

Hamiltonische Quaternionen $\mathbb{H}$

Jonathan Enk

Universität Hamburg

21.02.2025

1. Historie der Quaternionen
2. Konstruktion der Quaternionen
3. Isomorphismus zwischen Quaternionen und Matrixalgebra
4. Imaginärraum der Quaternionen

Historie der Quaternionen

Historie der Quaternionen

- **1835:** William Rowan Hamilton (1805-1865) rechtfertigt das Rechnen mit $\mathbb{C}$ über geometrische Deutungen von Addition und Multiplikation im $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

Historie der Quaternionen

- **1835:** William Rowan Hamilton (1805-1865) rechtfertigt das Rechnen mit $\mathbb{C}$ über geometrische Deutungen von Addition und Multiplikation im $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.
- **bis 1843:** Arbeit an hyperkomplexen Zahlen zur geometrischen Deutung im $\mathbb{R}^3$:

Historie der Quaternionen

- **1835:** William Rowan Hamilton (1805-1865) rechtfertigt das Rechnen mit $\mathbb{C}$ über geometrische Deutungen von Addition und Multiplikation im $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.
- **bis 1843:** Arbeit an hyperkomplexen Zahlen zur geometrischen Deutung im $\mathbb{R}^3$:

"Every morning, on my coming down to breakfast, you used to ask me: 'Well, Papa, can you multiply triplets?'. [...] 'No, I can only add and subtract them'."

Historie der Quaternionen

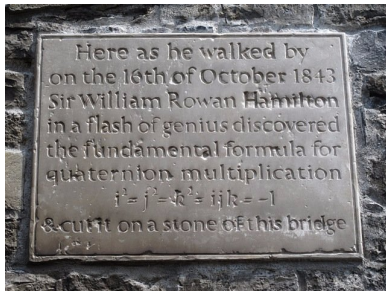
- **1835:** William Rowan Hamilton (1805-1865) rechtfertigt das Rechnen mit $\mathbb{C}$ über geometrische Deutungen von Addition und Multiplikation im $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.
- **bis 1843:** Arbeit an hyperkomplexen Zahlen zur geometrischen Deutung im $\mathbb{R}^3$:
"Every morning, on my coming down to breakfast, you used to ask me: 'Well, Papa, can you multiply triplets?'. [...] 'No, I can only add and subtract them'."
- **16.Oktober 1843:** "Eingebung" auf der Brougham Bridge in Dublin.

Historie der Quaternionen

- **1835:** William Rowan Hamilton (1805-1865) rechtfertigt das Rechnen mit $\mathbb{C}$ über geometrische Deutungen von Addition und Multiplikation im $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.
- **bis 1843:** Arbeit an hyperkomplexen Zahlen zur geometrischen Deutung im $\mathbb{R}^3$:

"Every morning, on my coming down to breakfast, you used to ask me: 'Well, Papa, can you multiply triplets?'. [...] 'No, I can only add and subtract them'."

- **16.Oktober 1843:** "Eingebung" auf der Brougham Bridge in Dublin.



Historie der Quaternionen

Bemerkung

Hamilton hätte sich viel Zeit sparen können, denn:

Es existiert keine $\mathbb{R}$ -lineare Erweiterung der Multiplikation von $\mathbb{C}$ auf $\mathbb{R}^3$.

Historie der Quaternionen

Bemerkung

Hamilton hätte sich viel Zeit sparen können, denn:

Es existiert keine $\mathbb{R}$ -lineare Erweiterung der Multiplikation von $\mathbb{C}$ auf $\mathbb{R}^3$.

Beweis:

Seien $e := (1, 0, 0)$, $i := (0, 1, 0)$, $j := (0, 0, 1)$ Standardbasis im $\mathbb{R}^3$. Als Erweiterung der Multiplikation von $\mathbb{C}$, setze $i^2 = -e$ und folglich $i(ij) = (ii)j = -ej = -j$.

Historie der Quaternionen

Bemerkung

Hamilton hätte sich viel Zeit sparen können, denn:

Es existiert keine $\mathbb{R}$ -lineare Erweiterung der Multiplikation von $\mathbb{C}$ auf $\mathbb{R}^3$.

Beweis:

Seien $e := (1, 0, 0)$, $i := (0, 1, 0)$, $j := (0, 0, 1)$ Standardbasis im $\mathbb{R}^3$. Als Erweiterung der Multiplikation von $\mathbb{C}$, setze $i^2 = -e$ und folglich $i(ij) = (ii)j = -ej = -j$.

Weiter sei $ij := \alpha e + \beta i + \gamma j$ mit $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$.

Historie der Quaternionen

Bemerkung

Hamilton hätte sich viel Zeit sparen können, denn:

Es existiert keine $\mathbb{R}$ -lineare Erweiterung der Multiplikation von $\mathbb{C}$ auf $\mathbb{R}^3$.

Beweis:

Seien $e := (1, 0, 0)$, $i := (0, 1, 0)$, $j := (0, 0, 1)$ Standardbasis im $\mathbb{R}^3$. Als Erweiterung der Multiplikation von $\mathbb{C}$, setze $i^2 = -e$ und folglich $i(ij) = (ii)j = -ej = -j$.

Weiter sei $ij := \alpha e + \beta i + \gamma j$ mit $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$. Damit gilt folgt:

$$\begin{aligned} -j &= i(ij) = i(\alpha e + \beta i + \gamma j) = \alpha i - \beta e + \gamma(ij) \\ &= \alpha i - \beta e + \gamma(\alpha e + \beta i + \gamma j) \\ &= (\gamma\alpha - \beta)e + (\gamma\beta + \alpha)i + \gamma^2 j \end{aligned}$$

Historie der Quaternionen

Bemerkung

Hamilton hätte sich viel Zeit sparen können, denn:

Es existiert keine $\mathbb{R}$ -lineare Erweiterung der Multiplikation von $\mathbb{C}$ auf $\mathbb{R}^3$.

Beweis:

Seien $e := (1, 0, 0)$, $i := (0, 1, 0)$, $j := (0, 0, 1)$ Standardbasis im $\mathbb{R}^3$. Als Erweiterung der Multiplikation von $\mathbb{C}$, setze $i^2 = -e$ und folglich $i(ij) = (ii)j = -ej = -j$.

Weiter sei $ij := \alpha e + \beta i + \gamma j$ mit $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$. Damit gilt folgt:

$$\begin{aligned} -j &= i(ij) = i(\alpha e + \beta i + \gamma j) = \alpha i - \beta e + \gamma(ij) \\ &= \alpha i - \beta e + \gamma(\alpha e + \beta i + \gamma j) \\ &= (\gamma\alpha - \beta)e + (\gamma\beta + \alpha)i + \gamma^2 j \end{aligned}$$

Damit folgt durch Koeffizientenvergleich, dass $\alpha, \beta = 0$ und $\gamma^2 = -1$, also $\gamma \notin \mathbb{R}$. □

Konstruktion der Quaternionen

Grundlagen der Theorie der Algebren

Definition ($\mathbb{R}$ -Algebra)

Sei $\mathbb{R}$ -Vektorraum V mit einer Produktabbildung $V \times V \rightarrow V, (x, y) \mapsto xy$ heißt $\mathbb{R}$ -Algebra, falls $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}; \forall x, y, z \in V$ die *Distributivgesetze* gelten:

1. $(\alpha x + \beta y)z = \alpha \cdot xz + \beta \cdot yz,$
2. $x(\alpha y + \beta z) = \alpha \cdot xy + \beta \cdot xz.$

