3. Relationen und Funktionen

Definition (3.1) Sind M und N Mengen, so heißt jede Teilmenge $\omega \subset M \times N$ des kartesischen Produktes eine *Relation von M in N*. Eine Teilmenge $\omega \subset M^2$ heißt eine *Relation in M*.

Schreibweise: $x \, \omega \, y \;:\Leftrightarrow\; (x, y) \in \omega$, wobei $x \in M$ und $y \in N$.

Beispiele (3.2)

a) $x \, \omega_a \, y \;:\Leftrightarrow\; x \le y$, für $x, y \in \mathbb{R}$. Die Teilmenge $\omega_a \subset \mathbb{R}^2$ ist also gerade die Menge von Punkten $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, für die $x \le y$ gilt, $\omega_a := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \; x \le y\}$.

b) $\omega_b := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2 + y^2 \le 1\}$, d.h. ω_b ist eine Kreisscheibe im $\mathbb{R}^2$ mit Mittelpunkt im Ursprung und Radius 1.

c) Die Relation $\omega_c := \{(x,x) \mid x \in M\} = id_M$ in M heißt *Identität* oder *Gleichheit*. Es gilt also $x \; id_M \; y \Leftrightarrow x = y \in M$.

Definition (3.3)

Ist $\omega \subset M \times N$ eine Relation, so heißt $D_\omega := \{a \in M \mid \exists b \in N : a\,\omega\, b\}$ der *Definitionsbereich* und $W_\omega := \{b \in N \mid \exists a \in M : a\,\omega\, b\}$ der *Wertebereich* der Relation.

Definition (3.4)

Eine Relation $\omega \subset M^2$ heißt

a) *reflexiv* $:\Leftrightarrow \forall a \in M : a\,\omega\, a$

b) *symmetrisch* $:\Leftrightarrow \forall a, b \in M : a\omega b \Rightarrow b\,\omega\, a$

c) *antisymmetrisch* $:\Leftrightarrow \forall a, b \in M : a\omega b \wedge b\omega a \Rightarrow a = b$

d) *transitiv* $:\Leftrightarrow \forall a, b, c \in M : a\,\omega\, b \wedge b\,\omega\, c \Rightarrow a\,\omega\, c$

e) *definit* $:\Leftrightarrow \forall a, b \in M : a\,\omega\, b \vee b\,\omega\, a$.

Aufgabe: Untersuchen Sie die Relationen aus (3.2) auf die obigen Eigenschaften.

Definition (3.5) (Äquivalenzrelation)

Eine reflexive, symmetrische und transitive Relation in M heißt eine *Äquivalenzrelation*. Äquivalenzrelationen werden zumeist mit dem Symbol $\sim$ bezeichnet. Nochmals die definierenden Eigenschaften: Für alle $a, b, c \in M$ gelten

$$a \sim a, \quad a \sim b \;\Rightarrow\; b \sim a, \quad a \sim b \;\wedge\; b \sim c \;\Rightarrow\; a \sim c.$$

Beispiele (3.6)

a) Die Identität ist eine Äquivalenzrelation, $a \sim b \;:\Leftrightarrow\; a = b$.

b) Für $x, y \in \mathbb{R}$ werde definiert $x \sim y \;:\Leftrightarrow\; x = y \vee x = -y$. Dann ist $\sim$ eine Äquivalenzrelation.

c) Definiert man für $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$ die Relation

$$\mathbf{x} \sim \mathbf{y} \ :\Leftrightarrow \ \mathbf{x}, \mathbf{y} \text{ linear abhängig,}$$

so ist $\sim$ eine Äquivalenzrelation.

d) Definiert man auf $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ die Relation

$$(z_1, n_1) \sim (z_2, n_2) \ :\Leftrightarrow \ z_1 n_2 = z_2 n_1,$$

so ist $\sim$ eine Äquivalenzrelation.

Äquivalenzrelationen werden dazu verwendet, um äquivalente Elemente einer Menge zu identifizieren, d.h. alle zu einem vorgegebenen Element äquivalenten Elemente werden zu einer Klasse (Äquivalenzklasse) zusammengefasst.

