Der Vollständigkeitssatz der Aussagenlogik

Sophia Sterz (7304823)

Proseminar: Aussagenlogik und Boolsche Algebren

Dr. Yurii Khomskii

21.03.23

Gliederung

Der Vollständigkeitssatz

Eine Formel ist genau dann allgemeingültig, wenn sie beweisbar ist.

Definition (L-Formeln)

L-Formeln sind Zeichenreihen, die aus L, den Klammern (,) als Hilfszeichen und den folgenden logischen Zeichen gebildet ist:

Variablen $v_0, v_1, \ldots$

Gleichheitszeichen $\doteq$

Junktoren $\neg$ (Negation), $\wedge$ (Konjunktion)

Existenzquantor $\exists$

(Ziegler 2017: 6)

Definition (L-Struktur)

Sei L eine Sprache. Eine L-Struktur ist ein Paar

$$\mathfrak{A} = (A, (Z^{\mathfrak{A}})_{Z \in L}),$$

wobei A eine nicht-leere Menge (Grundmenge von $\mathfrak{A}$) ist.

$Z^{\mathfrak{A}}$ ist eine Interpretation der Zeichen von L in A.

(Ziegler 2017: 4)

Definition (Belegung)

Sei $\mathfrak{A}$ eine L-Struktur. Eine Belegung ist eine Funktion

$$\beta : \{v_0, v_1, \dots\} \to A$$

von der Menge der Variablen in die Grundmenge von $\mathfrak{A}$.

(Ziegler 2017: 11)

Definition (Allgemeingültigkeit)

Eine L-Formel φ heißt allgemeingültig, wenn sie für alle Belegungen β in allen L-Strukturen gilt.

Wir schreiben dafür $\models \varphi$.

$\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ ist genau dann allgemeingültig, wenn die Aussage $\forall x_1, \ldots, x_n \, \varphi(x_1, \ldots, x_n)$ allgemeingültig ist.

(Ziegler 2017: 17)

Definition (Tautologie)

Eine Tautologie entsteht aus einer allgemeingültigen aussagenlogischen Formel durch Ersetzen der Variablen durch L-Formeln.

Formeln wie z.B. $(\varphi \vee \neg\varphi)$ oder $(\varphi \wedge (\varphi \rightarrow \psi)) \rightarrow \psi$ sind allgemeingültig, weil sie in einer Struktur immer wahr sind (unabhängig vom Wahrheitswert von φ oder ψ).

Formeln dieser Art heißen Tautologien.

(Ziegler 2017: 18)

Lemma

Tautologien sind allgemeingültig.

Lemma (Gleichheitsaxiome)

Die folgenden L-Aussagen sind allgemeingültig.

1. $\forall x \quad x \doteq x$ (Reflexivität)
2. $\forall x, y \ (x \doteq y \rightarrow y \doteq x)$ (Symmetrie)
3. $\forall x, y, z \ (x \doteq y \land y \doteq z \rightarrow x \doteq z)$ (Transitivität)
4. $\forall x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n$
   $(x_1 \doteq y_1 \land \dots \land x_n \doteq y_n \rightarrow f x_1 \dots x_n \doteq f y_1 \dots y_n)$ (Kongruenz 1)
5. $\forall x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n$
   $(x_1 \doteq y_1 \land \dots \land x_n \doteq y_n \rightarrow (R x_1 \dots x_n \leftrightarrow R y_1 \dots y_n))$ (Kongruenz 2)

(Ziegler 2017: 19)

f n-stellige Funktionszeichen, R n-stellige Relationszeichen aus L.

Lemma ($\exists$-Quantorenaxiom)

Sei φ eine L-Formel, t ein L-Term und x frei für t in φ.

Dann ist

$$\varphi\frac{t}{x} \longrightarrow \exists x \varphi$$

allgemeingültig.

(Ziegler 2017: 19)

Lemma (Modus Ponens)

Wenn φ und $(\varphi \rightarrow \psi)$ allgemeingültig sind, dann auch ψ.

(Ziegler 2017: 19)

Lemma ($\exists$ -Einführung)

Wenn x nicht frei in ψ vorkommt, dann ist mit $\varphi \rightarrow \psi$ auch $\exists x \varphi \rightarrow \psi$ allgemeingültig.

(Ziegler 2017: 20)

Definition (Hilbert-Kalkül)

Sei L eine Sprache. Eine L-Formel ist beweisbar, wenn sie

1. eine Tautologie ist,
2. ein Gleichheitsaxiom ist,
3. ein $\exists$-Quantorenaxiom ist,
4. sich mithilfe der Modus Ponens Regel aus zwei beweisbaren L-Formeln ergibt,
5. oder wenn sie sich mit der Regel der $\exists$-Einführung aus einer beweisbaren L-Formel ergibt.

Wir schreiben: $\vdash_L \varphi$

($\vdash_L \varphi$ ist unabhängig von der Sprachumgebung, weshalb auch $\vdash \varphi$ als Notation verwendet wird).

