Lineare Darstellungen von Symmetrischen Gruppen

150 232 (Holtkamp) 2st., Mi 12.00-14.00, NA 2/24

1

Beispiel 1. *Freies Monoid über Alphabet X*

Beispiel 2. $S_1, S_2, S_3, ...$

Satz 1. *(Bijektion zw. Partitionen von n und Konjugationsklassen von S_n)*

Satz 2. *($k_\lambda = ...$)*

2

Beispiel 3. *Triviale Darstellung, Sgn-Darstellung,
Standard-Darstellung von S_n*

Beispiel 4. *Linksreguläre Darstellung ...*

Beispiel 5. $\mathbb{C}[\mathbf{1} + \mathbf{2} + ... + \mathbf{n}]$

Beispiel 6. $\mathbb{C}[\underline{3}] = \mathbb{C}[\mathbf{1} + \mathbf{2} + \mathbf{3}] \oplus \mathbb{C}[\mathbf{2} - \mathbf{1}, \mathbf{3} - \mathbf{1}]$ *als S_3-Modul.*

Satz 3. *(Maschke)*

Beispiel 7. $\mathbb{C}[\mathcal{H}], \mathcal{H} := \{H, (1,2)H, (1,3)H\},\ H = S(\{2,3\}) \leq S_3$

Lemma 1. *(Schur)*

3 Tableaux und Tabloide

Wiederholung:

(noch z.z.:) Äquivalenz zwischen
$\mathbb{C}[\mathrm{id}\cdot H, (1,2)H, (2,3)H]$, $H = S(\{2,3\}) \times S(\{1\}) = \{\mathrm{id}, (2,3)\}$,
(Restklassendarstellung von S_3 bzgl. H)
und $\mathbb{C}[\mathbf{1}, \mathbf{2}, \mathbf{3}]$ (Standard-Darstellung).

R-Young-Tableau ist eine Gestalt R zusammen mit einer Bijektion $R \to \underline{n}$ (wobei $n = |R|$).

Definition.
*Sei $\lambda \vdash n$ (oder allgemeiner: $\lambda \models n$). Zwei λ-Young-Tableaux t, t' mit Zeilen $B_1, ..., B_l$ bzw. $B'_1, ..., B'_l$ heißen zeilenäquivalent, bez. $t \sim t'$, wenn für alle i die Einträge von B_i und B'_i übereinstimmen. Die Restklassen bzgl. $\sim$ heißen λ-**Tabloide**; Bezeichnung durch horizontale Striche.*

Bsp:
$\dfrac{\overline{1\;2}}{\underline{3}} = \{312, 321\}$, $t = \dfrac{\overline{412}}{\underline{35}} = ...$

Es gilt: Durch $\pi t = (\pi(t_{i,j}))_{ij}$ ist eine S_n-Operation definiert.
(Obiges Bsp invariant unter $(1,2)$, aber nicht unter $(1,3)$,...)

Für t wie oben heißt die Young-Untergruppe

$$H_t := S(B_1) \times ... \times S(B_l) \text{ von } S_n$$

Zeilenstabilisator. [Analog definiert man auch den Spaltenstabilisator.]
(Bsp: für $t = \binom{412}{35}$, $H_t = S(\{1,2,4\}) \times S(\{3,5\})$.)
$\{t\} = \dfrac{\overline{412}}{\underline{35}}$ wird gegeben durch $\big(S(\{1,2,4\}) \times S(\{3,5\})\big)\binom{412}{35}$.

Definition.
Für $\lambda \vdash n$, sei M^λ der S_n-Modul $\mathbb{C}[\{t_1\}, ..., \{t_k\}]$, wo $\{t_1\}, ..., \{t_k\}$ Liste aller λ-Tabloide.

