6. Minimierung Boolescher Polynome

An Beispiel (5.11) c) erkennt man, dass die DNF eines Booleschen Polynoms i. Allg. ungünstig in Bezug auf die Anzahl der Auftretenden Summanden ist. Für diese Beispiel erhält man etwa durch einfache Umformungen

$$\begin{aligned}
q &= ((x_1 \wedge x_2) \vee \overline{x}_3) \vee ((x_1 \wedge (\overline{x_2 \wedge x_3})) \wedge x_4) \vee x_1 \\
&\sim x_1 x_2 \vee \overline{x}_3 \vee (x_1 x_4 \wedge (\overline{x}_2 \vee \overline{x}_3)) \vee x_1 \\
&\sim x_1 \vee x_1 x_2 \vee \overline{x}_3 \vee x_1 \overline{x}_2 x_4 \vee x_1 \overline{x}_3 x_4 \\
&\sim x_1 \vee x_1 (\overline{x}_2 x_4 \vee \overline{x}_3 x_4) \vee \overline{x}_3 \\
&\sim x_1 \vee \overline{x}_3
\end{aligned}$$

Man vergleiche dies mit der DNF auf Seite 87.

Gesucht ist also ein Repräsentantensystem der Form

$$p = x_{\nu_1}^{i_1} \dots x_{\nu_r}^{i_r} \vee \dots \vee x_{\mu_1}^{j_1} \dots x_{\mu_r}^{j_r} \tag{6.1}$$

mit einer minimalen Anzahl von Termen (Faktoren und Summanden).

Im Unterschied zur DNF müssen in den Summanden der Minimalform (6.1) nicht alle Variablen $x_1, \dots, x_n$ auftreten. Wir zeigen im Folgenden, dass es zu jedem Booleschen Polynom $q \in P_n$ eine Minimalform der Gestalt (6.1) gibt, allerdings ist diese eventuell nicht eindeutig bestimmt.

Definition (6.2)

a) Seien $p, q \in P_n$ zwei Boolesche Polynome.
p heisst *Implikant* von q, falls gilt:

$$\forall (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{B}^n : \; p_{\mathbb{B}}(a_1, \dots, a_n) = 1 \;\Rightarrow\; q_{\mathbb{B}}(a_1, \dots, a_n) = 1.$$

Wir schreiben dann $p \Rightarrow q$.

b) Jedes Polynom $p \in P_n$ der Form $p = x_{\nu_1}^{i_1} \dots x_{n_r}^{i_r}$ mit $1 \leq \nu_1 < \cdots < \nu_r \leq n$ und $i_k \in \{0, 1\}$ nennt man ein *Produktpolynom*.

c) Ein Produktpolynom $s = x_{\nu_1}^{i_1} \dots x_{n_r}^{i_r}$ heißt ein *Primimplikant* von $q \in P_n$, falls gelten (i) $s \Rightarrow q$, und (ii) Lässt man in der Darstellung des Produktpolynoms s einen Faktor weg, so ist dieses kleinere Polynom $\tilde{s}$ kein Implikant von q.

Ein Primimplikant ist also ein Implikant von q in Form eines Produktpolynoms mit einer minimalen Anzahl von Faktoren.

Beispiel (6.3)

a) Sei $q = x_1x_2x_3 \vee x_1\overline{x}_2x_3 \vee \overline{x}_1\overline{x}_2\overline{x}_3 \in P_3$. Dann ist $s = x_1x_3$ ein Primimplikant von q. Denn:

$$\begin{aligned} s_{\mathbb{B}}(a_1, a_2, a_3) &= 1 \qquad \Leftrightarrow \qquad a_1 = a_3 = 1 \\ q_{\mathbb{B}}(1, a_2, 1) &= 1\, a_2\, 1 \vee 1\, \overline{a}_2\, 1 \vee 0\, \overline{a}_2\, 0 = a_2 \vee \overline{a}_2 \vee 0 = 1. \end{aligned}$$

Damit ist s ein Implikant von q.
Das Produktpolynom s ist auch minimal, denn weder x_1 noch x_2 sind Implikanten von q: $q_{\mathbb{B}}(1,0,0) = 0$, $q_{\mathbb{B}}(0,0,1) = 0$.

b) Sei $q = ((x_1 \wedge x_2) \vee \overline{x}_3) \vee (((x_1 \wedge (\overline{x_2 \wedge x_3})) \wedge x_4) \vee x_1) \in P_4$.
Dann sind $s^1 := x_1$ und $s^2 := \overline{x}_3$ die Primimplikanten von q; vgl. die Umformung auf Seite 89.