Grundlagen der Theorie der Algebren

Definition ($\mathbb{R}$ -Algebra)

Sei $\mathbb{R}$ -Vektorraum V mit einer Produktabbildung $V \times V \rightarrow V, (x, y) \mapsto xy$ heißt $\mathbb{R}$ -Algebra, falls $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}; \forall x, y, z \in V$ die *Distributivgesetze* gelten:

1. $(\alpha x + \beta y)z = \alpha \cdot xz + \beta \cdot yz,$
2. $x(\alpha y + \beta z) = \alpha \cdot xy + \beta \cdot xz.$

Bemerkung

Sei $\mathcal{A} = (V, \cdot)$ eine $\mathbb{R}$ -Algebra. Wir bezeichnen diese als:

- assoziativ, falls $\forall x, y, z \in V : x(yz) = (xy)z,$
- kommutativ, falls $\forall x, y \in V : xy = yx,$
- nullteilerfrei, falls $\forall x, y \in V : xy = 0 \implies (x = 0 \vee y = 0),$
- $\mathbb{R}$ -Algebra mit Einselement, falls $\exists e \in V \forall x \in V : xe = ex = x.$

Die Dimension des $\mathbb{R}$ -Vektorraums heißt Dimension der $\mathbb{R}$ -Algebra.

Grundlagen der Theorie der Algebren

Definition (Unteralgebra)

Sei $U \leq V$ ein Untervektorraum der $\mathbb{R}$ -Algebra $\mathcal{A} = (V, \cdot)$. Falls

$$\forall x, y \in U : xy \in U$$

gilt, nennt man U eine $\mathbb{R}$ -Unteralgebra von $\mathcal{A}$.

Grundlagen der Theorie der Algebren

Definition (Unteralgebra)

Sei $U \leq V$ ein Untervektorraum der $\mathbb{R}$ -Algebra $\mathcal{A} = (V, \cdot)$. Falls

$$\forall x, y \in U : xy \in U$$

gilt, nennt man U eine $\mathbb{R}$ -Unteralgebra von $\mathcal{A}$.

Beispiele

1. $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ sind als Körper assoziative, kommutative, nullteilerfreie Algebren mit Einselement mit $\dim(\mathbb{R}) = 1$ und $\dim(\mathbb{C}) = 2$.

Grundlagen der Theorie der Algebren

Definition (Unteralgebra)

Sei $U \leq V$ ein Untervektorraum der $\mathbb{R}$ -Algebra $\mathcal{A} = (V, \cdot)$. Falls

$$\forall x, y \in U : xy \in U$$

gilt, nennt man U eine $\mathbb{R}$ -Unteralgebra von $\mathcal{A}$.

Beispiele

1. $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ sind als Körper assoziative, kommutative, nullteilerfreie Algebren mit Einselement mit $\dim(\mathbb{R}) = 1$ und $\dim(\mathbb{C}) = 2$.
2. Sei V ein $\mathbb{R}$ -Vektorraum. Dann ist V mit der Nullabbildung als Produktabbildung eine assoziative, kommutative $\mathbb{R}$ -Algebra.

Grundlagen der Theorie der Algebren

Definition (Unteralgebra)

Sei $U \leq V$ ein Untervektorraum der $\mathbb{R}$ -Algebra $\mathcal{A} = (V, \cdot)$. Falls

$$\forall x, y \in U : xy \in U$$

gilt, nennt man U eine $\mathbb{R}$ -Unteralgebra von $\mathcal{A}$.

Beispiele

1. $\mathbb{R}, \mathbb{C}$ sind als Körper assoziative, kommutative, nullteilerfreie Algebren mit Einselement mit $\dim(\mathbb{R}) = 1$ und $\dim(\mathbb{C}) = 2$.
2. Sei V ein $\mathbb{R}$ -Vektorraum. Dann ist V mit der Nullabbildung als Produktabbildung eine assoziative, kommutative $\mathbb{R}$ -Algebra.
3. $Mat(n, \mathbb{R}), Mat(n, \mathbb{C})$ bilden eine assoziative $\mathbb{R}$ -Algebra mit Einselement.

Konstruktion einer Algebra

1. Betrachte eine Basis $\mathcal{B} := \{b_1, \dots, b_n\}$ von V .

Konstruktion einer Algebra

1. Betrachte eine Basis $\mathcal{B} := \{b_1, \dots, b_n\}$ von V .
2. Definiere eine beliebige Abbildung $\mathcal{B} \times \mathcal{B} \rightarrow V$, $(b_i, b_j) \mapsto b_i b_j$.

Konstruktion einer Algebra

1. Betrachte eine Basis $\mathcal{B} := \{b_1, \dots, b_n\}$ von V .
2. Definiere eine beliebige Abbildung $\mathcal{B} \times \mathcal{B} \rightarrow V$, $(b_i, b_j) \mapsto b_i b_j$.
Für eine Algebra mit Einselement setze $e := b_i$ für $i \in \{1, \dots, n\}$ beliebig und $b_i b_k = b_k b_i = b_k$, $\forall k \in \{1, \dots, i-1, i+1, \dots, n\}$.

Konstruktion einer Algebra

1. Betrachte eine Basis $\mathcal{B} := \{b_1, \dots, b_n\}$ von V .
2. Definiere eine beliebige Abbildung $\mathcal{B} \times \mathcal{B} \rightarrow V$, $(b_i, b_j) \mapsto b_i b_j$.
Für eine Algebra mit Einselement setze $e := b_i$ für $i \in \{1, \dots, n\}$ beliebig und $b_i b_k = b_k b_i = b_k$, $\forall k \in \{1, \dots, i-1, i+1, \dots, n\}$.
3. Seien $x, y \in V$ beliebig mit $x = \sum_{i=1}^n \alpha_i b_i$ und $y = \sum_{j=1}^n \beta_j b_j$.

Konstruktion einer Algebra

1. Betrachte eine Basis $\mathcal{B} := \{b_1, \dots, b_n\}$ von V .
2. Definiere eine beliebige Abbildung $\mathcal{B} \times \mathcal{B} \rightarrow V$, $(b_i, b_j) \mapsto b_i b_j$.
Für eine Algebra mit Einselement setze $e := b_i$ für $i \in \{1, \dots, n\}$ beliebig und $b_i b_k = b_k b_i = b_k$, $\forall k \in \{1, \dots, i-1, i+1, \dots, n\}$.
3. Seien $x, y \in V$ beliebig mit $x = \sum_{i=1}^n \alpha_i b_i$ und $y = \sum_{j=1}^n \beta_j b_j$. Definiere damit

$$V \times V \rightarrow V, \quad (x, y) \mapsto \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i b_i \right) \left(\sum_{j=1}^n \beta_j b_j \right) = \sum_{i,j=1}^n \alpha_i \beta_j (b_i b_j),$$

Grundlage der Theorie der Algebren

Lemma

Sei $\mathcal{A}$ eine wie oben konstruierte $\mathbb{R}$ -Algebra. Dann gelten:

- (a) $\mathcal{A}$ ist assoziativ $\iff \forall i, j, k \in \{1, \dots, n\} : b_i(b_j b_k) = (b_i b_j) b_k$,
- (b) $\mathcal{A}$ ist kommutativ $\iff \forall i, j \in \{1, \dots, n\} : b_i b_j = b_j b_i$.