Beispiel 8. *a) $\lambda = (n) : \mathbb{C}[\overline{\underline{12...n}}]$ Triviale Darstellung*

b) $\lambda = (n-1).1 : \mathbb{C}[1, 2, ..., n]$ da jedes Tabloid eindeutig best.durch das Einzelkästchen der zweiten Zeile, man erhält die Standarddarstellung von S_n.

c) $\lambda = (1^n) : \mathbb{C}[S_n]$ reguläre Darstellung, da keine verschiedenen Tableaux zeilenäquivalent.

Es gilt:
M^λ zyklisch (d.h. als G-Modul von einem Vektor $\mathbf{v}$ erzeugt) mit Vektorraum-Dimension $n!/\lambda!$ $(:= n!/\lambda_1!...\lambda_l!)$.
Denn:
Jedes gegebene λ-Tabloid $\{t\}$ erzeugt: $M^\lambda = \mathbb{C}[S_n\{t\}]$ (und VR-Dimension klar nach Def. der Tabloide).

Sei $\lambda \vdash n$, S_λ die zugehörige Young-Untergruppe und t^λ das Tabloid gegeben durch

$\overline{1 \quad ... \quad \lambda_1}$

...

$\overline{n-\lambda_l+1 \cdots n}$

Satz 4. *Dann ist $M^\lambda = \mathbb{C}[S_n\{t^\lambda\}]$ als S_n-Modul isomorph zur Restklassendarstellung von S_n bzgl. S_λ.*

Beweis-Skizze:
Die Restklassen $\pi_i S_\lambda$ bzgl. S_λ seien durch Transversal $\pi_1, ..., \pi_k$ gegeben.
Man zeigt: Die bijektive Abbildung $\theta : \pi_i S_\lambda \mapsto \pi_i t^\lambda$ gibt einen Isomorphismus.
(Links: Restklasse bzgl. S_λ, rechts: Tableau modulo Zeilen-Äquivalenz!) $\square$

Bsp: Insbesondere $M^{2.1}$ Standarddarstellung isomorph zu Restklassendarstellung von S_3 bzgl. $S(\{2,3\}) \times S(\{1\})$.

4 Charaktere

Sei G eine Gruppe und $f : G \to \mathbb{C}$ eine Abbildung.

Definition. *Dann heißt f* **Klassenfunktion** *auf G, wenn f auf Konjugationsklassen konstant ist, d.h. ist K Konjugationsklasse von G, so gilt für alle $g, h \in K$: $f(g) = f(h)$.*
Bez. $\mathcal{C}l(G)$ sei die Menge aller Klassenfunktionen auf G.

Es ist $\mathcal{C}l(G)$ Vektorraum mit Basis δ_K, $\delta_K(g) = 1$ für $g \in K$, 0 sonst. (Insbesondere ist $\dim \mathcal{C}l(G)$ die Anzahl der Konjugationsklassen von G).

Es gilt:
Sei V ein G-Modul, $d : G \to GL_m$ (zugehörige) Matrixdarstellung.
Dann ist die Abbildung $\chi : G \to \mathbb{C}, g \mapsto \mathrm{Spur}(d(g))$ eine Klassenfunktion.
(denn $\mathrm{Spur}(d(kgk^{-1})) = \mathrm{Spur}(d(k)d(g)d(k^{-1})) = \mathrm{Spur}(d(g))$).

Definition. *Der* **Charakter** *$\chi(= \chi_V)$ von d bzw. von V ist die Abbildung $\chi : G \to \mathbb{C}, g \mapsto$ Spur($d(g)$).*
Ist $G = \{g_1, ..., g_n\}$, so notiert man $\chi = (\chi(g_1), ..., \chi(g_n))$ als Zeilenvektor.

Man beachte hierbei, dass die Spur invariant unter Basiswechsel ist. Daraus folgt auch, dass äquivalente Darstellungen denselben Charakter haben (Umkehrung später!)

Der Charakter χ heißt irreduzibel, wenn die zugehörige Darstellung irreduzibel ist.

