

Conwayzahlen

Philipp Rabe

Kurze Wiederholung

- Ziel: Verallgemeinerung der Dedekindschen Schnitte
- Problem: Wie sieht eine $\leq$ -Beziehung zwischen Zahlen allgemein aus?
- Induktive Definition von Conwayspielen: sind x, y Conwayspiele, dann auch das geordnete Paar (x, y)
- Spiele sind Tupel aus einer Menge S von Stellungen, einer Anfangsstellung s_0 und den Relationen $\rightarrow_L$ und $\rightarrow_R$
- Spiele bilden eine halbgeordnete abelsche Gruppe
- Es gibt eine eindeutige Zuordnung von Klassen von Spielen zu Conwayspielen
- Auch Conwayspielen bilden eine halbgeordnete abelsche Gruppe

Verallgemeinerung der Dedekindschen Postulate

Dedekindsche Postulate

- (D1) ~~Jede Rationale Zahl liegt in genau einer der Klassen x_1 oder x_2 .~~
- (D2) ~~x_1 und x_2 sind nicht leer.~~
- (D3') Kein Element der rechten Klasse ist kleiner oder gleich einem Element der linken Klasse.
- (D4) ~~x_1 hat kein größtes Element.~~

Conwaysche Postulate

- (C1) wenn $z = (x, y)$, wobei x und y Mengen sind, und wenn nie $z^R \leq z^L$, so ist z eine Zahl.
- (C2) Für Zahlen x, y ist $x \leq y$ genau dann, wenn nie $y^R \leq x$ und nie $y \leq x^L$

Induktionsprinzip für Zahlen

für eine Eigenschaft P

- Induktionsbehauptung: Px für jede Zahl x
- Induktionsvoraussetzung: Px' für jedes linke oder rechte Element x' einer beliebigen Zahl x .

für eine Relation R

- Induktionsbehauptung: $Rx_1, \dots, x_n$ für Zahlen $x_1, \dots, x_n$
- Induktionsvoraussetzung: $Rx'_1, \dots, x'_n$ für alle n -Tupel $x'_1, \dots, x'_n$ für die gilt: $x'_i = x_i$ oder x'_i ist linkes oder rechtes Element von x_i und $\exists i : x'_i$ ist linkes oder rechtes Element von x_i .

Wenn für jede Zahl x bzw. jeden Tupel $x_1, \dots, x_n$ die Induktionsbehauptung aus der Induktionsvoraussetzung folgt, dann gilt sie für jede Zahl x bzw. jeden Tupel $x_1, \dots, x_n$.

$\leq$ ordnet die Zahlen total

Für jede Zahl x gilt:

- (a) $x^R \not\leq x$ für jedes x^R
- (b) $x \not\leq x^L$ für jedes x^L
- (c) $x \leq x$ für jede Zahl x

$\Rightarrow \leq$ ist reflexiv

Beweis mit dem Induktionsprinzip:

- (a) Angenommen $\exists x^R$, sodass $x^R \leq x$, dann gilt $x' \not\leq x^R$ für jedes rechte Element x' von x . Also auch $x^R \not\leq x^R \nmid$ zur Induktionsvoraussetzung (c)
- (b) analog zu (a)
- (c) Wäre $x \not\leq x$, dann gäbe es ein x^L mit $x \leq x^L$, oder ein x^R mit $x^R \leq x \nmid$

$\leq$ ordnet die Zahlen total

Für alle Zahlen x, y, z gilt:

- Wenn $x \leq y$ und $y \leq z$, dann $x \leq z$
- Es gibt also eine dreistellige Relation R mit
$$Rxyz \Leftrightarrow (((x \leq y \text{ und } y \leq z) \Rightarrow x \leq z)$$
$$\text{und } ((y \leq z \text{ und } z \leq x) \Rightarrow y \leq x)$$
$$\text{und } ((z \leq x \text{ und } x \leq y) \Rightarrow z \leq y))$$

Beweis mit dem Induktionsprinzip:

Es reicht $(x \leq y \text{ und } y \leq z) \Rightarrow x \leq z$ zu zeigen.

Angenommen $x \leq y$, $y \leq z$ und $x \not\leq z$. Dann gibt es z^R mit $z^R \leq x$ oder x^L mit $z \leq x^L$. Aus $z^R \leq x$ und $x \leq y$ folgt nach Induktionsvoraussetzung $z^R \leq y$ und aus $z^R \leq y$ und $y \leq z$ folgt $z^R \leq z \nmid$ (Der zweite Fall ist analog)

$\Rightarrow \leq$ ist transitiv

$\leq$ ordnet die Zahlen total

Definition: $x = y$ genau dann, wenn $x \leq y$ und $y \leq x$.

