

Reelle Zahlen, Dedekindsche Schnitte

Jonas Langhoff

Universität Hamburg
Nach [Ebbingshaus(1988)]

Februar 18, 2025

Übersicht

1. Reelle Zahlen

- 1.1 Hippasus und das Pentagon
- 1.2 Euxodos und die Proportionenlehre
- 1.3 Irrationalzahlen in der Neuzeitlichen Mathematik
- 1.4 Präzisierung des 19. Jahrhunderts

2. Dedekindsche Schnitte

- 2.1 Die Menge $\mathbb{R}$ der Schnitte
- 2.2 Die Anordnung in $\mathbb{R}$
- 2.3 Die Addition in $\mathbb{R}$
- 2.4 Die Multiplikation in $\mathbb{R}$

Hippasus und das Pentagon

- Ca. 5 Jahrhundert vor Christus Entdeckung inkommensurabler Verhältnisse durch Hippasus von Metapont
- Große Auswirkung in phitagoreischen Kreisen
- Phytagoreer wirkten unter anderem als einflussreiche mathematische Schule

Hippasus und das Pentagon

- Damalige Messpraxis von Streckenverhältnissen war so gegeben:
- Für gegebene Strecke a wurde eine Maßeinheit e m -mal hintereinander angelegt.
- $a = e + \dots + e = m * e$
- a_0 und a_1 sind genau dann kommensurabel, wenn sowohl a_0 als auch a_1 durch e gemessen werden können:
- Sprich $a_0 = m * e$ und $a_1 = n * e$, für natürliche Zahlen m und n

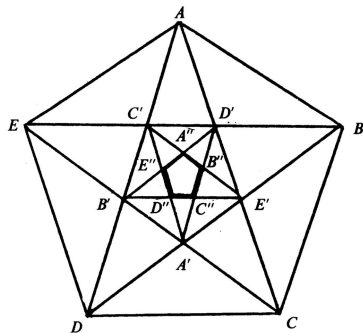
Hippasus und das Pentagon

- Methode eines gemeinsamen Maßes für Strecken a_0 und a_1 nach Euklid:
 $a_0 = n_1 * a_1 + a_2$ mit $a_2 < a_1$
- Entsprechend wird dann das Verfahren fortgesetzt:
 $a_1 = n_2 * a_2 + a_3$ mit $a_3 < a_2$,
 $a_2 = n_3 * a_3 + a_4$ mit $a_4 < a_3$
...
- Wenn a_0 und a_1 ein gemeinsames Maß besitzen bricht das Verfahren ab:
Es gibt ein k mit $a_{k-1} = n_k a_k$ und a_k ist ein Maß von a_0 und a_1

Hippasus und das Pentagon

- Zunächst Überzeugung, dass dieses Verfahren immer abbricht
- Modern gesprochen zeigt das Verfahren nur die Entwicklung in einen Kettenbruch:
$$a_0 : a_1 = n_1 + a_2 : a_1 = n_1 + \frac{1}{a_1 : a_2} = n_1 + \frac{1}{n_2 + a_3 : a_2}$$
$$= n_1 + \frac{1}{n_2 + \frac{1}{a_2 : a_3}} = \dots = n_1 + \frac{1}{n_2 + \frac{1}{n_3 + \dots}}$$
- Hippasus soll an einem Pentagon festgestellt haben, dass zwei Strecken nicht kommensurabel sind

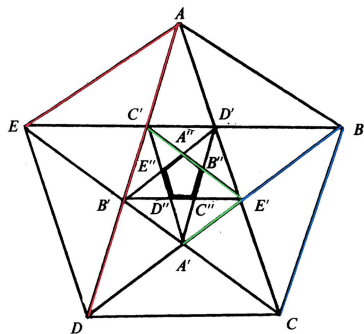
Hippasus und das Pentagon



Betrachte reguläres Pentagon $ABCDE$

- Je eine Seite und Diagonale parallel
- Es gilt also: $AD : AE = BC : BE'$
sowie $BE' = BD - BC$
- denn $BC = AE = DE'$

