Universität Hamburg
Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Christina Brandt
Dr. Marion Dziwnik

Sommersemester 2020

Optimierung - 6. Übungsblatt

Abgabe: 8. Juni 2020, Besprechung: 11. Juni 2020

Aufgabe 1 (Lipschitz-Stetigkeit von ∇J) (2 Punkte)

Sei $J : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $x^0 \in \mathbb{R}^n$. Zeigen Sie:

a) Wenn J zweimal stetig differenzierbar und $\|\nabla^2 J(x)\|$ beschränkt auf einer konvexen Obermenge der Levelmenge $L_J(x_0)$ ist, dann ist ∇J Lipschitz-stetig auf $L_J(x_0)$.

b) Wenn J differenzierbar und ∇J Lipschitz-stetig mit Konstante L ist, dann gilt

$$J(y) \leq J(x) + \langle \nabla J(x), y - x\rangle + \frac{L}{2}\|y-x\|^2.$$

Aufgabe 2 (Konvergenzgeschwindigkeit des Newton-Verfahrens) (3 Punkte)

a) Sei $p > 2$ und $x^0 > 0$ beliebig. Sei die Funktion $J : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$x \mapsto |x|^p$$

gegeben. Zeigen Sie, dass das Newton-Verfahren q-linear, aber nicht q-superlinear gegen das globale Minimum $\bar{x} = 0$ konvergiert und geben Sie die Konvergenzrate an. Warum ist das kein Widerspruch zum Satz 4.4 über die lokale Konvergenz des Newton-Verfahrens?

b) Sei nun $J : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$x \mapsto \begin{cases} \exp\left(-\frac{1}{|x|}\right) & , x \neq 0 \\ 0 & , x = 0 \end{cases}$$

gegeben. Zeigen Sie, dass J zweimal stetig differenzierbar mit $J'(0) = J''(0) = 0$ ist und dass das Newton-Verfahren für alle $0 < x^0 < \frac{1}{3}$ eine gegen $\bar{x} = 0$ konvergente Folge generiert, für die die Konvergenz schlechter als q-linear ist.

Aufgabe 3 (Invarianz des Newton-Verfahrens bezüglich affin-linearen Transformationen) (3 Punkte)

Sei $J : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar, $\nabla^2 J(x)$ invertierbar, $b \in \mathbb{R}^n$, $M \in \mathbb{R}^{n\times n}$ invertierbar und

$$\Phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, \quad y \mapsto My + b$$

eine affin-lineare Transformation. Mit Hilfe von Φ lässt sich eine weitere Funktion $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $F(y) = J(\Phi(y))$ definieren. Weiter sei die lokale Newton-Iteration in x für J gegeben durch

$$x^+ = x + d_x \qquad \text{mit } d_x \text{ Lösung von } \nabla^2 J(x)\, d_x = -\nabla J(x).$$

a) Stellen Sie den Newton-Schritt d_y in y für F in Termen von x, $\nabla J(x)$ und M dar.

b) Zeigen Sie, dass das Newton-Verfahren invariant unter der affinen Transformation Φ ist, d.h. für die nächste Iterierte x^+ des Newton - Schrittes für J und die nächste Iterierte y^+ des Newton - Schrittes für die Funktion F ausgehend vom Punkt $y = \Phi^{-1}(x)$ gilt
$$x^+ = \Phi\left(y^+\right) .$$

c) Für welche Klasse von Matrizen M ist das Gradientenverfahren invariant unter affin-linearen Transformationen?

Programmieraufgabe 5 (Gradientenverfahren mit gradientenähnlichen Abstiegsrichtungen) (4 Punkte)

Betrachten Sie das 1D-Membranproblem

$$\min \frac{1}{2}\int_0^1 |\nabla u(x)|^2 \,\mathrm{d}x - \int_0^1 u(x)\,\mathrm{d}x$$

wobei $u(0) = u(1) = 0$ ist. Diskretisierung des Intervalls durch Punkte $x_i = \frac{i}{N+1}$, $i = 1,\ldots,N$ und Funktionswerte $u_i = u(x_i)$ ergibt das folgende diskrete Minimierungsproblem

$$\min_{\mathbf{u}\in\mathbb{R}^n} J(u) = \min_{\mathbf{u}\in\mathbb{R}^n} \frac{1}{2}\langle \mathbf{u}; A_N\mathbf{u}\rangle - \langle \mathbf{1}; M_N\mathbf{u}\rangle$$

für den Vektor $\mathbf{u} = (u_i)_{i=1}^N$, $\mathbf{1} = (1)_{i=1}^N$ und Matrizen

$$A_N = (N+1)\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \ldots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & -1 & 2 & -1 \\ 0 & \ldots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad M_N = \frac{1}{6(N+1)}\begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 1 & 4 & 1 & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & 1 & 4 & 1 \\ 0 & \ldots & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

a) Verwenden Sie verschiedene Werte für $N = 10, 20, 40, 80$ und das Gradientenverfahren mit der Richtung des steilsten Abstieges und $x^0 = 0$ als Startpunkt. Verwenden Sie die Armijo-Schrittweitenregel sowie die Minimierungsregel und als Abbruchkriterium
$$\left\| J'\left(x^k\right)\right\| \le 10^{-4}\left(1 + \left\|J'\left(x^0\right)\right\|\right)$$
bzw. brechen Sie nach maximal 500 Iterationen ab. Vergleichen Sie den Lösungsverlauf.

b) Wiederholen Sie alles, indem Sie eine gradientenähnliche Abstiegsrichtung verwenden (s. Aufgabe 5.3). Verwenden Sie dabei Ihre Wahl von A und beschreiben Sie die Beobachtung.

Hinweis: Verwenden Sie die Matlab-Vorlage blatt06A.m, welche Sie aus Moodle herunterladen können und beachten Sie die Vorgaben.

Programmieraufgabe 6 (Lokales Newton-Verfahren für Optimierungsprobleme) (3 Punkte)

Implementieren Sie das lokale Newtonverfahren und verwenden Sie als Abbruchkriterium

$$\left\| J'\left(x^k\right) \right\| \leq 10^{-6}$$

bzw. brechen Sie nach maximal 200 Iterationen ab. Testen Sie es anhand von 2 Funktionen:

a) Die Rosenbrock - Funktion mit Startpunkt $x^0 = (-1.2, 1)^T$.

b) Die Wood - Funktion $J : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$,

$$J(x) = 100\left(x_2 - x_1^2\right)^2 + (1 - x_1)^2 + 90\left(x_4 - x_3^2\right)^2 + (1 - x_3)^2 + 10\,(x_2 - x_4)^2$$

mit Startpunkt $(-3, -1, -3, 1)^T$.

Haben Sie ein Minimum gefunden?

Hinweis: Verwenden Sie die Matlab-Vorlage blatt06B.m, welche Sie aus Moodle herunterladen können und beachten Sie die Vorgaben.