Definition (3.7) (Partition)

Sei M eine Menge. Eine Teilmenge $\mathcal{Z} \subset \mathcal{P}(M)$ der Potenzmenge von M heißt eine *Zerlegung* oder *Partition* von M, falls die folgenden Eigenschaften erfüllt sind:

a) $\forall\, A \in \mathcal{Z} \;:\; A \neq \emptyset$

b) $\forall\, A, B \in \mathcal{Z} \;:\; (A \neq B \;\Rightarrow\; A \cap B = \emptyset)$

c) $\bigcup\limits_{A \in \mathcal{Z}} A \;=\; M.$

Beispiel (3.8)

Wir betrachten die Menge $\mathbb{N}$ der natürlichen Zahlen und definieren $G := \{2, 4, 6, \ldots\}$ (Menge der geraden) und $U := \{1, 3, 5, \ldots\}$ (Menge der ungeraden Zahlen). Dann ist $\mathcal{Z} := \{G, U\} \subset \mathcal{P}(\mathbb{N})$ eine (zwei-elementige) Zerlegung der natürlichen Zahlen.

Satz (3.9):

a) Ist $\sim$ eine Äquivalenzrelation für die Menge M, so wird für $a \in M$ die folgenden Äquivalenzklasse definiert

$$[a] := \{b \in M \,|\, a \sim b\}.$$

Durch $\mathcal{Z} := \{[a] \,|\, a \in M\} \subset \mathcal{P}(M)$ ist dann eine Partition von M gegeben. Bezeichnung: $\mathcal{Z} =: M|_\sim$. Ferner gilt

$$[a] = [b] \Leftrightarrow a \sim b, \qquad (a, b \in M).$$

b) Umgekehrt: Ist $\mathcal{Z} \subset \mathcal{P}(M)$ eine Zerlegung von M und definiert man eine Relation durch

$$a \sim b \;:\Leftrightarrow\; \exists\, A \in \mathcal{Z} : \; a, b \in A,$$

so ist $\sim$ eine Äquivalenzrelation.

c) Die obigen Konstruktionen sind invers zueinander, d.h. führt man erst a) und dann b) aus, so erhält man die ursprüngliche Äquivalenzrelation zurück. Genauso bei der Reihenfolge b) - a).

Beispiele (3.10)

a) Für die Partition $\mathcal{Z}$ von $\mathbb{N}$ aus Beispiel (3.8) ergibt sich die zugehörige Äquivalenzrelation

$$n \sim m \;\Leftrightarrow\; \exists\, k \in \mathbb{Z} : \; (n - m) = 2\,k.$$

b) Für die Äquivalenzrelation $\sim$ auf $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ aus Beispiel (3.6) d)

$$(z_1, n_1) \sim (z_2, n_2) \;:\Leftrightarrow\; z_1\, n_2 = z_2\, n_1$$

erhält man die zugehörigen Äquivalenzklassen

$$[z, n] = \{(z_1, n_1) : (z_1, n_1) \sim (z, n)\} =: \frac{z}{n}$$

Die zugehörige Partition von $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ bildet dann die Menge der rationalen Zahlen

$$\mathbb{Q} := (\mathbb{Z} \times \mathbb{N})|_{\sim} = \{[z, n] = \frac{z}{n} : \; z \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}\}.$$

Definition (3.11)

Ist $\sim$ Äquivalenzrelation auf einer Menge M und $\mathcal{Z} = M|_\sim \subset \mathcal{P}(M)$ die zugehörige Partition, so heißt eine Teilmenge $N \subset M$ ein Repräsentantensystem, falls gilt

$$\forall\, a \in M : \; \exists_1 x \in N : \; a \sim x.$$

Damit enthält jede Äquivalenzklasse $[a] \in \mathcal{Z}$ genau ein Element aus dem Repräsentantensystem.

Beispiele (3.12)

a) Für die Äquivalenzrelation aus Beispiel (3.10) a) auf $\mathbb{N}$ ist $N := \{1, 2\}$ ein Repräsentantensystem.

b) Für die Äquivalenzrelation aus Beispiel (3.10) b) auf $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ ist $N := \{(0,1)\} \cup \{(z,n) : z \neq 0 \wedge |z|, n \text{ teilerfremd}\}$ ein Repräsentantensystem.

In Verallgemeinerung der Relation $\leq$ auf der Menge der reellen Zahlen definiert man

Definition (3.13) (Ordnungsrelation)

Eine reflexive, antisymmetrische und transitive Relation auf einer Menge M heißt eine *Ordnung für M*. Ordungsrelationen werden zumeist mit dem Symbol $\leq$ bezeichnet. Nochmals die definierenden Eigenschaften: Für alle $a, b, c \in M$ gelten

$$a \leq a, \quad a \leq b \wedge b \leq a \;\Rightarrow\; a = b, \quad a \leq b \;\wedge\; b \leq c \;\Rightarrow\; a \leq c.$$

Eine Ordnung nennt man *totale Ordnung*, falls sie zusätzlich *definit* ist, falls also gilt $\forall\, a, b \in M \;:\; a \leq b \vee b \leq a$.