Satz (6.4) (Primimplikantensatz)

Jedes Boolesche Polynom $q \in P_n$ ist äquivalent zur Disjunktion seiner Primimplikanten, d.h. ist $I_q = \{s^1, \ldots, s^m\}$ die Menge aller Primimplikanten von q, so gilt

$$q \sim p := s^1 \vee \cdots \vee s^m.$$

Beweis: Für $a_i \in \mathbb{B}$, $i = 1, \ldots, n$, gilt

$$\begin{aligned} p_{\mathbb{B}}(a_1 \ldots a_n) = 1 &\Rightarrow \exists\, k \in \{1 \ldots m\} : s^k_{\mathbb{B}}(a_1 \ldots a_n) = 1 \\ &\Rightarrow q_{\mathbb{B}}(a_1 \ldots a_n) = 1 \end{aligned}$$

Umgekehrt: Sei $q_{\mathbb{B}}(a_1, \ldots, a_n) = 1$. Dann ist $s := x_1^{a_1} \ldots x_n^{a_n}$ ein Implikant von q in Produktform. Wir streichen nun mit dem folgenden (formalen) Algorithmus überflüssige Faktoren aus diesem Produkt.

for $j = 1, \ldots, n$

$\widetilde{s}$ entstehe aus s durch Streichung von $x_j^{a_j}$;

falls $\widetilde{s} \Rightarrow q$: $s := \widetilde{s}$; (6.5)

end for

Nach dem Durchlaufen der Schleife ist $s = x_{j_1}^{a_{j_1}} \ldots x_{j_r}^{a_{j_r}}$ dann ein Primimplikant von q und es gilt nach wie vor $s_{\mathbb{B}}(a_1, \ldots, a_n) = 1$, also auch $p_{\mathbb{B}}(a_1, \ldots, a_n) = 1$. $\square$

Bemerkung

Das Verfahren (6.5) ist für die praktische Berechnung von Primimplikanten wenig geeignet. Zum Einen muss $(a_1, \ldots, a_n)$ die gesamte Menge $\mathbb{B}^n$ durchlaufen, zum Anderen ist der Test $\widetilde{s} \Rightarrow q$ aufwendig.

Wir geben daher im Folgenden ein effizientes Verfahren zur Bestimmung einer bzw. aller disjunktiven Minimalformen für ein vorgegebenes Boolesches Polynom $q \in P_n$ an.

Algorithmus von Quine und McCluskey (6.6)

Dieses Verfahren besteht aus drei Teilschritten: Zu einem vorgegebenen Polynom $q \in P_n$ bestimmt man

1.) die DNF $p^{(1)}$ von q,

2.) alle Primimplikanten von $p^{(1)}$ und

3.) von diesen einen minimalen Satz, der sämtliche Produkte der DNF überdeckt.

Schritt 1:

Die Bestimmung der DNF $p^{(1)}$ von q kann über ein formales Auswerten geschehen, vgl. das Beispiel (5.11)c). Alternativ lässt sich die DNF mitunter auch durch geeignete Umformungen des vorgegebenen Polynoms aufstellen, vgl. die Umformung auf Seite 89.

Schritt 2:

Zur Bestimmung aller Primimplikanten von $p^{(1)}$ vergleicht man jeden Produktterm der DNF mit jedem anderen Produktterm und wendet die folgende Reduktionsregel an

$$\alpha x_k \vee \alpha \overline{x}_k \;\sim\; \alpha, \tag{R}$$

wobei α einen beliebigen Produktterm (ohne x_k) bezeichnet.

Terme, die mittels (R) reduziert werden, werden abgestrichen.

Es ist jedoch zu beachten, dass bei den weiteren Anwendungen der Reduktionsregel (R) auch die bereits abgestrichenen Terme berücksichtigt werden müssen.
Das Verfahren wird solange iteriert, bis keine weitere Anwendung von (R) mehr möglich ist. Die verbleibenden, nicht abgestrichenen Terme ergeben dann genau die Menge aller Primimplikanten $s_1, \dots, s_m$ von q. Wir setzen

$$p^{(2)} \; := \; s^1 \vee \cdots \vee s^m$$

Nach den Primimplikantensatz gilt $p^{(2)} \sim q$; allerdings ist $p^{(2)}$ i.Allg. noch nicht die gesuchte Minimalform.

