

Vortrag: ganze und rationale Zahlen (Euro Sell)

$\mathbb{N}$ natürliche Zahlen

$+$ Addition

$\cdot$ Multiplikation

1. $\mathbb{Z}$

1.1 Konstruktion

$$\underline{a - b} \quad a, b \in \mathbb{N}$$

$$(a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$$

$$(1, 4) \quad \xrightarrow{-3} \quad (2, 5)$$

$$(1, 4) \sim (2, 5)$$

$$(a, b) \sim (c, d)$$

$$(a - b = c - d)$$

$$\Leftrightarrow a + d = b + c$$

1. Reflexivität

$$(a, b) \sim (a, b) \quad \forall a, b \in \mathbb{N}$$

$$\Leftrightarrow a + b = a + b \quad \checkmark$$

2. Symmetrie

$$(a, b) \sim (c, d) \Leftrightarrow$$

$$(c, d) \sim (a, b)$$

$$(a, b) \sim (c, d)$$

$$\Leftrightarrow a + d = b + c$$

$$\Leftrightarrow c + b = d + a$$

$$\Leftrightarrow (c, d) \sim (a, b)$$

✓

3. Transitivität

$$(a, b) \overset{I}{\sim} (c, d) \overset{II}{\sim} (e, f) \Rightarrow (a, b) \sim (e, f)$$

$$I \quad a + d = b + c \quad II \quad c + f = d + e$$

$$a + \underline{d} + f = b + c + f = b + \underline{d} + e$$

$$a + f = b + e \Leftrightarrow (a, b) \sim (e, f) \quad \checkmark$$

$$\mathbb{Z} = \{ |(a, b)| \sim \mid (a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \}$$

$$(a, b) \sim (a + c, b + c)$$

$$\Rightarrow a + b + c = b + a + c \quad \checkmark$$

$$\begin{aligned} |(a, b)| &\nearrow (a', 0) \in \mathbb{N} \rightarrow a' \\ &\searrow (0, a') \in -\mathbb{N} \rightarrow -a' \end{aligned}$$

1.2 Verknüpfung

$$+ : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$$

$$|(a, b)| + |(c, d)| \mapsto (a+c, b+d)$$

1. Wohldefiniert ✓

• Assoziativ

$$((a, b) + (c, d)) + (e, f)$$

$$= (a+c, b+d) + (e, f)$$

$$= (a+c+e, b+d+f)$$

$$= (a, b) + ((c, d) + (e, f))$$

• Kommutativität ✓

• neutrales Element

$$|(0, 0)| \quad (a, b) + (0, 0) = (a+0, b+0) = (a, b) \quad \checkmark$$

Inverse

$$(a, b) + (b, a) = (a+b, a+b) \sim (0, 0) \quad \checkmark$$

$$(a', 0) + (0, a') = (0, 0)$$

$$(0, a') \rightarrow -a'$$

$$a - b := a + (-b)$$

Multiplikation

$$|(a, b)| \cdot |(c, d)| = (ac + bd, ad + bc)$$

$$(a - b) \cdot (c - d) = (ac + bd - (ad + bc))$$

Wohldefiniert $\checkmark$

Assoziativität $\checkmark$

Kommutativität $\checkmark$

Distributivität $\checkmark$

$\Rightarrow \mathbb{Z}$ Ring

$\mathbb{Z}$ Nullteilerfrei

$$(a, b) \cdot (c, d) = (0, 0)$$

$$\Rightarrow (a, b) \sim (0, 0) \vee (c, d) \sim (0, 0)$$

$$(a, b) \cdot (c, d) = (ac + bd, ad + bc)$$

$$\Rightarrow ac + bd = ad + bc$$

$$ac - ad = bc - bd \quad c \nparallel d$$

$$a(c-d) = b(c-d)$$

$$\Rightarrow c = d \vee a = b$$

$\uparrow$

$$a(d-c) = b(d-c)$$

$$d \nparallel c$$

$$i: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}$$

$$a \mapsto (a, 0)$$

$$i(\mathbb{N}) \subset \mathbb{Z}$$

- injektiv

- mit Addition und Multiplikation verträglich

① :

$$(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \setminus \{0\}$$

Äquivalenzrelation :

$$(a, b) \sim (c, d) \quad \left(\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \right)$$

$$\Leftrightarrow ad = bc$$

1. Reflexivität

$$(a, b) \sim (a, b)$$

$$\Leftrightarrow ab = ab \quad \checkmark$$

2. Symmetrie

$$(a, b) \sim (c, d) \Leftrightarrow (c, d) \sim (a, b)$$

$$\Leftrightarrow \begin{array}{c} \updownarrow \\ ad = bc \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{c} \updownarrow \\ cb = da \end{array}$$

