathbb{C}[G]$ ist Algebra, genannt **Gruppenalgebra** von G.

Beispiel 4. *Linksreguläre Darstellung der zyklischen Gruppe* $Z_4 = \{1, a, a^2, a^3, \}$ *mit 4 Elementen. Es ist* $\mathbb{C}[Z_4] = \{c_1 1 + c_2 a + c_3 a^2 + c_4 a^3 : c_i \in \mathbb{C}\}$*. (Basis* $1, a, a^2, a^3$*).*

Zum Beispiel ist nun $d(a^2)$ gegeben durch die lineare Abbildung, die $1 \mapsto a^2 1 = a^2$, $a \mapsto a^2 a = a^3$, $a^2 \mapsto a^4 = 1$, $a^3 \mapsto a$ abbildet. Also $d(a^2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Man erhält (allgemein) durch die reguläre Darstellung eine Einbettung der Gruppe G in die symmetrische Gruppe von $|G|$ Elementen.

Bemerkung.

Die Gruppenalgebren vermitteln zwischen dem Begriff
Darstellung einer Gruppe und dem allgemeineren Begriff
der unitären Darstellung einer Algebra (s.u.).

Ist eine Gruppendarstellung $d : G \to GL_{\mathbb{C}}(V)$ gegeben, so erhält man durch lineares fortsetzen eine Darstellung der Algebra $\mathbb{C}[G]$. Umgekehrt erhält man die Gruppendarstellung zurück durch Beschränkung.

Definition. *Eine unitäre Darstellung einer Algebra A ist
ein Algebra-Homomorphismus $D : A \to End_{\mathbb{C}}(V)$ mit* $D(1) = \mathrm{id}_V$.
(Hiermit wird V zum A-Modul.)