Beispiele (3.14)

a) Die übliche $\leq$ Relation auf $\mathbb{R}$ ist eine totale Ordnung; $(\mathbb{R}, \leq)$ ist also eine *totalgeordnete Menge*.

b) Definiert man für $\mathbf{a} = (a_1, a_2)$, $\mathbf{b} = (b_1, b_2) \in \mathbb{R}^2$

$$\mathbf{a} \le \mathbf{b} \;:\Leftrightarrow\; a_1 \le b_1 \;\wedge\; a_2 \le b_2,$$

so ist diese Relation eine Ordnung für $\mathbb{R}^2$. Allerdings ist liegt *keine* totale Ordnung vor. Es gilt nämlich weder $\mathbf{a} \le \mathbf{b}$ noch $\mathbf{b} \le \mathbf{a}$, falls die Verbindungsstrecke zwischen $\mathbf{a}$ und $\mathbf{b}$ eine negative Steigung hat.

c) Eine *andere* Ordnungsrelation, die so genannte *lexikographische Ordnung* auf $\mathbb{R}^2$, wird wie folgt definiert

$$\mathbf{a} \le \mathbf{b} \;:\Leftrightarrow\; a_1 < b_1 \;\vee\; (a_1 = b_1 \wedge a_2 \le b_2).$$

Hier erhält man eine totale Ordnung auf $\mathbb{R}^2$.

d) $(\mathcal{P}(M), \subset)$ ist eine geordnete Menge; für $\#M > 1$ ist $\subset$ keine totale Ordnung.

e) Für $n, m \in \mathbb{N}$ definieren wir die Teilerrelation

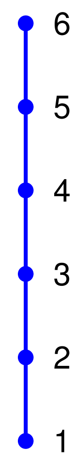
$$n|m \quad :\Leftrightarrow \quad \exists\, k \in \mathbb{N}\ :\ m = k\, n.$$

Die Teilerrelation $|$ ist eine Ordnung für $\mathbb{N}$.

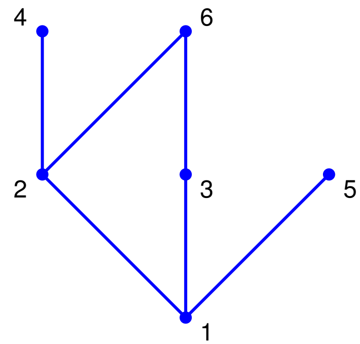
Endliche, geordnete Mengen lassen sich mit so genannten *Hasse–Diagrammen* graphisch veranschaulichen.

Beispiele (3.15)

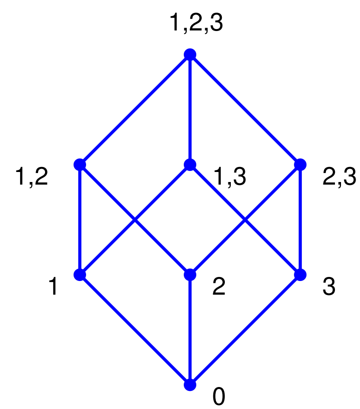
a) Menge $M = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ it der Ordnung $\leq$:



b) Menge $M = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ mit der Teilerordnung $|$



c) Menge $\mathcal{P}(\{1, 2, 3\})$ mit der Ordnung $\subset$



Definition (3.16)

Sei $(M, \leq)$ eine geordnete Menge und $A \subset M$. Dann heißt

a) $a \in M$ ein *maximales Element* von A, falls gilt:

$$a \ \in \ A \ \ \wedge \ \ \forall\, b \in A \ : \ \ (a \leq b \ \Rightarrow \ b = a).$$

b) $a \in M$ ein *Maximum* von A, falls gilt:

$$a \ \in \ A \ \ \wedge \ \ \forall\, b \in A \ : \ \ (b \leq a).$$

c) $a \in M$ eine *obere Schranke* von A, falls gilt:

$$\forall\, b \in A \ : \ \ (b \leq a).$$

d) $a \in M$ ein *Supremum* von A, falls a eine obere Schranke von A ist und es gilt $\quad \forall\, b \ : \ (b$ obere Schranke $\ \Rightarrow \ a \leq b).$

Analog werden die Begriffe *minimales Element, Minimum, untere Schranke* und *Infimum* definiert.