Grundlage der Theorie der Algebren

Lemma

Sei $\mathcal{A}$ eine wie oben konstruierte $\mathbb{R}$ -Algebra. Dann gelten:

- (a) $\mathcal{A}$ ist assoziativ $\iff \forall i, j, k \in \{1, \dots, n\} : b_i(b_j b_k) = (b_i b_j) b_k$,
- (b) $\mathcal{A}$ ist kommutativ $\iff \forall i, j \in \{1, \dots, n\} : b_i b_j = b_j b_i$.

Beweis

Die Implikationen $\implies$ folgen direkt aus den Definitionen.

Grundlage der Theorie der Algebren

Lemma

Sei $\mathcal{A}$ eine wie oben konstruierte $\mathbb{R}$ -Algebra. Dann gelten:

- (a) $\mathcal{A}$ ist assoziativ $\iff \forall i, j, k \in \{1, \dots, n\} : b_i(b_j b_k) = (b_i b_j) b_k$,
- (b) $\mathcal{A}$ ist kommutativ $\iff \forall i, j \in \{1, \dots, n\} : b_i b_j = b_j b_i$.

Beweis

Die Implikationen $\implies$ folgen direkt aus den Definitionen.

Zu $\impliedby$: Seien $x, y \in \mathcal{A}$ beliebig, dann existieren eindeutige Koeffizienten $\alpha_i, \beta_j \in \mathbb{R}$, sodass

$$x = \sum_{k=1}^n \alpha_k b_k \text{ und } y = \sum_{j=1}^n \beta_j b_j.$$

Grundlage der Theorie der Algebren

Lemma

Sei $\mathcal{A}$ eine wie oben konstruierte $\mathbb{R}$ -Algebra. Dann gelten:

- (a) $\mathcal{A}$ ist assoziativ $\iff \forall i, j, k \in \{1, \dots, n\} : b_i(b_j b_k) = (b_i b_j) b_k$,
- (b) $\mathcal{A}$ ist kommutativ $\iff \forall i, j \in \{1, \dots, n\} : b_i b_j = b_j b_i$.

Beweis

Die Implikationen $\implies$ folgen direkt aus den Definitionen.

Zu $\impliedby$: Seien $x, y \in \mathcal{A}$ beliebig, dann existieren eindeutige Koeffizienten $\alpha_i, \beta_j \in \mathbb{R}$, sodass

$$x = \sum_{k=1}^n \alpha_k b_k \text{ und } y = \sum_{j=1}^n \beta_j b_j. \text{ Damit}$$

$$xy = \sum_{i,j=1}^n \alpha_i \beta_j (b_i b_j) = \sum_{i,j=1}^n \beta_j \alpha_i (b_j b_i) = yx$$

Das zeigt die Kommutativität. Analog folgt die Implikation $\impliedby$ zur Assoziativität. □

Konstruktion der Quaternionen

Betrachte den $\mathbb{R}$ -Vektorraum $\mathbb{R}^4$ mit der Standardbasis $E := \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$.

Konstruktion der Quaternionen

Betrachte den $\mathbb{R}$ -Vektorraum $\mathbb{R}^4$ mit der Standardbasis $E := \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$.

$\cdot$	e_1	e_2	e_3	e_4
e_1	e_1	e_2	e_3	e_4
e_2	e_2	$-e_1$	e_4	$-e_3$
e_3	e_3	$-e_4$	$-e_1$	e_2
e_4	e_4	e_3	$-e_2$	$-e_1$

Konstruktion der Quaternionen

Betrachte den $\mathbb{R}$ -Vektorraum $\mathbb{R}^4$ mit der Standardbasis $E := \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$.

$\cdot$	e_1	e_2	e_3	e_4
e_1	e_1	e_2	e_3	e_4
e_2	e_2	$-e_1$	e_4	$-e_3$
e_3	e_3	$-e_4$	$-e_1$	e_2
e_4	e_4	e_3	$-e_2$	$-e_1$

Definiere $e := e_1, i := e_2, j := e_3$ und $k := e_4$.

Hamiltonischen Bedingungen:

$$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -e \quad ij = -jk = k.$$

Konstruktion der Quaternionen

Betrachte den $\mathbb{R}$ -Vektorraum $\mathbb{R}^4$ mit der Standardbasis $E := \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$.

$\cdot$	e_1	e_2	e_3	e_4
e_1	e_1	e_2	e_3	e_4
e_2	e_2	$-e_1$	e_4	$-e_3$
e_3	e_3	$-e_4$	$-e_1$	e_2
e_4	e_4	e_3	$-e_2$	$-e_1$

Definiere $e := e_1, i := e_2, j := e_3$ und $k := e_4$.

Hamiltonischen Bedingungen:

$$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -e \quad ij = -jk = k.$$

Definition (Quaternionen $\mathbb{H}$)

Der $\mathbb{R}$ -Vektorraum $\mathbb{R}^4$ mit der Produktabbildung, welche durch die Hamiltonischen Bedingungen definiert ist, wird als Quaternionen $\mathbb{H}$ bezeichnet.

Konstruktion der Quaternionen

$\cdot$	e	i	j	k
e	e	i	j	k
i	i	$-e$	k	$-j$
j	j	$-k$	$-e$	i
k	k	j	$-i$	$-e$

also

$$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -e \quad ij = -jk = k.$$

Konstruktion der Quaternionen

$\cdot$	e	i	j	k
e	e	i	j	k
i	i	$-e$	k	$-j$
j	j	$-k$	$-e$	i
k	k	j	$-i$	$-e$

also

$$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -e \quad ij = -jk = k.$$

Bemerkung

Es gelten folgende Eigenschaften für $\mathbb{H}$:

Konstruktion der Quaternionen

$\cdot$	e	i	j	k
e	e	i	j	k
i	i	$-e$	k	$-j$
j	j	$-k$	$-e$	i
k	k	j	$-i$	$-e$

also

$$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -e \quad ij = -jk = k.$$

Bemerkung

Es gelten folgende Eigenschaften für $\mathbb{H}$:

- $\mathbb{H}$ besitzt ein Einselement e ,
- $\mathbb{H}$ ist nicht kommutativ, denn $k = ij \neq ji = -k$,

Konstruktion der Quaternionen

$\cdot$	e	i	j	k
e	e	i	j	k
i	i	$-e$	k	$-j$
j	j	$-k$	$-e$	i
k	k	j	$-i$	$-e$

also

$$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -e \quad ij = -jk = k.$$

Bemerkung

Es gelten folgende Eigenschaften für $\mathbb{H}$:

- $\mathbb{H}$ besitzt ein Einselement e ,
- $\mathbb{H}$ ist nicht kommutativ, denn $k = ij \neq ji = -k$,
- $\mathbb{H}$ ist assoziativ und nullteilerfrei.

Isomorphismus zwischen Quaternionen und Matrixalgebra

$\mathbb{R}$ -Algebren-Homomorphismen

Definition ($\mathbb{R}$ -Algebra-Homomorphismus)

Seien $\mathcal{A} = (V, \cdot)$ und $\mathcal{B} = (W, \cdot)$ zwei $\mathbb{R}$ -Algebren.

Eine $\mathbb{R}$ -lineare Abbildung $\varphi : V \rightarrow W$ heißt $\mathbb{R}$ -Algebra-Homomorphismus, falls

$$\forall x, y \in V : \varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y)$$

gilt. Ist φ zudem bijektiv, so bezeichnet man diesen als $\mathbb{R}$ -Algebra-Isomorphismus.

$\mathbb{R}$ -Algebren-Homomorphismen

Definition ($\mathbb{R}$ -Algebra-Homomorphismus)

Seien $\mathcal{A} = (V, \cdot)$ und $\mathcal{B} = (W, \cdot)$ zwei $\mathbb{R}$ -Algebren.