Wir verwenden dabei die abkürzende Schreibweise

$$x_1^{a_1} \dots x_n^{a_n} \; \to \; a_1 \dots a_n$$

Die Dualzahlen $a_1 \dots a_n$ werden dabei nach der Anzahl der auftretenden Einsen sortiert. Ein Ausdruck mit j Einsen muss dann nur noch mit allen Ausdrücken mit $j+1$ Einsen verglichen werden.

Schritt 3:

Im dritten Schritt erfolgt die Auswahl eines minimalen Satzes von Primimplikanten, der sämtliche Produktterme der DNF *überdeckt*, d.h. Primimplikaten, die die Summe der anderen Primimplikanten impliziert, können weggelassen werden.

Dazu stellt man die so genannte **Primimplikanten Tabelle** auf.

In dieser werden die Produktterme der DNF horizontal, die Primimplikanten vertikal angeordnet. Man trägt nun in die Tabelle ein **x** ein, falls der Primimplikant ein Teilprodukt des jeweiligen Produktterms der DNF ist.

Eine Summe von Primimplikanten ist genau dann äquivalent zu q, wenn die auftretenden Summanden alle Produkte der DNF überdecken. Zur Bestimmung einer minimalen Anzahl von Summanden bestimmt man zunächst diejenigen Produkte der DNF, die von nur einem Primimplikaten überdeckt werden, d.h. man sucht in der Primimplikanten Tabelle die Spalten, in denen nur ein Symbol **x** auftaucht.

Die dabei ausgewählten Primimplikanten nennt man *wesentlich*, die Summe der wesentlichen Primimplikanten heißt der *Kern*. Dieser Kern muss in jeder disjunkten Minimalform enthalten sein.

Man streicht nun alle Produkte der DNF, die von einem wesentlichen Primimplikant überdeckt werden, d.h. man streicht die entsprechenden Spalten in der Primimplikanten–Tabelle. Weiter streicht man die zugehörigen wesentlichen Primimplikanten, d.h. die zugehörigen Zeilen der Tabelle.

Im letzten Schritt muss man durch Ausprobieren aller verbleibenden Möglichkeiten eine minimale Restüberdeckung bestimmen.

Beispiel (6.7) $q = \overline{x}_1\overline{x}_2\overline{x}_3\overline{x}_4 \vee \overline{x}_1\overline{x}_2 x_3 \vee x_1\overline{x}_3\overline{x}_4 \vee \overline{x}_2 x_4 \in P_4$

Schritt 1: Die DNF von q lautet

$$\begin{aligned} p^{(1)} = \; & \overline{x}_1\overline{x}_2\overline{x}_3\overline{x}_4 \vee \overline{x}_1\overline{x}_2 x_3 x_4 \vee \overline{x}_1\overline{x}_2 x_3\overline{x}_4 \vee x_1 x_2\overline{x}_3\overline{x}_4 \vee \\ & x_1\overline{x}_2\overline{x}_3\overline{x}_4 \vee x_1\overline{x}_2 x_3 x_4 \vee x_1\overline{x}_2\overline{x}_3 x_4 \vee \overline{x}_1\overline{x}_2\overline{x}_3 x_4 \end{aligned}$$

Schritt 2: Berechnung der Primimplikanten von $p^{(1)}$. Wir sortieren die Produktterme der DNF nach der Häufigkeit der 0:

$$\begin{array}{lcl} \overline{x}_1\overline{x}_2\overline{x}_3\overline{x}_4 & : & 0\,0\,0\,0 \\[4pt] x_1\overline{x}_2\overline{x}_3\overline{x}_4 & : & 1\,0\,0\,0 \\ \overline{x}_1\overline{x}_2 x_3\overline{x}_4 & : & 0\,0\,1\,0 \\ \overline{x}_1\overline{x}_2\overline{x}_3 x_4 & : & 0\,0\,0\,1 \\[4pt] x_1 x_2\overline{x}_3\overline{x}_4 & : & 1\,1\,0\,0 \\ x_1\overline{x}_2\overline{x}_3 x_4 & : & 1\,0\,0\,1 \\ \overline{x}_1\overline{x}_2 x_3 x_4 & : & 0\,0\,1\,1 \\[4pt] x_1\overline{x}_2 x_3 x_4 & : & 1\,0\,1\,1 \end{array}$$