Eine Menge $A \subset M$ heißt *nach oben/unten beschränkt*, falls es eine obere/untere Schranke von A gibt.

Man beachte, dass eine Menge $A \subset M$ durchaus mehrere maximale/ minimale Elemente oder obere/untere Schranken besitzen kann. Besitzt sei jedoch ein Supremum/Infimum oder ein Maximum/Minimum, so ist dieses eindeutig bestimmt.

Bezeichnung: $\sup A$, $\inf A$, $\max A$, $\min A$.

Beispiele (3.17)

a) Wir betrachten den $\mathbb{R}^2$ mit der $\leq$ Relation aus Beispiel (3.12) b), also $\mathbf{a} \leq \mathbf{b} \;:\Leftrightarrow\; a_1 \leq b_1 \;\wedge\; a_2 \leq b_2$.
Eine zwei-elementige Menge $A = \{\mathbf{a}, \mathbf{b}\} \subset \mathbb{R}^2$ besitzt nur dann ein Maximum/Minimum, falls $\mathbf{a} \leq \mathbf{b}$ oder $\mathbf{b} \leq \mathbf{a}$ gilt.

Für ein beliebiges $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^2$ gilt ferner:

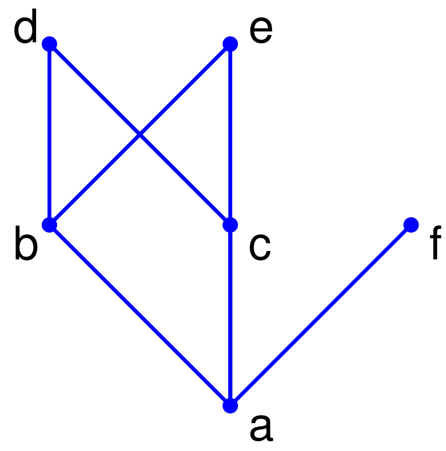
$$\mathbf{c} \text{ ist obere Schranke von } A \;\Leftrightarrow\; \forall\, i = 1,2:\; c_i \;\geq\; \max\{a_i, b_i\}.$$

Damit folgt: $\sup A = (\max(a_1, b_1), \max(a_2, b_2))$ und $\inf A = (\min(a_1, b_1), \min(a_2, b_2))$.

b) Wir betrachten $\mathbb{N}$ mit der Teilerrelation $|$. Für $m, n \in \mathbb{N}$ existieren $\max(m, n)$ und $\min(m, n)$ nur dann, wenn m ein Teiler von n - oder umgekehrt - ist. Ferner gilt $\sup(m, n) = \text{kgV}(m, n)$ und $\inf(m, n) = \text{ggT}(m, n)$.

c) Wir betrachten die Menge $M := \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ mit der Teiler-Relation $|$. Dann gilt: Die maximalen Elemente von M sind 4, 5 und 6, aber es existiert kein Maximum. Für die Teilmenge $A := \{1, 2, 3, 5\} \subset M$ existiert kein Maximum, keine obere Schranke und auch kein Supremum!

d) Sei $(M, \leq)$ gegeben durch folgendes Hasse-Diagramm



Die Teilmenge $A := \{a, b, c\}$ besitzt kein Maximum, d und e sind obere Schranken von A, A besitzt jedoch kein Supremum!

Definition (3.18) (Wohlordnung)

Sei $(M, \leq)$ eine geordnete Menge. Die Ordnung $\leq$ heißt *Wohlordnung*, falls jede nichtleere Teilmenge von M ein Minimum besitzt.

Beispielsweise ist $(\mathbb{N}, \leq)$ wohlgeordnet, $(\mathbb{R}, \leq)$ jedoch nicht.

Satz (3.19) (Wohlordnungssatz von Zermelo)
Jede Menge lässt sich wohlordnen!

Der Beweis des Wohlordnungssatzes ist nur mit Hilfe eines zusätzlichen (unabhängigen) Axioms der Mengenlehre, dem so genannten Auswahlaxiom möglich:

Satz (3.20) / Auswahlaxiom

Zu jeder nichtleeren Menge M gibt es eine Abbildung (Funktion) $\Phi : \mathcal{P}(M) \setminus \{\emptyset\} \to M$ mit der Eigenschaft

$$\forall\, T \in \mathcal{P}(M) \setminus \{\emptyset\} : \ \Phi(T) \in T,$$

d.h. aus jeder nichtleeren Teilmenge von M lässt sich (simultan) ein Element auswählen.