Eine $\mathbb{R}$ -lineare Abbildung $\varphi : V \rightarrow W$ heißt $\mathbb{R}$ -Algebra-Homomorphismus, falls

$$\forall x, y \in V : \varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y)$$

gilt. Ist φ zudem bijektiv, so bezeichnet man diesen als $\mathbb{R}$ -Algebra-Isomorphismus.

Beispiele

Die Menge $\mathcal{C} = \left\{ \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\}$ ist eine $\mathbb{R}$ -Unteralgebra von $Mat(2, \mathbb{R})$ und die

Abbildung $\varphi : \mathbb{C} \rightarrow \mathcal{C}, a + ib \mapsto \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ ist ein $\mathbb{R}$ -Algebra-Isomorphismus.

Matrizenalgebra $\mathcal{H}$

Satz

Die Menge $\mathcal{H} = \left\{ \begin{pmatrix} z & -w \\ \bar{w} & \bar{z} \end{pmatrix} \mid z, w \in \mathbb{C} \right\}$ ist eine assoziative, nullteilerfreie $\mathbb{R}$ -Unteralgebra von $Mat(2, \mathbb{C})$ mit der Einheitsmatrix als Einselement.

Matrizenalgebra $\mathcal{H}$

Satz

Die Menge $\mathcal{H} = \left\{ \begin{pmatrix} z & -w \\ \overline{w} & \overline{z} \end{pmatrix} \mid z, w \in \mathbb{C} \right\}$ ist eine assoziative, nullteilerfreie $\mathbb{R}$ -Unteralgebra von $Mat(2, \mathbb{C})$ mit der Einheitsmatrix als Einselement.

Beweis

Es gilt $E \in \mathcal{H} \neq \emptyset$.

Matrizenalgebra $\mathcal{H}$

Satz

Die Menge $\mathcal{H} = \left\{ \begin{pmatrix} z & -w \\ \overline{w} & \overline{z} \end{pmatrix} \mid z, w \in \mathbb{C} \right\}$ ist eine assoziative, nullteilerfreie $\mathbb{R}$ -Unteralgebra von $Mat(2, \mathbb{C})$ mit der Einheitsmatrix als Einselement.

Beweis

Es gilt $E \in \mathcal{H} \neq \emptyset$. Seien $A := \begin{pmatrix} z_1 & -w_1 \\ \overline{w_1} & \overline{z_1} \end{pmatrix}$, $B := \begin{pmatrix} z_2 & -w_2 \\ \overline{w_2} & \overline{z_2} \end{pmatrix} \in \mathcal{H}$ und $\lambda \in \mathbb{R}$, dann gilt

$$\lambda A + B = \lambda \begin{pmatrix} z_1 & -w_1 \\ \overline{w_1} & \overline{z_1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} z_2 & -w_2 \\ \overline{w_2} & \overline{z_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda z_1 + z_2 & -(\lambda w_1 + w_2) \\ \overline{\lambda w_1 + w_2} & \overline{\lambda z_1 + z_2} \end{pmatrix} \in \mathcal{H}.$$

Matrizenalgebra $\mathcal{H}$

Satz

Die Menge $\mathcal{H} = \left\{ \begin{pmatrix} z & -w \\ \overline{w} & \overline{z} \end{pmatrix} \mid z, w \in \mathbb{C} \right\}$ ist eine assoziative, nullteilerfreie $\mathbb{R}$ -Unteralgebra von $Mat(2, \mathbb{C})$ mit der Einheitsmatrix als Einselement.

Beweis

Es gilt $E \in \mathcal{H} \neq \emptyset$. Seien $A := \begin{pmatrix} z_1 & -w_1 \\ \overline{w_1} & \overline{z_1} \end{pmatrix}$, $B := \begin{pmatrix} z_2 & -w_2 \\ \overline{w_2} & \overline{z_2} \end{pmatrix} \in \mathcal{H}$ und $\lambda \in \mathbb{R}$, dann gilt

$$\lambda A + B = \lambda \begin{pmatrix} z_1 & -w_1 \\ \overline{w_1} & \overline{z_1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} z_2 & -w_2 \\ \overline{w_2} & \overline{z_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda z_1 + z_2 & -(\lambda w_1 + w_2) \\ \overline{\lambda w_1 + w_2} & \overline{\lambda z_1 + z_2} \end{pmatrix} \in \mathcal{H}.$$

Damit gilt $\mathcal{H} \leqslant Mat(2, \mathbb{C})$

Matrizenalgebra $\mathcal{H}$

Satz

Die Menge $\mathcal{H} = \left\{ \begin{pmatrix} z & -w \\ \overline{w} & \overline{z} \end{pmatrix} \mid z, w \in \mathbb{C} \right\}$ ist eine assoziative, nullteilerfreie $\mathbb{R}$ -Unteralgebra von $\text{Mat}(2, \mathbb{C})$ mit der Einheitsmatrix als Einselement.

Beweis

Es gilt $E \in \mathcal{H} \neq \emptyset$. Seien $A := \begin{pmatrix} z_1 & -w_1 \\ \overline{w_1} & \overline{z_1} \end{pmatrix}$, $B := \begin{pmatrix} z_2 & -w_2 \\ \overline{w_2} & \overline{z_2} \end{pmatrix} \in \mathcal{H}$ und $\lambda \in \mathbb{R}$, dann gilt

$$\lambda A + B = \lambda \begin{pmatrix} z_1 & -w_1 \\ \overline{w_1} & \overline{z_1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} z_2 & -w_2 \\ \overline{w_2} & \overline{z_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda z_1 + z_2 & -(\lambda w_1 + w_2) \\ \overline{\lambda w_1 + w_2} & \overline{\lambda z_1 + z_2} \end{pmatrix} \in \mathcal{H}.$$

Damit gilt $\mathcal{H} \leq \text{Mat}(2, \mathbb{C})$ und die Abgeschlossenheit der Multiplikation folgt mit

$$AB = \begin{pmatrix} z_1 & -w_1 \\ \overline{w_1} & \overline{z_1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_2 & -w_2 \\ \overline{w_2} & \overline{z_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_1 z_2 - w_1 \overline{w_2} & -(z_1 w_2 + w_1 \overline{z_2}) \\ \overline{z_1 w_2 + w_1 \overline{z_2}} & \overline{z_1 z_2 - w_1 \overline{w_2}} \end{pmatrix} \in \mathcal{H}.$$

Matrizenalgebra $\mathcal{H}$

Satz

Die Menge $\mathcal{H} = \left\{ \begin{pmatrix} z & -w \\ \overline{w} & \overline{z} \end{pmatrix} \mid z, w \in \mathbb{C} \right\}$ ist eine assoziative, nullteilerfreie $\mathbb{R}$ -Unteralgebra von $Mat(2, \mathbb{C})$ mit der Einheitsmatrix als Einselement.