Hippasus und das Pentagon



- Sei die Diagonale a_0 , die Seite a_1 , sowie $a_2 = a_0 - a_1$
- Es gilt also: $a_0 : a_1 = a_1 : a_2$ insbesondere $a_2 < a_1$
- Als Kettenbruch :

$$a_0 : a_1 = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \dots}}}$$

Euxodos und die Proportionenlehre

- Babylonier rechneten schon mit Annäherungen für irrationale (inkommensurable) Verhältnisse wie 1;25 und 1;24,51,10 für $\sqrt{2}$
- Die grundsätzliche Erkenntnis, dass $\sqrt{2}$ inkommensurabel ist, ist der griechischen Mathematik zu verdanken.
- In Euklids "Elementen" X §115a findet sich folgender Beweis:
Es sei a die Seite und d die Diagonale eines Quadrates.
Offenbar gilt: $d^2 = 2a^2$ mit $d : a = m : n$ m und n kleinstmöglich
Dann ist mit $d^2 : a^2 = m^2 : n^2$ aber auch $d^2 = 2a^2$ also $m^2 = 2n^2$ also ist m gerade.
Da m und n teilerfremd und kleinstmöglich muss n ungerade sein. Aber mit $m = 2l$ wäre $m^2 = 4l^2$
womit $m^2 = 2n^2$ also $n^2 = 2l^2$ eine gerade Zahl womit n gerade und d und a nicht
kommensurabel.

Euxodos und die Proportionenlehre

- Erkenntnis der Irrationalität älter als euklid
Nach Platon zeigte Theodoros von Kyrene bereits die Irrationalität einzelner Quadratwurzeln wie $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, ..., $\sqrt{17}$
- Eudoxos von Knidos schuf eine geometrische Proportionenlehre auch für inkommensurable Größenverhältnisse.
- Diese wurde im Buch V der "Elemente" überliefert:

Euxodos und die Proportionenlehre

- Ausgehende von Größen gleicher Art (Strecken $a, b, \dots$ Flächen $A, B, \dots$)
- Gleiche Größen können addiert werden (Assoziativ- und Kommutativgesetz vorausgesetzt)
- Die Größen gleicher Art werden geordnet $a < b$ wenn es ein c mit $a + c = b$
- Ausgehend davon wird angenommen, dass für $a \neq b$ entweder $a < b$ oder $a > b$ gilt.
- Ganzzahlige Vielfache werden durch wiederholte Addition definiert : für m Summanden gilt $m \cdot a = a + \dots + a$
- Es wird ein meist nach archimedes benanntes Axiom vorausgesetzt: Zu jedem a und b gibt es eine natürliche Zahl n mit $a < n \cdot b$

Euxodos und die Proportionenlehre

- Es werden Verhältnisse gleichartiger Größen verglichen, diese müssen nicht unbedingt kommensurabel sein
- Es wird $a : b = A : B$ definiert, wenn für alle natürlichen Zahlen n und m gilt:
 - $n \cdot a > m \cdot b$ genau dann, wenn $n \cdot A > m \cdot B$,
 - $n \cdot a = m \cdot b$ genau dann, wenn $n \cdot A = m \cdot B$
 - $n \cdot a < m \cdot b$ genau dann, wenn $n \cdot A < m \cdot B$
- Griechen sahen rationale, irrationale Zahlen nicht als Erweiterung sondern, Begriff eigener Art
- Erst im 19. Jahrhundert, gelang es erfolgreich Kalküle, die von Beginn der Neuzeit an entwickelt wurden, konkret zu begründen

Irrationalzahlen in der Neuzeitlichen Mathematik

- Nach der geometrischen Proportionenlehre der Griechen wurde der arithmetische Aspekt sehr wichtig
- Praktisches Berechnen von Näherungswerten:
 - Archimedes schließt π zwischen $3\frac{1}{7}$ und $3\frac{10}{71}$ ein
 - Ptolemaios wählt 3; 8, 30 als Mittelwert von $3\frac{1}{7} = 3; 8, 34$ und $3\frac{10}{71} = 3; 8, 27$
- Indisch-arabische Mathematiker haben einen Einfluss auf die Entwicklung des Zahlenbegriffs
- Abu Kamil (ca 850-930) rechnet mit Quadratwurzelausdrücken nach der regel $\sqrt{p} + \sqrt{q} = \sqrt{p + q + 2 \cdot \sqrt{pq}}$
- Es wird mit Ausdrücken gerechnet, ohne diese als neue Zahlen zu verstehen

