Conwayspiele 1

Thea Salomon

Konstruktion von $\mathbb{R}$

traditionell : $\mathbb{N} \hookrightarrow \mathbb{Q} \hookrightarrow \mathbb{R}$

$\uparrow$

Dedekindsche Schnitte :

geordnetes Mengenpaar (X_1, X_2) $X_1, X_2 \subseteq \mathbb{Q}$

Conway : Schnitte verallgemeinem

- Elemente von X_1, X_2 bereits „früher" konstruierte Zahlen
- Ordnung?

Überblick

1. Conwayspiele

    I) Dedekindsche Postulate

    II) Definition

2. Spiele

    I) Spielbegriff

    II) Beispiele

    III) Induktionsprinzip

1.I Dedekindsche Postulate

geordnetes Paar (X_1, X_2) $X_1, X_2 \subseteq \mathbb{Q}$

~~(D1) Jede rationale Zahl liegt genau in einer Klasse.~~

$$0 = \left(\left\{-\tfrac{1}{2n} \mid n \in \mathbb{N}\right\}, \left\{\tfrac{1}{2n} \mid n \in \mathbb{N}\right\}\right), \quad (\{0\}, \{1\})$$

~~(D2) $X_1, X_2 \neq \emptyset$.~~

$$(\mathbb{Q}, \emptyset) := X, \quad a \in \mathbb{R}_{\geq 0} : a \geq 0 \Rightarrow a + \underset{\overset{\shortparallel}{X}}{X} \geq X \Rightarrow a = 0 \quad ⚡$$

(D3) $\forall a \in X_1, \forall b \in X_2 : a < b$.

$$(D3') \quad \neg(\exists a \in X_1, \exists b \in X_2 : a \geq b), \quad \neg\, a \leq b \not\Rightarrow a > b$$

~~(D4) X_1 hat kein größtes Element.~~

$$s \in \mathbb{Q} \quad (\{x < s\}, \{x \geq s\}), \quad (\{x \leq s\}, \{x > s\})$$

$\boxed{\text{Zahlen sind Mengenpaare } (X_1, X_2)\text{, Elemente von } X_1, X_2 \text{ sind bereits „früher" konstruierte Zahlen. Paarbildung durch (D3') eingeschränkt.}}$

Ordnung? → zunächst (D3') verwerfen

erzeugbare Objekte: <u>Conwayspiele</u>

1.II Definition

(CS) Wenn x und y Mengen von Conwayspielen sind, dann ist (x,y) ein Conwayspiel.

Für ein Conwayspiel $z=(x,y)$ heißen Elemente von x linke Elemente von z und Elemente von y rechte Elemente von z.

$\emptyset$: Menge von Conwayspielen

$(\emptyset, \emptyset) =: 0$, $\{0\}$: Menge von Conwayspielen

$(\{0\}, \emptyset) =: 1$

$n \in \mathbb{N}$: $n+1 := (\{1, \dots, n\}, \emptyset)$

$\omega := (\{n \mid n \in \mathbb{N}\}, \emptyset)$

2. Spiele

2.I Spielbegriff

<u>Spiel</u> $(S, s_0, \rightarrow_L, \rightarrow_R)$

- linker Spieler L, rechter Spieler R
- vor einer Partie wird festgelegt wer beginnt, dann wird abwechselnd gezogen
- Menge S von Stellungen mit ausgezeichneter Ausgangsstellung $s_0 \in S$
- Spielrelationen $\rightarrow_L, \rightarrow_R \subseteq S \times S$
- Zug von L bzw. R : $s \rightarrow_L s'$ bzw. $s \rightarrow_R s'$
- man gewinnt, wenn der andere Spieler keinen Zug mehr machen kann
- $s \rightarrow s' :\Longleftrightarrow s \rightarrow_L s'$ oder $s \rightarrow_R s'$

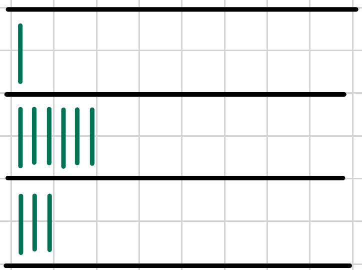
Endlichkeitsforderung

Es gibt keine unendliche Folge $(s_i)_{i \in \mathbb{N}}$ von Stellungen $s_i \in S$ mit

$s_0 \longrightarrow s_1 \longrightarrow s_2 \longrightarrow \ldots$

2.II Beispiele

i) NIM-Spiel



formal:

$m \in \mathbb{N}$, $s_0 = (N_1, \dots, N_m) \in \mathbb{N}^m$

Stellungen $S = \{(n_1, \dots, n_m) \in \mathbb{N}^m \mid \forall 1 \le i \le m : n_i \le N_i\}$