(Ziegler 2017: 23)

Sei $T \subseteq L^V$ (Ausdrucksmenge in der Sprache der Aussagenlogik zu einer Aussagenvariablenmenge V und $\varphi \in L^V$).

Die Menge der aus einer gegebenen Ausdrucksmenge ableitbaren Ausdrücke bezeichnet man mit $T^{\vdash}$, also

$$T^{\vdash} = \{\varphi \in L^V \mid T \vdash \varphi\}$$

(Brenner 2016: 49)

Notation

① φ ist in T beweisbar , $T \vdash \varphi$.

② φ folgt logisch aus T , $T \vDash \varphi$.

(Ziegler 2017: 30)

Lemma (Korrektheit)

Sei Γ eine Menge $\Gamma = \{P_1, P_2, \ldots\}$. Es gilt:

$$\Gamma \vdash \varphi \Rightarrow \Gamma \vDash \varphi$$

(Bromand 2009: 37f.)

Beweis

Es gilt, dass $\Gamma \vdash \varphi$ gilt, wenn es eine Ableitung D mit allen Hypothesen in Γ gibt.
Daher genügt es zu zeigen, dass für jede Ableitung D mit Konklusion φ und Hypothesen in Γ
$\Gamma \vDash \varphi$ gilt.

Dies kann per Induktion auf D gezeigt werden.

(Van Dalen 2008: 40)

Definition (Konsistenz)

Eine Menge T von Sätzen ist konsistent / widerspruchsfrei, wenn $T \nvdash \bot$.

M.a.W.: Man kann aus T keinen Widerspruch ableiten.

Zur Erinnerung:
$\bot$ - Falschheit - falsum, absurdum

(Van Dalen 2008: 42)

Lemma

Die Konsistenz von Γ kann noch in anderen Formen ausgedrückt werden:

Die folgenden drei Bedingungen sind äquivalent

(i) Γ ist konsistent,

(ii) Für kein φ gilt $\Gamma \vdash \varphi$ und $\Gamma \vdash \neg \varphi$,

(iii) Es gibt mindestens ein φ, sodass $\Gamma \nvdash \varphi$.

(Van Dalen 2008: 42)

Korollar

$T \nvdash \varphi \iff$ Es gibt einen Wert/eine Belegung, sodass $[\![\psi]\!] = 1$ für alle $\psi \in T$ und $[\![\varphi]\!] = 0$.

(Van Dalen 2008: 45)

Satz (Hauptsatz)

$$T \vdash \varphi \iff T \models \varphi$$

(Van Dalen 2008: 46)

Beweis

„$\Longrightarrow$": folgt nach Lemma zu der Korrektheit.

„$\Longleftarrow$": Per Kontraposition: $\Gamma \nvdash \varphi \Rightarrow \Gamma \nvDash \varphi$, diese folgt aus dem Korollar.

(Van Dalen 2008: 46)

Folgerung

Im Spezialfall (für $\Gamma = \emptyset$) gilt

$$\vdash \varphi \iff \models \varphi$$

(Van Dalen 2008: 46)

Bearbeitung von Aufgaben

- Dokument im Chat

1. Seien p, q und r aussagenlogische Variablen.

Welche der folgenden Ausdrücke sind Tautologien?

a) $p \vee q \vee r$

b) $q \vee \neg q$

c) $p \vee (q \wedge r) \rightarrow (p \vee r)$

d) $(p \rightarrow q) \vee (q \rightarrow r) \vee (r \rightarrow p)$

e) $(p \wedge q) \rightarrow r$

② Seien α, β, γ aussagenlogische Variablen.

Zeige, dass die Aussage

$$(\alpha \to \beta) \land (\beta \to \gamma) \land (\neg\alpha \to \beta) \to \gamma$$

allgemeingültig ist.

3 Sei $T = \{p, \neg q, r \longrightarrow s\} \subseteq L^{\vee}$ (p, q, r, s seien Aussagenvariablen). Welche der folgenden Aussagen lassen sich aus T ableiten bzw. sind beweisbar?

a) $p \longrightarrow q$

b) $\neg p \longrightarrow q$

c) $p \longrightarrow \neg q$

d) $\neg p \longrightarrow \neg q$

e) $r \longrightarrow q$

f) $(r \longrightarrow q) \longrightarrow \neg p$

g) $(s \longrightarrow p) \longrightarrow (r \longrightarrow \neg q)$

h) $(\neg q \longrightarrow \neg p) \longrightarrow s$

Literaturverzeichnis

Van Dalen, D. (2008): Logic and Structure. Heidelberg: Springer Verlag.

Ziegler, M. (2017): Mathematische Logik. Basel: Birkhäuser.

Bromand, J. (2009): Vollständigkeit und Korrektheit der Aussagenlogik. In: Skript zu Logik 2. Universität Bonn, S. 37-42.

Brenner, H. (2016): Einführung in die mathematische Logik. Skript, Universität Osnabrück.

Online zugängliche Quellen

https://mo.mathematik.uni-stuttgart.de/inhalt/interaufg/interaufg1193/ (letzter Zugriff: 20.03.23).