Beweis

Es gilt $E \in \mathcal{H} \neq \emptyset$. Seien $A := \begin{pmatrix} z_1 & -w_1 \\ \overline{w_1} & \overline{z_1} \end{pmatrix}$, $B := \begin{pmatrix} z_2 & -w_2 \\ \overline{w_2} & \overline{z_2} \end{pmatrix} \in \mathcal{H}$ und $\lambda \in \mathbb{R}$, dann gilt

$$\lambda A + B = \lambda \begin{pmatrix} z_1 & -w_1 \\ \overline{w_1} & \overline{z_1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} z_2 & -w_2 \\ \overline{w_2} & \overline{z_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda z_1 + z_2 & -(\lambda w_1 + w_2) \\ \overline{\lambda w_1 + w_2} & \overline{\lambda z_1 + z_2} \end{pmatrix} \in \mathcal{H}.$$

Damit gilt $\mathcal{H} \leq Mat(2, \mathbb{C})$ und die Abgeschlossenheit der Multiplikation folgt mit

$$AB = \begin{pmatrix} z_1 & -w_1 \\ \overline{w_1} & \overline{z_1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_2 & -w_2 \\ \overline{w_2} & \overline{z_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_1 z_2 - w_1 \overline{w_2} & -(z_1 w_2 + w_1 \overline{z_2}) \\ \overline{z_1 w_2 + w_1 \overline{z_2}} & \overline{z_1 z_2 - w_1 \overline{w_2}} \end{pmatrix} \in \mathcal{H}.$$

Die Assoziativität der Verknüpfung wird direkt von $Mat(2, \mathbb{C})$ vererbt.

Isomorphismus $\Phi : \mathbb{H} \rightarrow \mathcal{H}$

Zunächst gilt für alle $\begin{pmatrix} z & -w \\ \bar{w} & \bar{z} \end{pmatrix} \in \mathcal{H}$:

$$\det\left(\begin{pmatrix} z & -w \\ \bar{w} & \bar{z} \end{pmatrix}\right) = z\bar{z} - \bar{w}(-w) = |z|^2 + |w|^2.$$

Isomorphismus $\Phi : \mathbb{H} \rightarrow \mathcal{H}$

Zunächst gilt für alle $\begin{pmatrix} z & -w \\ \bar{w} & \bar{z} \end{pmatrix} \in \mathcal{H}$:

$$\det\left(\begin{pmatrix} z & -w \\ \bar{w} & \bar{z} \end{pmatrix}\right) = z\bar{z} - \bar{w}(-w) = |z|^2 + |w|^2.$$

Sei nun angenommen $AB = 0$, dann folgt:

$$0 = \det(AB) = \det(A) \cdot \det(B) \implies \det(A) = 0 \vee \det(B) = 0 \implies A = 0 \vee B = 0. \quad \square$$

Isomorphismus $\Phi : \mathbb{H} \rightarrow \mathcal{H}$

Satz

Die Abbildung

$$\Phi : \mathbb{H} \rightarrow \mathcal{H}, (\alpha, \beta, \gamma, \delta) \mapsto \begin{pmatrix} \alpha + \beta i & -\gamma - \delta i \\ \gamma - \delta i & \alpha - \beta i \end{pmatrix}$$

ist ein $\mathbb{R}$ -Algebra-Isomorphismus

Isomorphismus $\Phi : \mathbb{H} \rightarrow \mathcal{H}$

Satz

Die Abbildung

$$\Phi : \mathbb{H} \rightarrow \mathcal{H}, (\alpha, \beta, \gamma, \delta) \mapsto \begin{pmatrix} \alpha + \beta i & -\gamma - \delta i \\ \gamma - \delta i & \alpha - \beta i \end{pmatrix}$$

ist ein $\mathbb{R}$ -Algebra-Isomorphismus und es gilt:

$$\Phi(e) = E, \quad \Phi(i) = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} =: I, \quad \Phi(j) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} =: J, \quad \Phi(k) = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{pmatrix} =: K.$$

Isomorphismus $\Phi : \mathbb{H} \rightarrow \mathcal{H}$

Satz

Die Abbildung

$$\Phi : \mathbb{H} \rightarrow \mathcal{H}, (\alpha, \beta, \gamma, \delta) \mapsto \begin{pmatrix} \alpha + \beta i & -\gamma - \delta i \\ \gamma - \delta i & \alpha - \beta i \end{pmatrix}$$

ist ein $\mathbb{R}$ -Algebra-Isomorphismus und es gilt:

$$\Phi(e) = E, \quad \Phi(i) = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} =: I, \quad \Phi(j) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} =: J, \quad \Phi(k) = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{pmatrix} =: K.$$

Beweis

Die Abbildung Φ ist wohldefiniert und $\mathbb{R}$ -linear.

Isomorphismus $\Phi : \mathbb{H} \rightarrow \mathcal{H}$

Satz

Die Abbildung

$$\Phi : \mathbb{H} \rightarrow \mathcal{H}, (\alpha, \beta, \gamma, \delta) \mapsto \begin{pmatrix} \alpha + \beta i & -\gamma - \delta i \\ \gamma - \delta i & \alpha - \beta i \end{pmatrix}$$

ist ein $\mathbb{R}$ -Algebra-Isomorphismus und es gilt:

$$\Phi(e) = E, \quad \Phi(i) = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} =: I, \quad \Phi(j) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} =: J, \quad \Phi(k) = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{pmatrix} =: K.$$

Beweis

Die Abbildung Φ ist wohldefiniert und $\mathbb{R}$ -linear. Da für die Bilder von e, i, j, k die Hamiltonischen Bedingungen $I^2 = J^2 = -E$, $IJ = -JI = K$

Isomorphismus $\Phi : \mathbb{H} \rightarrow \mathcal{H}$

Satz

Die Abbildung

$$\Phi : \mathbb{H} \rightarrow \mathcal{H}, (\alpha, \beta, \gamma, \delta) \mapsto \begin{pmatrix} \alpha + \beta i & -\gamma - \delta i \\ \gamma - \delta i & \alpha - \beta i \end{pmatrix}$$

ist ein $\mathbb{R}$ -Algebra-Isomorphismus und es gilt:

$$\Phi(e) = E, \quad \Phi(i) = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} =: I, \quad \Phi(j) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} =: J, \quad \Phi(k) = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{pmatrix} =: K.$$

Beweis

Die Abbildung Φ ist wohldefiniert und $\mathbb{R}$ -linear. Da für die Bilder von e, i, j, k die Hamiltonischen Bedingungen $I^2 = J^2 = -E$, $IJ = -JI = K$ und folglich mit der Assoziativität in $\mathcal{H}$ auch $K^2 = (IJ)(-JI) = -I(JJ)I = -I(-E)I = I^2 = -E$ gelten,

Isomorphismus $\Phi : \mathbb{H} \rightarrow \mathcal{H}$

Satz

Die Abbildung

$$\Phi : \mathbb{H} \rightarrow \mathcal{H}, (\alpha, \beta, \gamma, \delta) \mapsto \begin{pmatrix} \alpha + \beta i & -\gamma - \delta i \\ \gamma - \delta i & \alpha - \beta i \end{pmatrix}$$

ist ein $\mathbb{R}$ -Algebra-Isomorphismus und es gilt:

$$\Phi(e) = E, \quad \Phi(i) = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} =: I, \quad \Phi(j) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} =: J, \quad \Phi(k) = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{pmatrix} =: K.$$

Beweis

Die Abbildung Φ ist wohldefiniert und $\mathbb{R}$ -linear. Da für die Bilder von e, i, j, k die Hamiltonischen Bedingungen $I^2 = J^2 = -E$, $IJ = -JI = K$ und folglich mit der Assoziativität in $\mathcal{H}$ auch $K^2 = (IJ)(-JI) = -I(JJ)I = -I(-E)I = I^2 = -E$ gelten, folgt

$$\forall q, p \in \mathbb{H} : \Phi(qp) = \Phi(q)\Phi(p).$$

□

Isomorphismus $\Phi : \mathbb{H} \rightarrow \mathcal{H}$

Korollar

Die Quaternionen $\mathbb{H}$ sind eine assoziative, nullteilerfreie $\mathbb{R}$ -Algebra mit Einselement.

