

Fundamentalfolgen

Ziel: $\mathbb{R}$ aus Folgen in $\mathbb{Q}$ konstruieren

1. $r_n \rightarrow \underline{x} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ z.B. $x = \sqrt{2}$

↳ brauchen Konvergenz, die nicht vom Grenzwert abhängt.

2. $(1, 1, 1, \dots) \rightarrow 1$, $(0, 1, 1, 1, \dots) \rightarrow 1$

3. $r_n \rightarrow x$, $s_n \rightarrow x \Leftrightarrow r_n - s_n \rightarrow 0$

Definition $(r_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $r_n \in \mathbb{Q}$ heißt rational konvergent wenn es $r \in \mathbb{Q}$ gibt, s.d.

$$\forall \varepsilon > 0 \exists k \in \mathbb{N} : |r_n - r| < \varepsilon \quad \forall n \geq k \quad \left(\lim_{n \rightarrow \infty} r_n = r \right)$$

Definition $(r_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $r_n \in \mathbb{Q}$ heißt Cauchy- oder Fundamentalfolge, wenn gilt:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists k \in \mathbb{N} : \forall m, n \geq k : |r_m - r_n| < \varepsilon$$

Satz Jede konvergente Folge ist eine Cauchyfolge.

Bew Sei (r_n) Folge mit $|r_n - r| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall n \geq k$: $\forall m, n \geq k$

$$|r_m - r_n| = |r_m - r + r - r_n| \leq |r_m - r| + |r_n - r| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \quad \square$$

Beim Umkehrung gilt i. A. nicht.

Satz Die Menge F aller Fundamentallösungen ist ein Ring mit 1 :

$$+ : (r_n) + (s_n) := (r_n + s_n)$$

$$\cdot : (r_n) \cdot (s_n) := (r_n \cdot s_n)$$

Bew $(1)_{n \in \mathbb{N}}$ ist 1 . ✓

$(0)_{n \in \mathbb{N}}$ ist 0 . ✓

Assoziativität, Kommutativität & Distr. ✓

$(r_n) : (-r_n)$ ✓

ZZ: $+$ und $\cdot$ sind wohldefiniert.

Seien $(r_n), (s_n) \in F$. Dann gibt k_r, k_s s.d. $|r_m - r_n| < \frac{\epsilon}{2}$

$\forall n, m \geq k_r$ und $|s_m - s_n| < \frac{\epsilon}{2} \forall n, m \geq k_s$. Dies gilt

$k = \max\{k_r, k_s\}$. Dann gilt:

$$|r_m + s_m - (r_n + s_n)| \leq |r_m - r_n| + |s_m - s_n| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon \quad \forall n, m \geq k$$

Sei $(r_n) \in F$, dann gibt es $c \geq 1$ mit $|r_n| < c$.

$$|r_m - r_n| < \frac{\epsilon}{2c}, \quad |s_m - s_n| < \frac{\epsilon}{2c}$$

$$\begin{aligned}
|r_m s_m - r_n s_n| &= |r_m s_m - r_m s_n + r_m s_n - r_n s_n| \\
&= |r_m (s_m - s_n) + s_n (r_m - r_n)| \\
&\leq |r_m| |s_m - s_n| + |s_n| |r_m - r_n| < C \frac{\varepsilon}{2c} + C \frac{\varepsilon}{2c} \\
&= \varepsilon
\end{aligned}$$

Bem: $\varphi: \mathbb{Q} \rightarrow F, r \mapsto (r)$ ist Einbettung. □

Def Eine rationale Folge $(r_n)_{n \in \mathbb{N}}$ heißt

Nullfolge, wenn $\lim_{n \rightarrow \infty} r_n = 0$. Sei N die Menge aller Nullfolgen.

Bem (1) N ist Ideal in F , d.h.

$$(i) (r_n), (s_n) \in N \Rightarrow (r_n + s_n) \in N$$

$$(ii) (r_n) \in N, (s_n) \in F \Rightarrow (r_n \cdot s_n) \in N$$

$$(iii) 0 \in N$$

(2) $(r_n), (s_n) \in F$ heißen quivalent, wenn $(r_n - s_n) \in N$.