Analog zur Gleichheit von Conwayspielen ist $=$ eine Äquivalenzrelation.

Wegen der Reflexivität von $\leq$ folgt direkt, dass $x = x$ für alle Zahlen x .

$\Rightarrow \leq$ ist antisymmetrisch

Definition: $x < y$ genau dann, wenn $x \leq y$ und $y \not\leq x$.

Per Induktion lässt sich zeigen, dass für jede Zahl x gilt, dass $x^L < x$ und $x < x^R$:

wir haben schon gezeigt, dass $x \not\leq x^L$. Angenommen $x^L \not\leq x$, dann gibt es ein x^R mit $x^R \leq x^L$ (⚡ zu (C1)), oder ein x^{LL} mit $x \leq x^{LL}$. Nach Induktionsvoraussetzung ist $x^{LL} \leq x^L$. Wäre $x \leq x^{LL}$, dann wäre mit der Transitivität von $\leq$ auch $x \leq x^L$. ⚡

Der Beweis für $x < x^R$ ist analog.

$\leq$ ordnet die Zahlen total

Behauptung: Für beliebige Zahlen x, y ist $x \leq y$ oder $y \leq x$.

Beweis: Angenommen $y \not\leq x$, dann gibt es ein x^R mit $x^R \leq y$, oder ein y^L mit $x \leq y^L$.

Allgemein gilt $x \leq x^R$ und $y^L \leq y$. Mit der Transitivität von $\leq$ folgt:

$(x \leq x^R \text{ und } x^R \leq y) \Rightarrow (x \leq y)$ bzw.

$(x \leq y^L \text{ und } y^L \leq y) \Rightarrow (x \leq y)$

$\Rightarrow \leq$ ordnet die Zahlen total

Beispiel

Für Conwayspiele wurden $0 = (\emptyset, \emptyset)$, $1 = (\{0\}, \emptyset)$ und $n + 1 = (\{0, \dots, n\}, \emptyset)$ für $n \in \mathbb{N}$ definiert. Hierbei handelt es sich offensichtlich auch um Zahlen.

Behauptung: Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt $n < n + 1$.

Beweis:

- $n \leq n + 1$: Es gibt kein $(n + 1)^R$, darum ist zu zeigen, dass es kein n^L gibt mit $n + 1 \leq n^L$. Jedes n^L ist auch ein $(n + 1)^L$ und es gibt kein $(n + 1)^L$ mit $n + 1 \leq (n + 1)^L$. Also ist $n \leq n + 1$.
- $n + 1 \not\leq n$: n ist ein $(n + 1)^L$. Wegen $n \leq n$ gibt es also ein $(n + 1)^L$ mit $n \leq (n + 1)^L$. Also ist $n + 1 \not\leq n$.

Rechenoperationen für Zahlen

Die Operationen für $+$ und $-$ wurden für Conwayspiele bereits induktiv definiert. Diese Definitionen können für Zahlen übernommen werden:

(C-) Für jede Zahl x sei

$$-x \equiv (\text{Menge aller } -x^R, \text{Menge aller } -x^L).$$

(C+) Für je zwei Zahlen x, y sei

$$x + y \equiv (\text{Menge aller } (x^L + y) \cup \text{Menge aller } (x + y^L), \\ \text{Menge aller } (x^R + y) \cup \text{Menge aller } (x + y^R)).$$

Rechenoperationen für Zahlen

Für Multiplikation gibt es keine Definition aus dem Bereich der Spiele. Conway gibt folgende Formulierung analog zu (C-) und (C+):

(C*) Für je zwei Zahlen x, y sei

$$\begin{aligned} x * y \equiv & (\text{Menge aller } (x^L y + xy^L - x^L y^L) \\ & \cup \text{ Menge aller } (x^R y + xy^R - x^R y^R), \\ & \text{Menge aller } (x^L y + xy^R - x^L y^R) \\ & \cup \text{ Menge aller } (x^R y + xy^L - x^R y^L)) \end{aligned}$$

Die Zahlen modulo Gleichheit bildet mit $\leq$, $+$, $-$, $*$ einen geordneten Körper K_0 .

Beispielrechnungen

Beispielhaft lassen sich einzelne Eigenschaften nachrechnen. Das “Menge aller...” aus den Definitionen werden dabei durch “ $M(\dots)$ ” abgekürzt.

Behauptung: Für jede Zahl x und $0 = (\emptyset, \emptyset)$ gilt $x + 0 \equiv x$.

Beweis: per Induktion

$$\begin{aligned}x + 0 &\equiv (M(x^L + 0) \cup M(x + 0^L), M(x^R + 0) \cup M(x + 0^R)) \\&\equiv (M(x^L + 0), M(x^R + 0)) \\&\equiv (M(x^L), M(x^R)) && \text{(Induktionsvoraussetzung)} \\&\equiv x\end{aligned}$$

Beispielrechnungen

Behauptung: Für zwei Zahlen x, y gilt $x + y \equiv y + x$.