Imaginärraum der Quaternionen

Imaginärraum $\text{Im}\mathbb{H}$

Definition (Imaginärraum von $\mathbb{H}$)

Der dreidimensionale Untervektorraum $\text{Im}\mathbb{H} := \mathbb{R}i + \mathbb{R}j + \mathbb{R}k$ von $\mathbb{H}$ heißt Imaginärraum von $\mathbb{H}$. Die Elemente von $\text{Im}\mathbb{H}$ heißen rein-imaginär.

Imaginärraum $\text{Im}\mathbb{H}$

Definition (Imaginärraum von $\mathbb{H}$)

Der dreidimensionale Untervektorraum $\text{Im}\mathbb{H} := \mathbb{R}i + \mathbb{R}j + \mathbb{R}k$ von $\mathbb{H}$ heißt Imaginärraum von $\mathbb{H}$. Die Elemente von $\text{Im}\mathbb{H}$ heißen rein-imaginär.

Lemma

Die Untervektorräume $\mathbb{R}e$ und $\text{Im}\mathbb{H}$ von $\mathbb{H}$ bilden eine direkte Summe von Vektorräumen, d.h.

$$\mathbb{H} = \mathbb{R}e \oplus \text{Im}\mathbb{H}.$$

Imaginärraum $Im\mathbb{H}$

Definition (Imaginärraum von $\mathbb{H}$)

Der dreidimensionale Untervektorraum $Im\mathbb{H} := \mathbb{R}i + \mathbb{R}j + \mathbb{R}k$ von $\mathbb{H}$ heißt Imaginärraum von $\mathbb{H}$. Die Elemente von $Im\mathbb{H}$ heißen rein-imaginär.

Lemma

Die Untervektorräume $\mathbb{R}e$ und $Im\mathbb{H}$ von $\mathbb{H}$ bilden eine direkte Summe von Vektorräumen, d.h.

$$\mathbb{H} = \mathbb{R}e \oplus Im\mathbb{H}.$$

Beweis

Da $\{e, i, j, k\}$ eine Basis von $\mathbb{H}$ ist, gilt $\langle \mathbb{R}e \cup Im\mathbb{H} \rangle = \mathbb{H}$ und folglich gilt für $q \in \mathbb{R}e \cap Im\mathbb{H}$ beliebig, existieren $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$, sodass $q = \alpha e + \beta i + \gamma j + \delta k$. Mit $q \in \mathbb{R}e \cap Im\mathbb{H}$ folgt direkt $\alpha = \beta = \gamma = \delta = 0$, also $\mathbb{R}e \cap Im\mathbb{H} = \{0\}$. □

Bemerkung

1. Die Elemente des Imaginärraums heißen vektorielle Quaternionen.

Bemerkung

1. Die Elemente des Imaginärraums heißen vektorielle Quaternionen.
2. $Im\mathbb{H}$ ist ein $\mathbb{R}$ -Untervektorraum, jedoch keine $\mathbb{R}$ -Unteralgebra von $\mathbb{H}$, denn $i \in Im\mathbb{H}$, jedoch $i^2 = -e \in \mathbb{R}e$, also $i^2 \notin Im\mathbb{H}$.

Bemerkung

1. Die Elemente des Imaginärraums heißen vektorielle Quaternionen.
2. $Im\mathbb{H}$ ist ein $\mathbb{R}$ -Untervektorraum, jedoch keine $\mathbb{R}$ -Unteralgebra von $\mathbb{H}$, denn $i \in Im\mathbb{H}$, jedoch $i^2 = -e \in \mathbb{R}e$, also $i^2 \notin Im\mathbb{H}$.
3. Mit der Zerlegung $\mathbb{H} = \mathbb{R}e \oplus Im\mathbb{H}$ gilt

$$\forall q \in \mathbb{H} \exists \alpha \in \mathbb{R}, u \in Im\mathbb{H} : q = \alpha e + u.$$

Dann heißt αe der skalare Anteil (oder Realteil) und u der vektorielle Anteil (oder Imaginärteil) von q .

Lemma

Betrachte die assoziative, nullteilerfreie $\mathbb{R}$ -Algebra $\mathcal{H}$. Dann gilt

$$\forall A \in \mathcal{H} : A^2 - \text{Spur}(A)A + \det(A)E = 0.$$

Lemma

Betrachte die assoziative, nullteilerfreie $\mathbb{R}$ -Algebra $\mathcal{H}$. Dann gilt

$$\forall A \in \mathcal{H} : A^2 - \text{Spur}(A)A + \det(A)E = 0.$$

Beweis: Sei $A := \begin{pmatrix} z & -w \\ \bar{w} & \bar{z} \end{pmatrix} \in \mathcal{H}$ beliebig. Dann gilt

$$\bullet A^2 = \begin{pmatrix} z & -w \\ \bar{w} & \bar{z} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z & -w \\ \bar{w} & \bar{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z^2 - w\bar{w} & -zw - \bar{z}w \\ z\bar{w} + \bar{z}w & \bar{z}^2 - w\bar{w} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z^2 - |w|^2 & -2\text{Re}(z)w \\ 2\text{Re}(z)\bar{w} & \bar{z}^2 - |w|^2 \end{pmatrix}$$

Lemma

Betrachte die assoziative, nullteilerfreie $\mathbb{R}$ -Algebra $\mathcal{H}$. Dann gilt

$$\forall A \in \mathcal{H} : A^2 - \text{Spur}(A)A + \det(A)E = 0.$$

Beweis: Sei $A := \begin{pmatrix} z & -w \\ \bar{w} & \bar{z} \end{pmatrix} \in \mathcal{H}$ beliebig. Dann gilt

- $A^2 = \begin{pmatrix} z & -w \\ \bar{w} & \bar{z} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z & -w \\ \bar{w} & \bar{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z^2 - w\bar{w} & -zw - \bar{z}w \\ z\bar{w} + \bar{z}\bar{w} & \bar{z}^2 - w\bar{w} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z^2 - |w|^2 & -2\text{Re}(z)w \\ 2\text{Re}(z)\bar{w} & \bar{z}^2 - |w|^2 \end{pmatrix}$
- $\text{Spur}(A)A = (z + \bar{z})A = \begin{pmatrix} 2\text{Re}(z)z & -2\text{Re}(z)w \\ 2\text{Re}(z)\bar{w} & 2\text{Re}(z)\bar{z} \end{pmatrix}$

Lemma

Betrachte die assoziative, nullteilerfreie $\mathbb{R}$ -Algebra $\mathcal{H}$. Dann gilt

$$\forall A \in \mathcal{H} : A^2 - \text{Spur}(A)A + \det(A)E = 0.$$

Beweis: Sei $A := \begin{pmatrix} z & -w \\ \bar{w} & \bar{z} \end{pmatrix} \in \mathcal{H}$ beliebig. Dann gilt

- $A^2 = \begin{pmatrix} z & -w \\ \bar{w} & \bar{z} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z & -w \\ \bar{w} & \bar{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z^2 - w\bar{w} & -zw - \bar{z}w \\ z\bar{w} + \bar{z}w & \bar{z}^2 - w\bar{w} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z^2 - |w|^2 & -2\text{Re}(z)w \\ 2\text{Re}(z)\bar{w} & \bar{z}^2 - |w|^2 \end{pmatrix}$
- $\text{Spur}(A)A = (z + \bar{z})A = \begin{pmatrix} 2\text{Re}(z)z & -2\text{Re}(z)w \\ 2\text{Re}(z)\bar{w} & 2\text{Re}(z)\bar{z} \end{pmatrix}$
- $\det(A)E = \begin{pmatrix} |z|^2 + |w|^2 & 0 \\ 0 & |z|^2 + |w|^2 \end{pmatrix}$