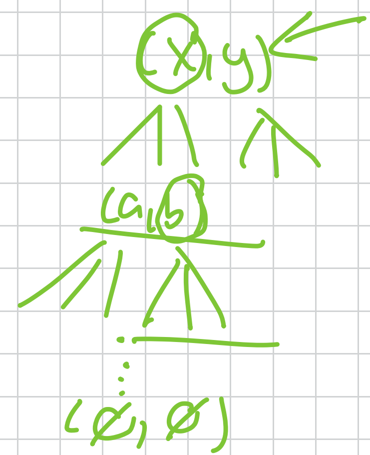
$\to_L = \to_R = \{((a_1, \dots, a_m), (b_1, \dots, b_m)) \mid \exists! j \ a_j > b_j, \forall i \neq j : a_i = b_i\}$

ii) Conwayspiele

(CS) Wenn x und y Mengen von Conwayspielen sind, dann ist (x,y) ein Conwayspiel.

gegeben: Conwayspiel $z = (x,y)$

- Ausgangsstellung $s_0 = (x,y)$
- Stellungen: linke und rechte Elemente von z, deren linke und rechte Elemente, usw.
- $s \to_L s' :\Longleftrightarrow s'$ ist ein linkes Element von s
  $s \to_R s' :\Longleftrightarrow s'$ ist ein rechtes Element von s



Endlichkeitsforderung?

Fundierungsaxiom (ZF): Jede nicht-leere Menge X hat ein Element $y \in X : y \cap X = \emptyset$

Ang. nicht, dann ex. Folge $s_0 \to s_1 \to s_2 \to \dots$

s_{i+1} ist eines oder rechtes Element von s_i

$s_0 \ni s_1 \ni s_2 \ni \dots$

$A := \{ s_0, s_1, \dots \}$

$\forall s_i \in A$:

i) $s_{i+1} \in s_i$

ii) $s_{i+1} \in A \implies s_{i+1} \in s_i \cap A$, $s_i \cap A = \emptyset$ ↯

$s_{i+1} = (x, y) = \{ \{x\}, \underline{\{x, y\}} \}$

$s_i \in X$, $s_i \notin s_{i+1}$ $\qquad \widetilde{s_{i+1}} := \{x, y\}$

2.III Induktionsprinzip für Spiele

gegeben ein Spiel $x = (S, s_0, \to_L, \to_R)$

$s_0' \in S$ mit $s_0 \to_L s_0'$ bzw. $s_0 \to_R s_0'$ definiere ein linkes bzw. rechtes Vorgängerspiel

$x' = (S', s_0', \to_L', \to_R')$ von x:

für $s \in S$: $s \in S' :\Longleftrightarrow \exists$ Kette $s_0' \to \dots \to s$ (von Stellungen in S)

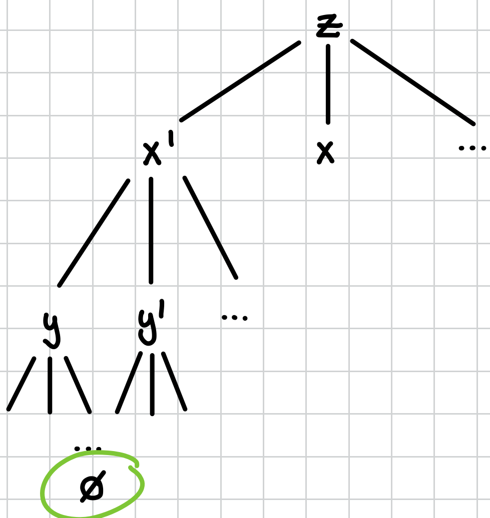
$\to_L'$ und $\to_R'$ durch Einschränkung von $\to_L$ und $\to_R$ auf $S' \times S'$

Eigenschaft P für Spiele

schreibe Px wenn x P erfüllt

Induktionsprinzip

Wenn aus der Induktionsvoraussetzung: Px' für jedes Vorgängerspiel x' von x die Induktionsbehauptung Px folgt, so hat jedes Spiel die Eigenschaft P.



Induktionsprinzip

IV

Wenn aus der Induktionsvoraussetzung: Px' für jedes Vorgängerspiel x' von x die

IB

Induktionsbehauptung Px folgt, so hat jedes Spiel die Eigenschaft P.

Bew. Widerspruch

$(IV \Rightarrow IB) \Rightarrow P$ für jedes Spiel

Ang. $IV \Rightarrow IB$ aber es gibt Spiel x_0 mit $\neg Px_0$.

Es gibt Vorgängerspiel x_1 von x_0 mit $\neg Px_1$,

wiederum x_2 mit $\neg Px_2$, usw.

Betrachte zugehörige Ausgangsstellungen $s_0, s_1, s_2, \ldots$

$s_0 \to s_1 \to s_2 \to \ldots$ $\lightning$ Endlichkeitsforderung

Ende