Reduktionsregel: Erster Durchgang

$$\left.\begin{array}{c}0\,0\,0\,0\\1\,0\,0\,0\end{array}\right\}\rightarrow -\,0\,0\,0 \qquad \left.\begin{array}{c}0\,0\,0\,0\\0\,0\,1\,0\end{array}\right\}\rightarrow 0\,0-0$$

$$\left.\begin{array}{c}0\,0\,0\,0\\0\,0\,0\,1\end{array}\right\}\rightarrow 0\,0\,0\,- \qquad \left.\begin{array}{c}1\,0\,0\,0\\1\,1\,0\,0\end{array}\right\}\rightarrow 1-0\,0$$

$$\left.\begin{array}{c}1\,0\,0\,0\\1\,0\,0\,1\end{array}\right\}\rightarrow 1\,0\,0- \qquad \left.\begin{array}{c}0\,0\,1\,0\\0\,0\,1\,1\end{array}\right\}\rightarrow 0\,0\,1-$$

$$\left.\begin{array}{c}0\,0\,0\,0\\1\,0\,0\,1\end{array}\right\}\rightarrow -0\,0\,1 \qquad \left.\begin{array}{c}0\,0\,0\,1\\0\,0\,1\,1\end{array}\right\}\rightarrow 0\,0-1$$

$$\left.\begin{array}{c}1\,0\,0\,1\\1\,0\,1\,1\end{array}\right\}\rightarrow 1\,0-1 \qquad \left.\begin{array}{c}0\,0\,1\,1\\1\,0\,1\,1\end{array}\right\}\rightarrow -0\,1\,1$$

Reduktionsregel: Zweiter Durchgang

$$\left.\begin{matrix} -0\,0\,0 \\ -0\,0\,1 \end{matrix}\right\} \rightarrow \boxed{\text{-0 0-}} \qquad \left.\begin{matrix} 0\,0-0 \\ 0\,0-1 \end{matrix}\right\} \rightarrow \boxed{\text{0 0- -}}$$

$$\left.\begin{matrix} 0\,0\,0- \\ 1\,0\,0- \end{matrix}\right\} \rightarrow \boxed{\text{-0 0-}} \qquad \left.\begin{matrix} 0\,0\,0- \\ 0\,0\,1- \end{matrix}\right\} \rightarrow \boxed{\text{0 0- -}}$$

$$\left.\begin{matrix} -0\,0\,1 \\ -0\,1\,1 \end{matrix}\right\} \rightarrow \boxed{\text{-0-1}} \qquad \left.\begin{matrix} 0\,0-1 \\ 1\,0-1 \end{matrix}\right\} \rightarrow \boxed{\text{-0-1}}$$

Der Term $\boxed{\text{1-00}}$ aus dem ersten Durchgang läßt sich nicht weiter reduzieren. Die resultierenden Terme auf der rechten Seite lassen sich ebenfalls nicht weiter reduzieren. Daher sind die Primimplikanten gegeben durch $x_1\overline{x}_3\overline{x}_4$, $\overline{x}_2\overline{x}_3$, $\overline{x}_1\overline{x}_2$, $\overline{x}_2 x_4$ und wir erhalten

$$p^{(2)} = x_1\overline{x}_3\overline{x}_4 \vee \overline{x}_2\overline{x}_3 \vee \overline{x}_1\overline{x}_2 \vee \overline{x}_2 x_4$$

Wir geben nochmals die gesamte Tabelle an:

$\overline{x}_1\,\overline{x}_2\,\overline{x}_3\,\overline{x}_4$	0 0 0 0	– 0 0 0	$\boxed{-\ 0\ 0\ -}$
		0 0 – 0	$\boxed{0\ 0\ -\ -}$
$x_1\,\overline{x}_2\,\overline{x}_3\,\overline{x}_4$	1 0 0 0	0 0 0 –	
$\overline{x}_1\,\overline{x}_2\,x_3\,\overline{x}_4$	0 0 1 0		$\boxed{-\ 0\ -\ 1}$
$\overline{x}_1\,\overline{x}_2\,\overline{x}_3 x_4$	0 0 0 1	$\boxed{1\ -\ 0\ 0}$	
		1 0 0 –	
$x_1\,x_2\overline{x}_3\,\overline{x}_4$	1 1 0 0	0 0 1 –	
$x_1\,\overline{x}_2\,\overline{x}_3\,x_4$	1 0 0 1	– 0 0 1	
$\overline{x}_1\,\overline{x}_2\,x_3\,x_4$	0 0 1 1	0 0 – 1	
$x_1\,\overline{x}_2\,x_3\,x_4$	1 0 1 1	1 0 – 1	
		– 0 1 1	

Schritt 3: Zu bestimmen ist ein minimaler Satz von Primimplikanten, der sämtliche Produktterme der DNF überdeckt.