Fortsetzung Beweises

Damit folgt

$$\begin{aligned} A^2 - \text{Spur}(A)A &= \begin{pmatrix} z^2 - |w|^2 & -2\text{Re}(z)w \\ 2\text{Re}(z)\bar{w} & \bar{z}^2 - |w|^2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2\text{Re}(z)z & -2\text{Re}(z)w \\ 2\text{Re}(z)\bar{w} & 2\text{Re}(z)\bar{z} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -|z|^2 - |w|^2 & 0 \\ 0 & -|z|^2 - |w|^2 \end{pmatrix} = -\det(A)E, \end{aligned}$$

Fortsetzung Beweises

Damit folgt

$$\begin{aligned} A^2 - \operatorname{Spur}(A)A &= \begin{pmatrix} z^2 - |w|^2 & -2\operatorname{Re}(z)w \\ 2\operatorname{Re}(z)\bar{w} & \bar{z}^2 - |w|^2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2\operatorname{Re}(z)z & -2\operatorname{Re}(z)w \\ 2\operatorname{Re}(z)\bar{w} & 2\operatorname{Re}(z)\bar{z} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -|z|^2 - |w|^2 & 0 \\ 0 & -|z|^2 - |w|^2 \end{pmatrix} = -\det(A)E, \end{aligned}$$

denn für $z := x + iy \in \mathbb{C}$ beliebig gilt

$$z^2 - 2\operatorname{Re}(z)z = x^2 + 2ixy - y^2 - 2x(x + iy) = -(x^2 + y^2) = -|z|^2.$$

Fortsetzung Beweises

Damit folgt

$$\begin{aligned} A^2 - \operatorname{Spur}(A)A &= \begin{pmatrix} z^2 - |w|^2 & -2\operatorname{Re}(z)w \\ 2\operatorname{Re}(z)\bar{w} & \bar{z}^2 - |w|^2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2\operatorname{Re}(z)z & -2\operatorname{Re}(z)w \\ 2\operatorname{Re}(z)\bar{w} & 2\operatorname{Re}(z)\bar{z} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -|z|^2 - |w|^2 & 0 \\ 0 & -|z|^2 - |w|^2 \end{pmatrix} = -\det(A)E, \end{aligned}$$

denn für $z := x + iy \in \mathbb{C}$ beliebig gilt

$$z^2 - 2\operatorname{Re}(z)z = x^2 + 2ixy - y^2 - 2x(x + iy) = -(x^2 + y^2) = -|z|^2.$$

Damit ist

$$A^2 - \operatorname{Spur}(A)A + \det(A)E = 0.$$

□

Imaginärraum $Im\mathbb{H}$

$$\forall A \in \mathcal{H} : A^2 = \text{Spur}(A)A - \det(A)E.$$

Satz

Für den Imaginärraum gilt $Im\mathbb{H} = \{q \in \mathbb{H} \mid q^2 \in \mathbb{R}e \wedge q \notin \mathbb{R}e \setminus \{0\}\}$.

Imaginärraum $Im\mathbb{H}$

$$\forall A \in \mathcal{H} : A^2 = \text{Spur}(A)A - \det(A)E.$$

Satz

Für den Imaginärraum gilt $Im\mathbb{H} = \{q \in \mathbb{H} \mid q^2 \in \mathbb{R}e \wedge q \notin \mathbb{R}e \setminus \{0\}\}$.

Beweis

Sei $q := \alpha e + \beta i + \gamma j + \delta k \in \mathbb{H}$. Dann gilt mit dem Isomorphismus $\Phi : \mathbb{H} \rightarrow \mathcal{H}$, dass

$$\Phi(q) = \begin{pmatrix} \alpha + \beta i & -\gamma - \delta i \\ \gamma - \delta i & \alpha - \beta i \end{pmatrix}.$$

Imaginärraum $Im\mathbb{H}$

$$\forall A \in \mathcal{H} : A^2 = Spur(A)A - det(A)E.$$

Satz

Für den Imaginärraum gilt $Im\mathbb{H} = \{q \in \mathbb{H} \mid q^2 \in \mathbb{R}e \wedge q \notin \mathbb{R}e \setminus \{0\}\}$.

Beweis

Sei $q := \alpha e + \beta i + \gamma j + \delta k \in \mathbb{H}$. Dann gilt mit dem Isomorphismus $\Phi : \mathbb{H} \rightarrow \mathcal{H}$, dass

$\Phi(q) = \begin{pmatrix} \alpha + \beta i & -\gamma - \delta i \\ \gamma - \delta i & \alpha - \beta i \end{pmatrix}$. Damit folgt mit dem obigen Lemma

$$\Phi(q^2) = \Phi(q)^2 = Spur(\Phi(q))\Phi(q) - det(\Phi(q))E = 2\alpha\Phi(q) - (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2)E$$

Imaginärraum $Im\mathbb{H}$

$$\forall A \in \mathcal{H} : A^2 = \text{Spur}(A)A - \det(A)E.$$

Satz

Für den Imaginärraum gilt $Im\mathbb{H} = \{q \in \mathbb{H} \mid q^2 \in \mathbb{R}e \wedge q \notin \mathbb{R}e \setminus \{0\}\}$.

Beweis

Sei $q := \alpha e + \beta i + \gamma j + \delta k \in \mathbb{H}$. Dann gilt mit dem Isomorphismus $\Phi : \mathbb{H} \rightarrow \mathcal{H}$, dass

$$\Phi(q) = \begin{pmatrix} \alpha + \beta i & -\gamma - \delta i \\ \gamma - \delta i & \alpha - \beta i \end{pmatrix}. \text{ Damit folgt mit dem obigen Lemma}$$

$$\Phi(q^2) = \Phi(q)^2 = \text{Spur}(\Phi(q))\Phi(q) - \det(\Phi(q))E = 2\alpha\Phi(q) - (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2)E$$

Folglich ist

$$q^2 = \Phi^{-1}(\Phi(q^2)) = \Phi^{-1}(2\alpha\Phi(q) - (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2)E) = 2\alpha q - (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2)e.$$

Imaginärraum $Im\mathbb{H}$

$$\forall A \in \mathcal{H} : A^2 = \text{Spur}(A)A - \det(A)E.$$

Satz

Für den Imaginärraum gilt $Im\mathbb{H} = \{q \in \mathbb{H} \mid q^2 \in \mathbb{R}e \wedge q \notin \mathbb{R}e \setminus \{0\}\}$.