3. Transitivität

$$(a,b) \overset{I}{\sim} (c,d) \overset{II}{\sim} (e,f) \Rightarrow (a,b) \sim (e,f)$$

$$I \quad ad = bc \quad II \quad cf = de$$

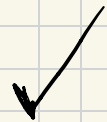
$$adf = bcf = bde$$

$$\Leftrightarrow adf - bde = 0$$

$$d(af - be) = 0 \quad | \text{ Nullteilerfreiheit}$$

$$af - be = 0$$

$$\Leftrightarrow af = be \Leftrightarrow (a,b) \sim (e,f)$$



$$\mathbb{Q} = \{ |(a,b)| \sim \mid (a,b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \setminus \{0,0\} \}$$

$$(a,b) \rightarrow \frac{a}{b}$$

+ Addition

$$|(a, b)| + |(c, d)| = (ad + bc, bd)$$

$$= \left(\frac{ad}{bd} + \frac{bc}{bd} \right) = \frac{a}{b} + \frac{c}{d}$$

1. wohldefiniert

- Assoziativität
- Kommutativität
- neutrales Element

$$(0, 1) \sim (0, a)$$

$$\begin{aligned}(a, b) + (0, 1) &= (a \cdot 1 + 0 \cdot b, b \cdot 1) \\ &= (a, b) \quad \checkmark\end{aligned}$$

Inverse

$$\begin{aligned}(a, b) + (-a, b) &= (ab + (-ab), b^2) \\ &= (0, b^2) \sim (0, 1)\end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow 0 \cdot 1 = b^2 \cdot 0 \quad \checkmark$$

- : $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}$

$$(a, b) \cdot (c, d) \mapsto (ac, bd)$$

1. wohldefiniert

Assoziativ ✓

Kommutativ ✓

$$\begin{aligned} (a, b) \cdot (c, d) &= (ac, bd) \\ &= (ca, db) = (c, d) \cdot (a, b) \end{aligned}$$

Distributiv : ✓

Neutrales Element

$$(1, 1)$$

$$(a, b) \cdot (1, 1) = (a \cdot 1, b \cdot 1) = (a, b)$$

$$(a, a) \sim (1, 1) \Leftrightarrow a \cdot 1 = a \cdot 1 \quad \checkmark$$

Inverse $\mathbb{Z}/30\mathbb{Z}$

$$(a, b) \cdot (b, \underline{a}) = (ab, ab) = (1, 1) \quad \checkmark$$

$$i: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Q}$$

$$(a) \mapsto (a, 1)$$

injektiv $\checkmark$

Ringhomomorphismus

$$\begin{aligned} i(a+b) &= (a+b, 1) \\ &= (a, 1) + (b, 1) \quad \checkmark \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} i(a \cdot b) &= (ab, 1) \\ &= (a, 1) \cdot (b, 1) \quad \checkmark \end{aligned}$$

$$i(\mathbb{Z}) \subset \mathbb{Q}$$

$$: \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}$$

$$(a, b) : (c, d) = (a, b) \cdot (d, c) \quad \checkmark$$

Besonders ?

Halbgruppe	$\rightarrow$	Gruppe
$\mathbb{N}$	$\rightarrow$	$\mathbb{Z}$

Ring	$\rightarrow$	Körper
$\mathbb{Z}$	$\rightarrow$	$\mathbb{Q}$

$\mathbb{Z}$ ist der kleinste Ring
der $\mathbb{N}$ enthält

$\mathbb{Q}$ ist der kleinste Körper
der $\mathbb{Z}$ enthält