Beispiel 9. *Für die Standard-Darstellung von S_n*

ist χ^{def} gegeben durch $\sigma \mapsto \#$ Fixpunkte von σ (klar).

Für die reguläre Darstellung $\mathbb{C}[G]$ gilt: $\chi^{reg}(g) = \begin{cases} |G| & : g = 1_G \\ 0 & : sonst \end{cases}$

(denn Fixpunkte g_i, d.h. $gg_i = g_i$ gibt es nur für 1_G).

Allgemein gilt: $\chi(1_G) = \dim(d)$ (Spur der Einheitsmatrix).

Für eindimensionale Darstellungen ist $\chi(g)$ genau der Eintrag von $d(g)$; (linearer Charakter)

Insbesondere: G zyklische Gruppe, Ordnung n, Elemente = Konjugationsklassen (!), genau n verschiedene eindimensionale Darstellungen (s.o.), (mit Umkehrung oben: somit nicht äquivalente). [Werden allgemein zeigen: Anzahl nicht äquivalenter irreduzibler Darstellungen = Anzahl der Konjugationsklassen.]

Für S_3: triviale Darstellung $\chi^{triv} = (1, 1, 1, 1, 1, 1)$ (6 Elemente)

Sgn-Darstellung $\chi^{sgn} = (1, -1, -1, -1, 1, 1)$ [jeweils $|K|$-fache Wiederholung der Werte für $K = \{id\}$, $K =$ Zykeltyp Transposition, $K =$ Zykel Länge 3.]

Definition.

Seien $\chi, \psi : G \to \mathbb{C}$ Abbildungen.

Dann definiert man das Skalarprodukt von χ und ψ durch:

$$\langle \chi, \psi \rangle = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi(g) \bar{\psi}(g)$$

Da Spur(a^t)=Spur(a), gilt für Charaktere χ, ψ, dass $\bar{\psi}(g) = \psi(g^{-1})$ (Zusatz Maschke), also:

$\langle \chi, \psi \rangle = \langle \chi, \psi \rangle' := \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi(g) \psi(g^{-1})$

(Achtung: wenn χ, ψ beliebig: durch $\langle \chi, \psi \rangle'$ kein Skalarprodukt definiert, aber Bilinearform)

Satz 5. *(Charakter-Gleichungen erster Art [die Zeilen]).*

Seien $\chi, \psi : G \to \mathbb{C}$ irreduzible Charaktere.

Dann gilt: $\langle \chi, \psi \rangle = \delta_{\chi,\psi}$ (d.h. $\sum_K \frac{|K|}{|G|} \chi(K) \overline{\psi(K)} = \delta_{\chi,\psi}$).

Klar: Für S_n (da π und π^{-1} konjugiert): $\langle \chi, \psi \rangle = \frac{1}{n!} \sum_{\pi \in S_n} \chi(\pi) \psi(\pi)$.

Im obigen Beispiel: $\langle \chi^{triv}, \chi^{triv} \rangle = \frac{6}{6} = \langle \chi^{sgn}, \chi^{sgn} \rangle$, $\langle \chi^{triv}, \chi^{sgn} \rangle = 0$.

Korollar zu Satz 5.
1) Sei d Matrixdarstellung von G mit Charakter χ,
und sei $d \cong m_1 d^{(1)} \oplus \ldots \oplus m_k d^{(k)}$ die Zerlegung in paarweise nicht äquivalente irreduzible Darstellungen mit Charaktern $\chi^{(i)}$.
Dann gilt: $\chi = m_1\chi^{(1)} + \ldots + m_k\chi^{(k)}$, $\langle \chi, \chi^{(j)} \rangle = m_j$ für alle j;
d ist irreduzibel genau dann, wenn $\langle \chi, \chi \rangle (= \sum_j m_j^2) = 1$.
2) Zwei Darstellungen von G sind genau dann äquivalent, wenn ihre Charaktere übereinstimmen.