Beweis

Sei $q := \alpha e + \beta i + \gamma j + \delta k \in \mathbb{H}$. Dann gilt mit dem Isomorphismus $\Phi : \mathbb{H} \rightarrow \mathcal{H}$, dass

$$\Phi(q) = \begin{pmatrix} \alpha + \beta i & -\gamma - \delta i \\ \gamma - \delta i & \alpha - \beta i \end{pmatrix}. \text{ Damit folgt mit dem obigen Lemma}$$

$$\Phi(q^2) = \Phi(q)^2 = \text{Spur}(\Phi(q))\Phi(q) - \det(\Phi(q))E = 2\alpha\Phi(q) - (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2)E$$

Folglich ist

$$q^2 = \Phi^{-1}(\Phi(q^2)) = \Phi^{-1}(2\alpha\Phi(q) - (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2)E) = 2\alpha q - (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2)e.$$

Also gilt $q \in Im\mathbb{H} \iff \alpha = 0$, womit $q^2 = -(\beta^2 + \gamma^2 + \delta^2)e = -\lambda e \in \mathbb{R}e$ mit $\lambda := \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2$ folgt. □

Imaginärraum $\operatorname{Im}\mathbb{H}$

Bemerkung

Jeder Untervektorraum $U \leq \mathbb{H}$ mit $\dim(U) = 2$ und $\mathbb{R}e \leq U$ ist eine $\mathbb{R}$ -Unteralgebra von H und es gilt $U \cong \mathbb{C}$

Imaginärraum $\operatorname{Im}\mathbb{H}$

Bemerkung

Jeder Untervektorraum $U \leq \mathbb{H}$ mit $\dim(U) = 2$ und $\mathbb{R}e \leq U$ ist eine $\mathbb{R}$ -Unteralgebra von H und es gilt $U \cong \mathbb{C}$

Beweis

Sei $U \leq \mathbb{H}$ mit $\dim(U) = 2$ und $\mathcal{B} := \{e, v\}$ eine Basis von U .

Seien $x := \alpha_1 e + \beta_1 v$ und $y := \alpha_2 e + \beta_2 v$ in U .

Bemerkung

Jeder Untervektorraum $U \leq \mathbb{H}$ mit $\dim(U) = 2$ und $\mathbb{R}e \leq U$ ist eine $\mathbb{R}$ -Unteralgebra von H und es gilt $U \cong \mathbb{C}$

Beweis

Sei $U \leq \mathbb{H}$ mit $\dim(U) = 2$ und $\mathcal{B} := \{e, v\}$ eine Basis von U .

Seien $x := \alpha_1 e + \beta_1 v$ und $y := \alpha_2 e + \beta_2 v$ in U . Dann gilt

$$\begin{aligned} xy &= (\alpha_1 e + \beta_1 v)(\alpha_2 e + \beta_2 v) = \alpha_1 \alpha_2 e + (\alpha_1 \beta_2 + \beta_1 \alpha_2) v + \beta_1 \beta_2 v^2 \\ &= \alpha_1 \alpha_2 e + (\alpha_1 \beta_2 + \beta_1 \alpha_2) v + \beta_1 \beta_2 (-\lambda e) = (\alpha_1 \alpha_2 - \lambda \beta_1 \beta_2) e + (\alpha_1 \beta_2 + \beta_1 \alpha_2) v \in U \end{aligned}$$

Imaginärraum $\text{Im}\mathbb{H}$

Bemerkung

Jeder Untervektorraum $U \leq \mathbb{H}$ mit $\dim(U) = 2$ und $\mathbb{R}e \leq U$ ist eine $\mathbb{R}$ -Unteralgebra von H und es gilt $U \cong \mathbb{C}$

Beweis

Sei $U \leq \mathbb{H}$ mit $\dim(U) = 2$ und $\mathcal{B} := \{e, v\}$ eine Basis von U .

Seien $x := \alpha_1 e + \beta_1 v$ und $y := \alpha_2 e + \beta_2 v$ in U . Dann gilt

$$\begin{aligned} xy &= (\alpha_1 e + \beta_1 v)(\alpha_2 e + \beta_2 v) = \alpha_1 \alpha_2 e + (\alpha_1 \beta_2 + \beta_1 \alpha_2)v + \beta_1 \beta_2 v^2 \\ &= \alpha_1 \alpha_2 e + (\alpha_1 \beta_2 + \beta_1 \alpha_2)v + \beta_1 \beta_2 (-\lambda e) = (\alpha_1 \alpha_2 - \lambda) e + (\alpha_1 \beta_2 + \beta_1 \alpha_2)v \in U \end{aligned}$$

Definiere nun $\phi : U \rightarrow \mathbb{C}$ durch die Basis $\mathcal{B}$. Mit dem vorherigen Satz existiert

$\lambda \in \mathbb{R}_{>0} : v^2 = -\lambda e$.

Imaginärraum $\text{Im}\mathbb{H}$

Bemerkung

Jeder Untervektorraum $U \leq \mathbb{H}$ mit $\dim(U) = 2$ und $\mathbb{R}e \leq U$ ist eine $\mathbb{R}$ -Unteralgebra von H und es gilt $U \cong \mathbb{C}$

Beweis

Sei $U \leq \mathbb{H}$ mit $\dim(U) = 2$ und $\mathcal{B} := \{e, v\}$ eine Basis von U .

Seien $x := \alpha_1 e + \beta_1 v$ und $y := \alpha_2 e + \beta_2 v$ in U . Dann gilt

$$\begin{aligned} xy &= (\alpha_1 e + \beta_1 v)(\alpha_2 e + \beta_2 v) = \alpha_1 \alpha_2 e + (\alpha_1 \beta_2 + \beta_1 \alpha_2) v + \beta_1 \beta_2 v^2 \\ &= \alpha_1 \alpha_2 e + (\alpha_1 \beta_2 + \beta_1 \alpha_2) v + \beta_1 \beta_2 (-\lambda e) = (\alpha_1 \alpha_2 - \lambda \beta_1 \beta_2) e + (\alpha_1 \beta_2 + \beta_1 \alpha_2) v \in U \end{aligned}$$

Definiere nun $\phi : U \rightarrow \mathbb{C}$ durch die Basis $\mathcal{B}$. Mit dem vorherigen Satz existiert

$\lambda \in \mathbb{R}_{>0} : v^2 = -\lambda e$. Setze $\phi(e) := 1$ und $\phi(v) := \sqrt{\lambda} i$, dann ist ϕ ein Isomorphismus, denn:

Bemerkung

Jeder Untervektorraum $U \leq \mathbb{H}$ mit $\dim(U) = 2$ und $\mathbb{R}e \leq U$ ist eine $\mathbb{R}$ -Unteralgebra von H und es gilt $U \cong \mathbb{C}$

Beweis

Sei $U \leq \mathbb{H}$ mit $\dim(U) = 2$ und $\mathcal{B} := \{e, v\}$ eine Basis von U .

Seien $x := \alpha_1 e + \beta_1 v$ und $y := \alpha_2 e + \beta_2 v$ in U . Dann gilt

$$\begin{aligned} xy &= (\alpha_1 e + \beta_1 v)(\alpha_2 e + \beta_2 v) = \alpha_1 \alpha_2 e + (\alpha_1 \beta_2 + \beta_1 \alpha_2) v + \beta_1 \beta_2 v^2 \\ &= \alpha_1 \alpha_2 e + (\alpha_1 \beta_2 + \beta_1 \alpha_2) v + \beta_1 \beta_2 (-\lambda e) = (\alpha_1 \alpha_2 - \lambda \beta_1 \beta_2) e + (\alpha_1 \beta_2 + \beta_1 \alpha_2) v \in U \end{aligned}$$

Definiere nun $\phi : U \rightarrow \mathbb{C}$ durch die Basis $\mathcal{B}$. Mit dem vorherigen Satz existiert

$\lambda \in \mathbb{R}_{>0} : v^2 = -\lambda e$. Setze $\phi(e) := 1$ und $\phi(v) := \sqrt{\lambda} i$, dann ist ϕ ein Isomorphismus, denn:
Da $\{1, \sqrt{\lambda} i\}$ eine Basis von $\mathbb{C}$ ist, ist ϕ bijektiv und mit

$$\phi(v^2) = \phi(-\lambda e) = -\lambda \phi(e) = -\lambda = \phi(v) \phi(v)$$

folgt die Behauptung. □

Vielen Dank für die Aufmerksamkeit