Irrationalzahlen in der Neuzeitlichen Mathematik

- S.Stevin (1548-1620) präzisiert durch eine unendlich Folge von Dezimalbrüchen
- In R. Descartes "Geometrie" von 1638 werden Operationen so definiert, dass das Ergebnis zweier Strecken, wieder eine Strecke ergibt
- Die Infinitesimalrechnung treibt die Entwicklung des Zahlenbegriffs im 17. und 18. Jahrhundert weiter voran
- Theorien von Leibniz und Bernoulli bieten neue Möglichkeiten der Zahlendarstellung
- In der "Arithmetica infinitorum" von J. Wallis (1616-1703) findet sich eine unendliche Produktentwicklung:

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdot \dots$$

Irrationalzahlen in der Neuzeitlichen Mathematik

- Darstellungen durch unendliche Summen bzw. Produkte werden allerdings nichts als konvergierende Folge mit Grenzwert definiert
- Vielmehr :

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)}$$

unterscheidet sich von 1 um eine infinitesimal kleine Größe

- L.Euler formuliert 1734 Konvergenzkriterium für Reihen in der Sprache der infinitesimalen Größen

Präzisierung des 19. Jahrhunderts

- Cauchy formuliert das nach ihm bekannte Konvergenzkriterium und setzt es als Eigenschaft der reellen Zahlen voraus
- B.Bolzano beweist unter Voraussetzung des Cauchy-Kriteriums den Zwischenwertsatz
- Unter Weierstrass werden die Überlegungen zu Begründung der reellen Zahlen in mathematische Grundvorlesungen aufgenommen
- Systematische Definition der reellen Zahlen durch Intervallschachtelung wird 1892 von P.Bachmann angegeben
- Cantors Theorie der Fundamentalfolgen bildet Grund für eine weitere Definition der reellen Zahlen

Präzisierung des 19. Jahrhunderts

- Die Proportionenlehre des Euklides wird 1872 von Dedekind erneut aufgegriffen in "Stetigkeit und Irrationalzahlen"
- Frage ob die Proportionenlehre die Theorie der Irrationalzahlen "erledigt" hat, führt noch zu Kontroversen:
- G.Cantor, G.Frege G.Peano und Dedekind geht es um die präzise und explizite Formulierung der mathematischen Grundlagen
- Der Begriff der reellen Zahl wurde noch einmal in der Grundlagendiskussion der 20er Jahre problematisiert und weitere Überlegungen führen bis heute zu Diskussionen.

Dedekindsche Schnitte

- Nach Dedekind lassen sich rationale Zahlen so partitionieren das man die reellen Zahlen darstellen kann.
- Diese Schnitte werden vollständig und total geordnet, sowie eine Addition und Multiplikation für sie eingeführt.
- die Menge $(K, +, \cdot, \leq)$ heißt die Menge der reellen Zahlen genau dann wenn
 - (R1) $(K, +, \cdot)$ ist ein Körper
 - (R2) $\leq$ ist eine lineare Anordnung auf K
 - (R3) Vollständigkeitsaxiom: Jede nicht leere, nach unten beschränkte Teilmenge $M \subset K$ hat ein Infimum in K .