Beweis: per Induktion

$$\begin{aligned}x + y &\equiv (M(x^L + y) \cup M(x + y^L), M(x^R + y) \cup M(x + y^R)) \\&\equiv (M(x + y^L) \cup M(x^L + y), M(x + y^R) \cup M(x^R + y)) \\&\equiv (M(y^L + x) \cup M(y + x^L), M(y^R + x) \cup M(y + x^R)) \text{ (IV)} \\&\equiv y + x\end{aligned}$$

Beispielrechnungen

Behauptung: Für jede Zahl x gilt $x + -x = 0$.

Beweis: per Induktion

- wir zeigen $x + -x \leq 0$
- $0^R = \emptyset$ also gibt es kein $0^R \leq x + -x$
- jedes $z = (x + -x)^L$ ist von der Form $x^L + -x$, oder $x + -x^R$.
- Fall $z = x^L + -x$, dann ist $x^L + -x^L$ ein z^R und nach Induktionsvoraussetzung $x^L + -x^L \leq 0$ also $0 \not\leq z$
- Fall $z = x + -x^R$, dann ist $x^R + -x^R$ ein z^R und nach Induktionsvoraussetzung $x^R + -x^R \leq 0$ also $0 \not\leq z$
- Es gibt also kein $0 \leq (x + -x)^L$, also ist $x + -x \leq 0$.
- $0 \leq x + -x$ gilt analog.

Beispielrechnungen

Behauptung: Für jede Zahl x gilt $x * 0 \equiv 0$.

Beweis:

$$\begin{aligned}x * 0 &\equiv (M(x^L * 0 + x * 0^L - x^L * 0^L) \cup M(x^R * 0 + x * 0^R - x^R * 0^R), \\&\quad M(x^L * 0 + x * 0^R - x^L * 0^R) \cup M(x^R * 0 + x * 0^L - x^R * 0^L)) \\&\equiv (\emptyset \cup \emptyset, \emptyset \cup \emptyset) \\&\equiv (\emptyset, \emptyset) = 0\end{aligned}$$

$0 * x \equiv 0$ folgt analog.

Beispielrechnungen

Behauptung: Für $1 = (\{0\}, \emptyset)$ und jede Zahl x gilt $x * 1 = x$.

Beweis:

$$\begin{aligned}x * 1 &\equiv (M(x^L * 1 + x * 1^L - x^L * 1^L) \cup M(x^R * 1 + x * 1^R - x^R * 1^R), \\&\quad M(x^L * 1 + x * 1^R - x^L * 1^R) \cup M(x^R * 1 + x * 1^L - x^R * 1^L)) \\&\equiv (M(x^L * 1 + x * 0 - x^L * 0) \cup \emptyset, \emptyset \cup M(x^R * 1 + x * 0 - x^R * 0)) \\&\equiv (M(x^L * 1 + 0 - 0), M(x^R * 1 + 0 - 0)) \\&\equiv (M(x^L), M(x^R)) \quad (\text{Induktionsvoraussetzung}) \\&\equiv x\end{aligned}$$

Was ist der Körper der Conwayzahlen?

Wie lassen sich bekannte Zahlenmengen mit den Conwayzahlen verbinden?

- Für Conwayspiele wurde $\mathbb{N}$ über $0 = (\emptyset, \emptyset)$, $1 = (\{0\}, \emptyset)$ und $n + 1 = (\{0, \dots, n\}, \emptyset)$ für $n \in \mathbb{N}$ definiert.
- Mit der Definition von (C-) erhalten wir auch eine Einbettung der negativen Zahlen in K_0 .
- $\mathbb{Z}$ lässt sich in K_0 einbetten und K_0 ist ein Körper, also lässt sich auch $\mathbb{Q}$ in K_0 einbetten.
- Über die Dedekindschen Schnitte erhält man dann auch eine Einbettung von $\mathbb{R}$ in K_0 .

Was ist der Körper der Conwayzahlen?

- Schränkt man die Konstruktion von Zahlen so ein, dass nur endliche Mengen zugelassen werden, erhält man die dyadischen Zahlen (alle Zahlen der Form $\frac{m}{2^n}$, $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$).
- Ordinalzahlen sind Conwayspiele und auch Zahlen.
- mit $\omega = (\{0, \dots\}, \emptyset)$ und $\frac{1}{\omega}$ gibt es unendlich große und unendlich kleine Zahlen
- K_0 ist der bis auf Isomorphie eindeutig bestimmte universell einbettende geordnete Körper. D.h. jeder geordnete Körper lässt sich in K_0 einbetten.