Die natürlichen Zahlen und die vollständige Induktion

1. Definition Eine Menge N heißt Menge der natürlichen Zahlen, wenn eine Abb. $S: N \to N$ existiert, so dass folgende Eigenschaften erfüllt sind:

- $\to 0 \in N$
- $\to 0 \notin S(N)$
- $\to \forall n, m \in N: (S(m) = S(n) \Rightarrow n = m)$
- ! $\to \forall M \subset N: (0 \in M \wedge S(M) \subset M \Rightarrow M = N)$

$$N := \{0, \underbrace{S(0)}_{1}, \underbrace{S(1)}_{2}, \ldots\}$$

2. Definition

2.1. $\forall n \in \mathbb{N}: \quad n + 0 = n$

2.2. $\forall n, m \in \mathbb{N}: \quad n + S(m) = S(n+m)$

↳ Addition:

$$+: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}, \quad (n,m) \mapsto (n+m) \quad := \begin{cases} n, & \text{wenn } m = 0 \\ n+m, & \text{sonst} \end{cases}$$

Idee: $n+m \overset{②}{=} n+S(\tilde{m}) \overset{②}{=} S(n+\tilde{m})$

Bsp.: $7+2 = 7+S(1) = S(7+1)$

$\Leftrightarrow S(7+S(0)) = S(S(7+0))$

$\overset{!}{\Leftrightarrow} S(8) \Leftrightarrow \underline{\underline{9}}$

Allgemein: $n+m \overset{!}{:=} \underbrace{S(S(\ldots\ldots}_{n \text{ mal}}(m)\ldots\ldots)$

3. Definition Eigenschaften der Addition in $\mathbb{N}$.

$\boxed{N = \mathbb{N}}$

Für $\forall n, m, p \in \mathbb{N}$ in der Addition gilt:

-> kommutativ: $n+m = m+n$

-> assoziativ: $n+(m+p) = (n+m)+p$

-> neutralen Element: $n+0 = n$

Nun folgen Beispiele:

(1) Ziel: Wir wollen für $n \in \mathbb{N}$ eine geschlossene Formel finden für die Summe:

$$\sum_{k=1}^{n} k = 1 + 2 + \dots + n$$

Beh: $$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{(n+1) \cdot n}{2}$$

Bew: mittels vollständiger Induktion.

Induktionsanfang: Für $n = 1$ gilt:

$$\sum_{k=1}^{1} k = 1 = \frac{(1+1) \cdot 1}{2} = \frac{2}{2} = 1 \quad \checkmark$$

X richtige Notation ansehen!

Induktionsvoraussetzung: Die Formel gelte $\forall n \in \mathbb{N}$

Induktionsschluss: $n \to n+1$. Es gilt:

$$\sum_{k=1}^{n+1} k \overset{!}{=} \sum_{k=1}^{n} k + \underbrace{\sum_{k=n+1}^{n+1} k}_{n+1}$$

$$\frac{(n+1) \cdot n}{2} + n+1$$

$$\Leftrightarrow \frac{(n+1) \cdot (n+2)}{2}$$

$\blacksquare$

② Zeige, dass für $n \in \mathbb{N}$ gilt:

<u>Beh:</u> $$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n \cdot (n+1) \cdot (2n+1)}{6}$$

<u>Bew:</u> mittels vollständiger Induktion

<u>Induktionsanfang:</u> Für $k=1$ gilt:

$$\sum_{k=1}^{1} k^2 = 1^2 = 1 \overset{!}{=} \frac{1 \cdot (2) \cdot (3)}{6} = \frac{6}{6} = 1 \checkmark$$

richtige Notation ansehen!

<u>Induktionsvoraussetzung:</u> Die Formel gelte $\forall n \in \mathbb{N}$

<u>Induktionsschritt:</u> $n \to n+1$ Es gilt:

$$\sum_{k=1}^{n+1} k^2 \overset{!}{=} \sum_{k=1}^{n} k^2 + \underbrace{\sum_{k=n+1}^{n+1} k^2}$$

$$\frac{n \cdot (n+1) \cdot (2n+1)}{6} + (n+1)^2$$

$$\Leftrightarrow \frac{n \cdot (n+1) \cdot (2n+1)}{6} + \frac{6 (n+1)^2}{6}$$

$$\Leftrightarrow \frac{n \cdot (n+1) \cdot (2n+1) + 6 (n+1)^2}{6}$$

$$\Leftrightarrow \frac{(n+1) \cdot (n \cdot (2n+1) + 6 \cdot (n+1))}{6}$$

$$\Leftrightarrow \frac{(n+1) \cdot (2n^2 + 7n + 6)}{6}$$

$$\underline{\underline{\frac{(n+1)\cdot(n+2)\cdot(2n+3)}{6}}}$$

③ Beh: $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{i}{2^i} = 2 - \frac{n+2}{2^n}$

Bew: mittels vollst. Induktion

Induktionsanfang: Für $n=1$ gilt:

$$\sum_{i=1}^{1} \frac{1}{2^1} = \frac{1}{2} \overset{!}{=} 2 - \frac{1+1}{2} = 2 - 1{,}5 = \frac{1}{2} \checkmark$$

richtige Notation angeben! ✗

Induktionsvoraussetzung: Die Formel gelte $\forall n \in \mathbb{N}$

Induktionsschritt: $n \to n+1$ gilt:

$$\sum_{i=1}^{n+1} \frac{i}{2^i} = \sum_{i=1}^{n} \frac{i}{2^i} + \underbrace{\sum_{i=n+1}^{n+1} \frac{i}{2^i}}$$

$$2 - \frac{n+2}{2^n} + \frac{n+1}{2^{n+1}}$$

Wissen: $2^{n+1} = 2^n \cdot 2^1 = 2 \cdot 2^n$

$$\Leftrightarrow \quad 2 - \frac{(n+2)\cdot 2}{2^n \cdot 2} + \frac{(n+1)}{2^{n+1}}$$

$$\Leftrightarrow \quad 2 - \frac{2n+4}{2^{n+1}} + \frac{n+1}{2^{n+1}}$$

$$\Leftrightarrow \quad 2 + \frac{-2n-4}{2^{n+1}} + \frac{n+1}{2^{n+1}}$$

$$\Leftrightarrow \quad 2 + \frac{-n-3}{2^{n+1}}$$

$$\Leftrightarrow \quad \underline{\underline{2 - \frac{n+3}{2^{n+1}}}}$$

$\blacksquare$