Die Menge $\mathbb{R}$ der Schnitte

- Ein Dedekindscher Schnitt ist dann ein Paar (α, β) von Mengen mit $\alpha, \beta \subset \mathbb{Q}$ die folgende forderungen erfüllen:
 - (D1) Jede rationale Zahl liegt genau in einer der Mengen α, β .
 - (D2) α und β sind nicht leer.
 - (D3) Jedes Element von α ist kleiner als jedes Element von β .
 - (D4) β hat kein kleinstes Element (=Minimum)
- Jeder Schnitt ist durch (α, β) eindeutig bestimmt und wird daher mit β , seiner Obermenge, identifiziert, die folgende Eigenschaften besitzt:
 - (D'1) β und die Komplementärmenge $\bar{\beta} = \mathbb{Q}/\beta$ sind nicht leer.
 - (D'2) Aus $r \in \beta$, $s \in \mathbb{Q}$ und $r < s$ folgt $s \in \beta$.
 - (D'3) β hat kein kleinstes Element.

Die Menge $\mathbb{R}$ der Schnitte

- Griechische Buchstaben $\alpha, \beta, \dots$ bezeichnen im folgenden Obermengen.
- Die Menge aller Dedekindscher Schnitte wird mit $\mathbb{R}$ bezeichnet.
- Jede rationale Zahl s bestimmt einen Schnitt $\underline{s} := \{r : r \in \mathbb{Q}, s < r\}$
- Ein Schnitt α heißt genau dann rational wenn $\bar{\alpha}$ ein größtes Element besitzt
- Nicht alle Schnitte sind rational wie zum Beispiel $\alpha := \{r : r \in \mathbb{Q}, r > 0, r^2 > 2\}$

Die Menge $\mathbb{R}$ der Schnitte

- Die ersten beiden Schnittaxiome für α einfach nachzuweisen

- Für das dritte Axiom:

Sei für jedes $r \in \alpha$ ein $s \in \alpha$ mit $s := \frac{2r+2}{r+2} \geq 0$

Wegen $r - s$ und $r^2 > 2$ mit $r \geq 0$ ist $s < r$

Wegen $s^2 - 2 = \frac{2(r^2-2)}{(r+2)^2}$ und $r^2 > 2$ ist $s^2 > 2$

- Der Schnitt α ist nicht rational, da $\bar{\alpha}$ kein Maximum besitzt:

Für $r \in \bar{\alpha}$ mit $r \geq 0$ (also $r^2 < 2$) wähle man s wie oben. Dann folgt wegen $s^2 < 2$ auch $s \in \bar{\alpha}$ und $r < s$

Die Anordnung in $\mathbb{R}$

- Die Ordnungsrelation für zwei Schnitte $\alpha < \beta$ wird durch die mengentheoretische Inklusion definiert $\beta \subset \alpha$
- Die Ordnung ist total linear: Sei $\alpha \neq \beta$ und $r \in \alpha$ mit $r \notin \beta$. Dann ist $r \in \bar{\beta}$, und für jedes $s \in \beta$ folgt $r < s$ also $s \in \alpha$, womit $\beta \subset \alpha$
- Die Ordnung ist nach R3 vollständig: Sei A eine nach unten beschränkte Menge von Schnitten. Dann ist $\beta = \bigcup_{\alpha \in A} \alpha$ ein Schnitt.
- Führt man diese Schnittbildung erneut über $\mathbb{R}$ durch erhält man nichts Neues.
- Die Einbettung von $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}$, verträgt sich mit der Anordnung. Die rationalen Zahlen liegen dicht in $\mathbb{R}$: Zu je zwei Schnitten (reellen Zahlen) $\alpha < \beta$ gibt es ein $r \in \mathbb{Q}$, so dass $\alpha < \underline{r} < \beta$ ist.

Die Addition in $\mathbb{R}$

- Für zwei Schnitte α und β aus $\mathbb{R}$ definiert man die Summe $\alpha + \beta$ als die Menge $\{r + s : r \in \alpha, s \in \beta\}$
- Die Schnitteigenschaften von $\alpha + \beta$ folgen aus den Eigenschaften von α und β also $\alpha + \beta \in \mathbb{R}$
- Auf $\mathbb{Q}$ von $\mathbb{R}$ stimmt die Summe mit der üblichen Addition rationaler Zahlen überein
- Bei der Ordnungsrelation folgt für zwei Schnitte $\alpha < \beta$ auch $\alpha + \gamma < \beta + \gamma$ für jedes γ aus $\mathbb{R}$

Satz

Die Menge $\mathbb{R}$ ist bezüglich der Addition $+$ eine geordnete kommutative Gruppe mit dem Nullschnitt als neutralem Element.