Es gibt eine dritte Aussage, das so genannte Zornsche Lemma, die -bei Zugrundelegung der übrigen Axiome der Mengenlehresowohl zum Wohlordnungssatz, wie auch zum Auswahlaxion äquivalent ist.

Hierzu betrachtet man eine geordnete Menge $(M, \leq)$ und stattet deren Teilmengen $N \subset M$ mit der gleichen Ordnung $\leq$ aus. Eine solche Teilmenge $K \subset M$ heißt dann eine *Kette*, falls $(K, \leq)$ eine totalgeordnete Menge ist. Damit lautet nun das Zornsche Lemma:

Satz (3.21) (Zornsches Lemma)

Sei $(M, \leq)$ eine geordnete Menge. Besitzt jede Kette in M eine obere Schranke, so existiert zu jedem Element $a \in M$ ein maximales Element x von M mit $a \leq x$.

Das Zornsche Lemma wird angewendet, um die *Existenz* von maximalen Elementen zu beweisen. Beispielsweise lässt sich mit Hilfe des Zornschen Lemmas zeigen, dass jeder (unendlich dimensionale) Vektorraum eine Basis besitzt!

Funktionen.

Definition (3.22)

Eine Relation $\omega \subset M \times N$ heißt *eindeutig* (genauer: rechtseindeutig), falls für $x \in M$ und $y, z \in N$ gilt

$$x \, \omega \, y \ \wedge \ x \, \omega \, z \ \Rightarrow \ y = z.$$

Eine eindeutige Relation $f \subset M \times N$ mit Definitionsbereich $D_f = M$ lässt sich auch als *Funktion* oder *Abbildung* $f : M \to N$ deuten, in dem Sinne, dass jedem Element $x \in M$ durch f der eindeutig bestimmte Wert y mit $x \, f \, y$ zugeordnet wird; also

$$y = f(x) \ :\Leftrightarrow \ x \, f \, y \ \Leftrightarrow \ (x, y) \in f.$$

Zumeist wird jedoch zwischen der Funktion f (Zuordnungsvorschrift) und der Relation $\{(x, f(x)) | \, x \in M = D_f\} \subset M \times N$, unterschieden, letztere heißt *Graph der Funktion f* und wird mit $\mathrm{graph}(f)$ bezeichnet.

Häufig ist der Definitionsbereich einer Funktion a–priori unbekannt, d.h. man kennt nur ihre Definition über die zugrundeliegende Zuordnungsvorschrift und wählt dann den Definitionsbereich maximal. Schreibweise: $f : M \supset D_f \to N$.

Definition (3.23)

a) Eine Abbildung $f : M \to N$ heißt

- *injektiv*, falls $\forall\, x_1, x_2 \in M\ :\ (f(x_1) = f(x_2)\ \Rightarrow\ x_1 = x_2)$,
- *surjektiv*, falls $\forall\, y \in N\ :\ \exists\, x \in M\ :\ f(x) = y$,
- *bijektiv*, falls $\forall\, y \in N\ :\ \exists_1\, x \in M\ :\ f(x) = y$.

b) Für $A \subset M$ und $B \subset N$ definieren wir

- *das Bild von A* durch $f(A) := \{f(x) \,|\, x \in A\}$,
- *das Urbild von B* durch $f^{-1}(B) := \{x \,|\, f(x) \in B\}$.

c) Ist $f : M \to N$ injektiv, so ist *die zu f inverse Abbildung (Umkehrfunktion)* erklärt durch

$$f^{-1} : f(M) \to M, \quad y = f(x) \mapsto x.$$

d) Sind $f: M \to N$ und $g: \tilde{N} \to P$ Abbildungen, so wird die *Komposition oder Hintereinanderausführung von f und g* wie folgt definiert

$$g \circ f: \; f^{-1}(N \cap \tilde{N}) \to P, \quad (g \circ f)(x) := g(f(x)).$$

Im Fall $N = \tilde{N}$ gilt: $D_{g \circ f} = M = D_f$.

Satz (3.24)

a) Die Komposition von Abbildungen ist assoziativ, d.h.
$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$.

b) Ist $f: M \to N$ injektiv, so gilt

$$f \circ f^{-1} = id_{f(M)}, \quad f^{-1} \circ f = id_M$$

c) Die Menge der bijektiven Abbildungen von M auf M bildet bzgl. der Komposition von Abbildungen eine Gruppe. Man nennt diese die *symmetrische Gruppe von A*. Sie ist im Allg. nichtkommutativ.

Ernst Zermelo
(1871-1953)

Max Zorn
(1906-1993)