Denn:
Man benutzt Charakter-Gleichungen 1.Art, und dass Spur von direkter Summe von Matrizen = Summe der Spuren. 1) Noch z.z.: Wenn $\langle \chi, \chi \rangle = 1$, so ist d irreduzibel. Aber $\sum_j m_j^2 = 1$ heißt genau ein m_j ist 1, alle anderen 0, darauf folgt $d = d^{(j)}$ (irreduzibel).

2) zu zeigen: Falls $\chi = \chi'$, so sind die Matrixdarstellung d, d' äquivalent. Sei $d = \oplus m_i d^{(i)}$, $d' = \oplus n_i d^{(i)}$ ($m_i, n_i = 0$ zugelassen). Mit 1) folgt $m_i = n_i$ für alle i. □

Beispiel 10. *Wir betrachten $G = S_3$. sog. Charaktertafel (der irreduziblen Charaktere):*

	K_1	K_2	K_3
χ^{triv}	1	1	1
[χ^{vermut}	*...]*		
χ^{sgn}	1	-1	1

(vgl. Satz 2:) $\frac{|K_1|}{n!} = \frac{1}{|Z_{\mathrm{id}}|} = \frac{1}{6}$, $\frac{|K_2|}{n!} = \frac{1}{|Z_{(1,2)}|} = \frac{1}{2}$, $\frac{|K_3|}{n!} = \frac{1}{|Z_{(1,2,3)}|} = \frac{1}{3}$.

Mit welchen Multiplizitäten kommen χ^{triv}, χ^{sgn} in $\chi^{def} = \chi_{M^{2.1}} : S_3 \to \mathbb{C}$ (# Fixpunkte s.o.) vor?
Oder genauer [es gibt genau 3 irreduzible Charaktere von S_3, siehe später, Satz 6]:
Wie schreibt sich χ^{def} als Summe $k\chi^{triv} + l\chi^{sgn} + m\chi^{?}$?
$k = \langle \chi^{def}, \chi^{triv} \rangle = \frac{1}{3!}\sum_{\pi \in S_3} \chi^{def}(\pi) \cdot 1 = \frac{1}{6}(3\cdot 1 + 1\cdot 1 + 1\cdot 1 + 1\cdot 1 + 0\cdot 1 + 0\cdot 1) = 1$.
$l = \langle \chi^{def}, \chi^{sgn} \rangle = \frac{1}{6}(3\cdot 1 - 1\cdot 1 - 1\cdot 1 - 1\cdot 1 + 0\cdot 1 + 0\cdot 1) = 0$.
Also ist $\chi^{def} = \chi^{triv} + m\chi^{(?)} = \chi^{triv} + \chi^{\perp}$.
Dem entspricht eine Zerlegung in Diagonalmatrizen $(1) \oplus B$.
Die zugehörigen Matrizen $B = B(\pi)$ sind (Bsp.6):
$d((1,2)) = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $d((1,3)) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$, $d((1,2,3)) = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, *usw.*
Klar $\chi^{\perp}(\pi)$ = (# Fixpunkte von π) $- 1$.

Also

	K_1	K_2	K_3
χ^{triv}	1	1	1
$\chi^{\perp}$	2	0	-1
χ^{sgn}	1	-1	1

wobei $\chi^{\perp}$ irreduzibel (d.h. $m = 1$) wegen $\langle \chi^{\perp}, \chi^{\perp} \rangle = \frac{1}{6}(2^2+3\cdot 0+(-1)^2+(-1)^2) = 1$.

Beweis (Satz 5):

Gegeben Matrix-Darstellungen A, B Grad r bzw. n von Gruppe G, zu Charakteren χ, ψ.

1) Sei Y die (komplexe, von Unbestimmten x_{ij} abhängige) $r \times n$-Matrix

$$Y = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} A(g)(x_{i,j})_{\binom{1 \leq i \leq r}{1 \leq j \leq n}} B(g^{-1}),$$

Beh.: Dann gilt für alle $h \in G$:

$A(h)Y = YB(h)$ d.h. durch Y wird Homomorphismus von G-Moduln gegeben.