Die Addition in $\mathbb{R}$

Beweis:

- Assoziativität, Kommutativität und $\alpha + \underline{0} = \alpha$ folgt aus der Definition der Addition
- Sei $-\alpha := \{-r : r \in \alpha, r \neq \max \alpha\}$ der inverse Schnitt $-\alpha$ zu α , für $\alpha + (-\alpha) = 0$ ist dann zu zeigen : $r \in \alpha + (-\alpha)$ für $r \in \underline{0}$, also $r > 0$
- Da α und $\bar{\alpha}$ sich beliebig nahe kommen, gibt es ein $s \in \bar{\alpha}$ und ein $t \in \alpha$ so, dass $0 < t - s < r$ ist.
- O.B.d.A sei $s \neq \max \bar{\alpha}$

Die Multiplikation in $\mathbb{R}$

- Für $\alpha, \beta \geq 0$ ist das Produkt definiert durch $\alpha \cdot \beta = \{r \cdot s : r \in \alpha, s \in \beta\}$
- Die Schnittaxiome sind damit erfüllt, die Multiplikation ist assoziativ und kommutativ und $\underline{1}$ ist ein Einselement, sowie die Multiplikation ist ordnungsgetreu und das Distributivgesetz gilt
- Sei für ein Schnitt $\alpha > 0$, $\alpha^{-1} := \{r^{-1} : r \in \bar{\alpha}, r > 0, r \neq \max \bar{\alpha}\}$
- Zu zeigen $\underline{1} \subset \alpha \cdot \alpha^{-1}$:

Die Multiplikation in $\mathbb{R}$

- Beweis:

Es sei $r \in \underline{1}$, also $r - 1 > 0$, sowie $q \in \alpha^{-1}$. Dann existiert eine natürliche Zahl n mit $q < n \cdot (r - 1)$. Da sich α und $\bar{\alpha}$ beliebig nahe kommen, findet man ein $s \in \bar{\alpha}$ und ein $t \in \alpha$ mit $0 < t - s < n^{-1}$, wobei o.B.d.A. $s \neq \max \bar{\alpha}$ und $q^{-1} < s$. Dann ist $s^{-1} \in \alpha^{-1}$, also $t \cdot s^{-1} \in \alpha \cdot \alpha^{-1}$.

Weiterhin ist $t \cdot s^{-1} < (s + n^{-1})s^{-1} = 1 + n^{-1}s^{-1} < 1 + n^{-1}q < r$, also $r \in \alpha \cdot \alpha^{-1}$.

- weitere Schwierigkeit liegt darin, dass die Definition für $\alpha \cdot \beta$ nur sinnvoll, wenn $\alpha, \beta \geq 0$.
- Um auch mit negativen Schnitten zu multiplizieren wird wie folgt vorgegangen:

Die Multiplikation in $\mathbb{R}$

- Jeder Schnitt γ lässt sich als Differenz $\gamma = \alpha - \beta$ nicht negativer Schnitte $\alpha \geq 0$ und $\beta \geq 0$ schreiben.
- Das Produkt von $\gamma = \alpha - \beta$ und $\gamma' = \alpha' - \beta'$ ist dann gegeben durch :
$$\gamma \cdot \gamma' = (\alpha - \beta) \cdot (\alpha' - \beta') := \alpha \cdot \alpha' + \beta \cdot \beta' - \alpha \cdot \beta' - \beta \cdot \alpha'$$
- Die Definition hängt nur von γ und γ' ab und nicht von der Differenzdarstellung
 $\gamma = \gamma - 0, \gamma' = \gamma' - 0$
- Weiterhin schwierig nun noch alle Körperaxiome nachzuweisen

References



H.-D. Ebbingshaus.

Zahlen.

Springer Verlag, pages 24–32, 1988.

Ende