WEITERE EIGENSCHAFTEN DER AUSSAGENLOGIK

Proseminar: Aussagenlogik und Boolesche Algebren

Koordinierung: Dr. Yurii Khomskii

Franziska Schneider

Inhaltverzeichnis

Allgemeine Eigenschaften

- Assoziativgesetz: $(\varphi \vee \psi) \vee \sigma \leftrightarrow \varphi \vee (\psi \vee \sigma)$ $\quad (\varphi \wedge \psi) \wedge \sigma \leftrightarrow \varphi \wedge (\psi \wedge \sigma)$
- Kommutativgesetz: $\varphi \vee \psi \leftrightarrow \psi \vee \varphi$ $\quad \varphi \wedge \psi \leftrightarrow \psi \wedge \varphi$
- Distributivgesetz: $\varphi \vee (\psi \wedge \sigma) \leftrightarrow (\varphi \vee \sigma) \wedge (\varphi \vee \psi)$ $\quad \varphi \wedge (\psi \vee \sigma) \leftrightarrow (\varphi \wedge \sigma) \vee (\varphi \wedge \psi)$
- De Morgansche Gesetze: $\neg(\varphi \vee \psi) \leftrightarrow \neg\varphi \wedge \neg\psi$ $\quad \neg(\varphi \wedge \psi) \leftrightarrow \neg\varphi \vee \neg\psi$
- Indempotent: $\varphi \vee \varphi \leftrightarrow \varphi$ $\quad \varphi \wedge \varphi \leftrightarrow \varphi$
- Doppeltes Verneinungsgesetz: $\neg\neg\varphi \leftrightarrow \varphi$

Beweis: Assoziativgesetz

φ	ψ	σ	$(\varphi \vee \psi)$	$(\varphi \vee \psi) \vee \sigma$	$\psi \vee \sigma$	$\varphi \vee (\psi \vee \sigma)$
1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	1	1	1
0	1	1	1	1	1	1
1	0	1	1	1	1	1
1	0	0	1	1	0	1
0	1	0	1	1	1	1
0	0	1	0	1	1	1
0	0	0	0	0	0	0

Beweis: Distributivgesetz

φ	ψ	σ	$\psi \land \sigma$	$\varphi \lor (\psi \land \sigma)$	$\varphi \lor \sigma$	$\varphi \lor \psi$	$(\varphi \lor \sigma) \land (\varphi \lor \psi)$
1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	0	1	1	1	1
0	1	1	1	1	1	1	1
1	0	1	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	1	1
0	1	0	0	0	0	1	0
0	0	1	0	0	1	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0

Lemma

- wenn $\vDash \varphi \to \psi$, so folgt $\vDash \varphi \wedge \psi \leftrightarrow \varphi$ und $\vDash \varphi \vee \psi \leftrightarrow \psi$
- Beweis: $\varphi \to \psi \Longrightarrow [\varphi]_v \leq [\psi]_v$, daraus folgt sowohl $[\varphi \wedge \psi]_v = \min([\varphi]_v [\psi]_v) = [\varphi]_v$, als auch $[\varphi \vee \psi]_v = \max([\varphi]_v [\psi]_v) = [\psi]_v$
- $\vDash \varphi \Longrightarrow \vDash \varphi \wedge \psi \leftrightarrow \psi$
- $\mathrm{T} \wedge \psi \leftrightarrow \psi$
- $\vDash \varphi \Longrightarrow \vDash \neg\varphi \vee \psi \leftrightarrow \psi$
- $\bot \vee \psi \leftrightarrow \psi$

$\psi \longrightarrow \varphi$

$\neg\varphi \longrightarrow \psi$

Weitere Eigenschaften

- $\vDash (\varphi \leftrightarrow \psi) \leftrightarrow (\varphi \to \psi) \wedge (\psi \to \varphi)$ $\to \psi \leftrightarrow \varphi$
- $\vDash (\varphi \to \psi) \leftrightarrow (\neg\varphi \vee \psi)$
- $\vDash \varphi \vee \psi \leftrightarrow (\neg\varphi \to \psi)$
- $\vDash \varphi \vee \psi \leftrightarrow \neg(\neg\varphi \wedge \neg\psi)$
- $\vDash \varphi \wedge \psi \leftrightarrow \neg(\neg\varphi \vee \neg\psi)$
- $\vDash \neg\varphi \leftrightarrow (\varphi \to \perp)$
- $\vDash \perp \leftrightarrow \varphi \wedge \neg\varphi$