Nach dem Lemma von Schur gilt dann entweder $Y = 0$ (Fall $A \ncong B$)
oder $Y = c \cdot 1_{r \times r}$ (Fall $A \cong B$).

Beweis der Beh.:
$A(h)YB(h)^{-1} = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} A(h)A(g)(x_{i,j})B(g^{-1})B(h^{-1})$
$= \frac{1}{|G|} \sum_{\tilde{g}=hg \in G} A(\tilde{g})(x_{i,j})B(\tilde{g}^{-1}) = Y$.

2) Wenn $\chi \neq \psi$ muss $A \ncong B$ (s.o.), also für alle i, j, k, l:
Eintrag i, j von Y, Koeff vor x_{kl}:
$0 = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} a_{ik}(g) b_{lj}(g^{-1})$,

wobei die rechte Seite gleich $\langle a_{ik}, b_{lj} \rangle'$ ist. (Die Einträge $a_{ij} = a_{ij}(-), b_{ij}(-)$ von $A : G \to GL_r$ bzw. B definieren Abbildungen $G \to \mathbb{C}$).

Nun ist $\langle \chi, \psi \rangle = \langle \chi, \psi \rangle' = \langle$ Spur(A), Spur$(B) \rangle' = \sum_{i,j} \langle a_{ii}, b_{jj} \rangle' = 0$.

3)Ohne Einschränkung sei nun $A = B$.

Es ist $\langle \chi, \chi \rangle = \langle \chi, \chi \rangle' = \sum_{i,j} \langle a_{ii}, a_{jj} \rangle'$; wir wollen zeigen, dass dies 1 ist.

Der Eintrag y_{ij} von Y ist 0 für $i \neq j$, und c für $i = j$.

Wegen $c \cdot 1_{r \times r} = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} A(g)(x_{ij})A(g^{-1})$,

gilt $c \cdot r =$Spur$(c \cdot 1_{r \times r}) =$ Spur$(\frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} A(g)(x_{ij})_{..}A(g^{-1})) =$ Spur$(x_{ij})_{..} = x_{11} + ... + x_{rr}$.

Also ist der Eintrag $y_{ii} = \frac{1}{r}(x_{11} + ... + x_{rr})$. Der Koeffizient vor x_{kl} darin ist (wie oben $\langle a_{ik}, a_{li} \rangle' = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} a_{ik}(g) a_{li}(g^{-1}) =)$ $\frac{1}{r}\delta_{k,l}$.

Es folgt $\sum_{i,j} \langle a_{ii}, a_{jj} \rangle' = \sum_{i=1}^{r} \langle a_{ii}, a_{ii} \rangle' = \sum_{i=1}^{r} \frac{1}{r} = 1$. $\square$

Satz 6. *Sei G endliche Gruppe und sei eine Liste aller (paarweise nicht äquivalenten) irreduzible G-Moduln $V^{(i)}$ gegeben.*

Seien $m_i \geq 0$ bestimmt durch $\mathbb{C}[G] = \oplus_i m_i V^{(i)}$ (linksreguläre Darstellung).

Dann gilt:

1) $m_i = \dim V^{(i)}$

2) $\sum_i (\dim V^{(i)})^2 = |G|$

3) Die Anzahl der $V^{(i)}$ ist gleich der Anzahl der Konjugationsklassen (sog. Klassenzahl) von G.

Korollar zu Satz 6.

Die irreduziblen Charaktere einer Gruppe G bilden eine ON-Basis für $Cl(G)$.

Beweis:

Lineare Unabhängigkeit und Orthonormalität sind schon gezeigt (durch die Charakter-Gleichungen erster Art).

Da $\dim Cl(G)$ die Anzahl der Konjugationsklassen ist, folgt mit dem Satz über die Anzahl der $V^{(i)}$ dass eine ON-Basis vorliegt.