Tatsächlich ist dies Äquivalenzrelation.

$$(3) [(r_n)] := (r_n) + N := \{(r_n + h_n) \mid (h_n) \in N\}$$

(4) Da N Ideal ist, ist $\frac{F}{N}$ wohldefinierter kommutativer Ring mit 1. Insbesondere

kann man $r \in \mathbb{Q}$ mit $[(r)]$ identifizieren.

Bew (1) (i) $|r_n|, |s_n| < \frac{\varepsilon}{2}$, $\forall n \geq k$

$$|r_n + s_n - 0| \leq |r_n| + |s_n| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \quad \checkmark$$

$$(ii) |r_n| < \frac{\varepsilon}{c}, |s_n| < c : |r_n s_n - 0| = |r_n| \cdot |s_n| < \frac{\varepsilon}{c} \cdot c = \varepsilon \quad \checkmark$$

Satz $\frac{F}{N}$ ist Körper. Wir setzen $\mathbb{R} := \frac{F}{N}$.

Bew ZZ: $(r_n) + N$, $(r_n) \notin N$ hat multipl. Inverses.

$(\frac{1}{r_n})$ ist Inverses. Wir setzen diese $= 1$.

Bleibt ZZ: $(\frac{1}{r_n})_{n \in \mathbb{N}} \in F$

$$(r_n) \notin N \Rightarrow \exists \delta > 0 : |r_n| > \delta \quad \forall n \geq k. |r_m - r_n| < \delta^2 \varepsilon$$

$$\left| \frac{1}{r_m} - \frac{1}{r_n} \right| = \frac{|r_m - r_n|}{|r_m r_n|} < \frac{\delta^2 \varepsilon}{\delta \cdot \delta} = \varepsilon \quad \checkmark$$

Def Eine rationale Fundamentalfolge (r_n)

heißt positiv, wenn ein $\varepsilon > 0$ existiert, s.d.

$r_n > \varepsilon$ für alle Indizes n (bis auf endlich

Indizes). Sei P diese Menge.

Bem (1) $P+N \subseteq P, P+P \subseteq P, P \cdot P \subseteq P$

$$(2) F = -P \cup N \cup P$$

(3) Wir erhalten eine wohlbestimmte totale Ordnung auf $\mathbb{F}/N$ durch:

$$(r_n) + N \succ (s_n) + N \Leftrightarrow (r_n - s_n) \in P \cup N$$

Satz Die Ordnung ist archimedisch, d.h.

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{F}/N, \alpha, \beta > 0 \exists n \in \mathbb{N} : n\alpha > \beta$$

Bew Da $\beta \in \mathbb{F}/N$ beschränkt ist, gibt es $b \in \mathbb{Q}$:

$$0 < \beta < b. \text{ Für } \alpha \text{ gibt } a \in \mathbb{Q} : 0 < a < \alpha :$$

$$\Rightarrow \exists n : na > b$$

$$\Rightarrow n\alpha > na > b > \beta \quad \square$$

Bem (1) Per Konstruktion ist $p \in \mathbb{F}/N$ Grenzwert einer rationalen Folge.

(2) Jede rationale Fundamentalfolge in $\mathbb{F}/N$ konvergiert.

Satz Eine Folge (p_n) in F_N konvergiert dann,

wenn gilt: $\forall \varepsilon > 0 \exists k: |p_m - p_n| < \varepsilon \quad \forall m, n \geq k$

Bew " $\Leftarrow$ " Nach Bem (1) gibt es für alle p_n ein

$r_n \in \mathbb{Q}$, s.d. $|p_n - r_n| < \frac{1}{n}$. Für $\varepsilon > 0$, wähle k s.d.

$\frac{1}{k} < \frac{\varepsilon}{3}$ und $|p_m - p_n| < \frac{\varepsilon}{3} \quad \forall m, n \geq k$ gilt:

$$\begin{aligned} \text{Dann ist } |r_m - r_n| &\leq |r_m - p_m| + |p_m - p_n| + |p_n - r_n| \\ &< \frac{1}{m} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{1}{n} < \varepsilon. \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} r_n = \rho \in F_N$$

Für $\varepsilon > 0$, wähle Index j s.d. $\frac{1}{j} < \frac{\varepsilon}{2}$, $|p - r_n| < \frac{\varepsilon}{2}$
 $\forall n \geq j$

$$|p - p_n| \leq |p - r_n| + |r_n - p_n| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{1}{n} \leq \varepsilon \quad \forall n \geq j. \quad \square$$