φ	ψ	$\perp$	$\neg\varphi$	$\varphi \to \psi$	$\neg\varphi \vee \psi$		
1	1	0	0	1	1		
1	0	0	0	0	0		
0	1	0	1	1	1		
0	0	0	1	1	1		

φ	ψ	$\perp$	$\neg\varphi$				
1	1	0	0				
1	0	0	0				
0	1	0	1				
0	0	0	1				

Äquivalenzrelation auf der Aussagenlogik

- Aussagenlogik lässt sich wie eine Algebra behandeln
- Definition: $\varphi \approx \psi$ ist äquivalent zu $\vDash \varphi \leftrightarrow \psi$
- Lemma: $\approx$ ist eine Äquivalenzrelation auf der Aussagenlogik
  - Reflexivität: $\varphi \approx \varphi$ $\varphi \leftrightarrow \varphi$
  - Symmetrie: $\varphi \approx \psi \Leftrightarrow \psi \approx \varphi$
  - Transitivität: $\varphi \approx \psi$ und $\psi \approx \sigma \Longrightarrow \varphi \approx \sigma$

$[\varphi] = [\psi]$ $[\psi] = [\sigma] \Longrightarrow [\varphi] = [\sigma]$

Algebraische Berechnungen

1.

$$\varphi \to (\psi \to \sigma) \approx \neg\varphi \vee (\psi \to \sigma)$$
$$\neg\varphi \vee (\psi \to \sigma) \approx \neg\varphi \vee (\neg\psi \vee \sigma)$$
$$\neg\varphi \vee (\neg\psi \vee \sigma) \approx (\neg\varphi \vee \neg\psi) \vee \sigma$$
$$(\neg\varphi \vee \neg\psi) \vee \sigma \approx \neg(\varphi \wedge \psi) \vee \sigma$$
$$\neg(\varphi \wedge \psi) \vee \sigma \approx (\varphi \wedge \psi) \to \sigma$$

2.

$$\neg\psi \to \neg\varphi \approx \neg\neg\psi \vee \neg\varphi$$
$$\neg\neg\psi \vee \neg\varphi \approx \neg\varphi \vee \psi$$
$$\neg\varphi \vee \psi \approx \varphi \to \psi$$

3.

$$\varphi \to (\psi \to \varphi) \approx \neg\varphi \vee (\neg\psi \vee \varphi)$$
$$\neg\varphi \vee (\neg\psi \vee \varphi) \approx (\neg\varphi \vee \varphi) \vee \neg\psi$$

Andere Verbindungen in der Aussagenlogik

$>$

- Annahme: Jede logische Verbindung \$ ist durch seine Wahrheitstabelle oder seine Bewertungsfunktion definierbar, falls $[\$(p_1, \dots, p_n)] = f([p_1], \dots, [p_n])$
- Satz: Für jede n-adische Verbindung \$ definiert durch seine Bewertungsfunktion, gibt es eine Aussage τ, welche nur $p_1, \dots, p_n$, $\vee$ und $\neg$ enthält, so dass
$$\vDash \tau \leftrightarrow \$(p_1, \dots, p_n)$$
- Beweis per Induktion:
  - $\mathrm{n} = 1$: dafür gibt es genau vier mögliche Verbindungen, die sich wie folgt darstellen lassen: $\varphi, \neg\varphi, \neg(\varphi \vee \neg\varphi), \varphi \vee \neg\varphi$
  - $\mathrm{n+1}$: Wir nehmen an, alle n-adische Verbindungen wurden gefunden wurden. Für die Verbindung $\$(p_1, \dots, p_{n+1})$ werden zwei Hilfsverbindungen definiert: $\$_1(p_2, \dots, p_{n+1}) = \$(\bot, p_2, \dots, p_{n+1})$, $\$_2(p_2, \dots, p_{n+1}) = \$(\mathrm{T}, p_2, \dots, p_{n+1})$. Zu diesen Verbindungen seien die Aussagen σ_1 und σ_2 äquivalent, daraus formulieren wir die Aussage $\tau \coloneqq (p_1 \rightarrow \sigma_2) \wedge (\neg p_1 \rightarrow \sigma_1)$. Es folgt
$$\vDash \tau \leftrightarrow \$(p_1, \dots, p_{n+1})$$

$\neg p_1$

- Beispiel: Sheffersche Strich (es können nicht beide Aussagen φ, ψ wahr sein):

$$\vDash \varphi | \psi \leftrightarrow \neg\varphi \vee \neg\psi$$

Neue Operatoren

- Definition 1:
  - $\bigwedge_{i \leq 0} \varphi_i = \varphi_0$
  - $\bigwedge_{i \leq n+1} \varphi_i = \bigwedge_{i \leq n} \varphi_i \wedge \varphi_{n+1}$
- Definition 2:
  - $\bigvee_{i \leq 0} \varphi_i = \varphi_0$
  - $\bigvee_{i \leq n+1} \varphi_i = \bigvee_{i \leq n} \varphi_i \vee \varphi_{n+1}$

Konjunktive und disjunkte Normalform

- φ_{ij} bezeichnen hier atomare Aussagen oder Negationen atomarer Aussagen
- Konjunktive Normalform: $\varphi = \bigwedge_{i \leq n} \bigvee_{j \leq m_i} \varphi_{ij}$
- Disjunkte Normalform: $\varphi = \bigvee_{i \leq n} \bigwedge_{j \leq m_i} \varphi_{ij}$
- Satz: Für jedes φ gibt es konjunktive und disjunkte Normalformen, so dass

$\vDash \varphi \leftrightarrow \varphi^\wedge$ und $\vDash \varphi \leftrightarrow \varphi^\vee$

- Beweis per Induktion:
  - φ ist atomar, so folgt $\varphi = \varphi^\wedge = \varphi^\vee$
  - $\varphi = \psi \wedge \sigma$, so folgt $\varphi = \psi \wedge \sigma \approx \varphi^\wedge = \psi^\wedge \wedge \sigma^\wedge \approx \psi^\vee \wedge \sigma^\vee \approx \bigvee_{i,j}(\psi_i \wedge \sigma_j)$ $= \varphi^\vee$
  - $\varphi = \psi \vee \sigma$ beweist sich ähnlich
  - $\varphi = \neg\psi$, so folgt $\varphi = \neg\psi \approx \neg\psi^\wedge \approx \neg\psi^\vee \approx \neg \bigwedge \bigvee \psi_{ij} \approx \neg \bigvee \bigwedge \psi_{ij} \approx \bigwedge \bigvee \neg \psi_{ij} \approx \bigvee \bigwedge \neg \psi_{ij}$

Hilfsabbildung

- Definition: Die dualen Hilfsabbildungen $\quad ^*, \quad ^d: PROP \to PROP$ sind definiert durch
    1. $\varphi^* = \neg\varphi$ und $\varphi^d = \varphi$, wenn φ eine atomare Aussage ist
    2. $(\varphi \wedge \psi)^* = \varphi^* \vee \psi^*$ und $(\varphi \wedge \psi)^d = \varphi^d \vee \psi^d$
    3. $(\varphi \vee \psi)^* = \varphi^* \wedge \psi^*$ und $(\varphi \vee \psi)^d = \varphi^d \wedge \psi^d$
    4. $(\neg\varphi)^* = \neg(\varphi^*)$ und $(\neg\varphi)^d = \neg\varphi^d$
- Lemma: $[\varphi^*] = [\neg\varphi]$ $(\Longrightarrow \vDash \varphi^* \leftrightarrow \neg\varphi)$
- Beweis per Induktion:
    - Sei φ atomar, so wäre das Lemma nach Definition wahr
    - $[(\varphi \wedge \psi)^*] = [\varphi^* \vee \psi^*] = [\neg\varphi \vee \neg\psi] = [\neg\,(\varphi \wedge \psi)]$
    - $[(\varphi \vee \psi)^*] = [\varphi^* \wedge \psi^*] = [\neg\varphi \wedge \neg\psi] = [\neg\,(\varphi \vee \psi)]$
- Satz (Dualität): $\vDash \varphi \leftrightarrow \psi \Longleftrightarrow \vDash \varphi^d \leftrightarrow \psi^d$

Danke für Ihre Aufmerksamkeit

- Quellen: van Dalen, Dirk. *Logic and Structure,* 4. Auflage, S.21-29, Springer-Verlag