Die Primimplikanten Tabelle lautet

				0	1	0	0	1	1	0	1
				0	0	0	0	1	0	0	0
				0	0	1	0	0	0	1	1
				0	0	0	1	0	1	1	1
1	–	0	0		x			x			
–	0	0	–	x	x		x		x		
0	0	–	–	x		x	x			x	
–	0	–	1				x		x	x	x

Wir wählen nun die Primimplikanten aus, für die nur ein **x** in einer Spalte auftaucht. Dies sind gerade die Terme $1-0\,0$, $0\,0--$ und $-0-1$. Streichen wir nun alle Spalten, die von diesen wesentlichen Primimplikanten überdeckt werden, so sieht man, dass diese

bereits eine vollständige Überdeckung aller Produktterme der DNF ergeben.
Damit lautet die Minimalform

$$p^{(3)} = x_1\,\overline{x}_3\,\overline{x}_4 \vee \overline{x}_1\,\overline{x}_2 \vee \overline{x}_2\,x_4.$$

Beispiel (6.8)

Es liege bereits die DNF vor:

$$\begin{aligned} p^{(1)} \;=\;& 00000 \vee 00010 \vee 00100 \vee 00110 \vee \\ & 01001 \vee 01010 \vee 01101 \vee 01110 \vee \\ & 01111 \vee 10000 \vee 10001 \vee 10101 \vee \\ & 11010 \vee 11100 \vee 11110 \vee 11111 \end{aligned}$$

Tabelle der Produktterme:

0	0	0	0	0	0	0	0	–	0		0	0	–	–	0	G
					0	0	–	0	0							
0	0	0	1	0	–	0	0	0	0	A	0	–	–	1	0	H
0	0	1	0	0												
1	0	0	0	0	0	0	–	1	0		–	1	–	1	0	I
					0	–	0	1	0							
0	0	1	1	0	0	0	1	–	0		–	1	1	1	–	J
0	1	0	0	1	1	0	0	0	–	B						
0	1	0	1	0												
1	0	0	0	1	0	–	1	1	0							
					0	1	–	0	1	C						
0	1	1	0	1	0	1	–	1	0							
0	1	1	1	0	–	1	0	1	0							
1	0	1	0	1	1	0	–	0	1	D						
1	1	0	1	0												
1	1	1	0	0	0	1	1	–	1	E						
					0	1	1	1	–							
0	1	1	1	1	–	1	1	1	0							
1	1	1	1	0	1	1	–	1	0							
					1	1	1	–	0	F						
1	1	1	1	1												
					–	1	1	1	1							
					1	1	1	1	–							

Die Primimplikanten sind $A - J$.

Primimplikantentabelle:

						0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	1	1	1	0	1	1	
						0	0	0	0	0	1	1	0	1	1	0	1	1	1	1	1	
						0	0	1	0	1	0	0	0	1	1	1	0	1	1	1	1	
						0	1	0	0	1	0	1	0	0	1	0	1	0	1	1	1	
						0	0	0	0	0	1	0	1	1	0	1	0	0	1	0	1	
	–	0	0	0	0	x			x													
	1	0	0	0	–				x				x									
$\longrightarrow$	0	1	–	0	1						x			x								
$\longrightarrow$	1	0	–	0	1								x			x						
	0	1	1	–	1									x					x			
$\longrightarrow$	1	1	1	–	0													x		x		
$\longrightarrow$	0	0	–	–	0	x	x	x		x												
	0	–	–	1	0		x			x		x			x							
$\longrightarrow$	–	1	–	1	0							x			x		x			x		
$\longrightarrow$	–	1	1	1	–										x				x	x	x	
						|	|	|		|	|	|	|	|	|	|	|	|	|	|	|	gestrichen

Kern: C, D, F, G, I, J

Restmatrix:

$$
\begin{array}{ccccc|c}
 & & & & & 1 \\
 & & & & & 0 \\
 & & & & & 0 \\
 & & & & & 0 \\
 & & & & & 0 \\
\hline
- & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathrm{x} \\
1 & 0 & 0 & 0 & - & \mathrm{x} \\
0 & 1 & 1 & - & 1 & \\
0 & - & - & 1 & 0 &
\end{array}
$$

Es gibt daher *zwei* disjunktive Minimalformen:

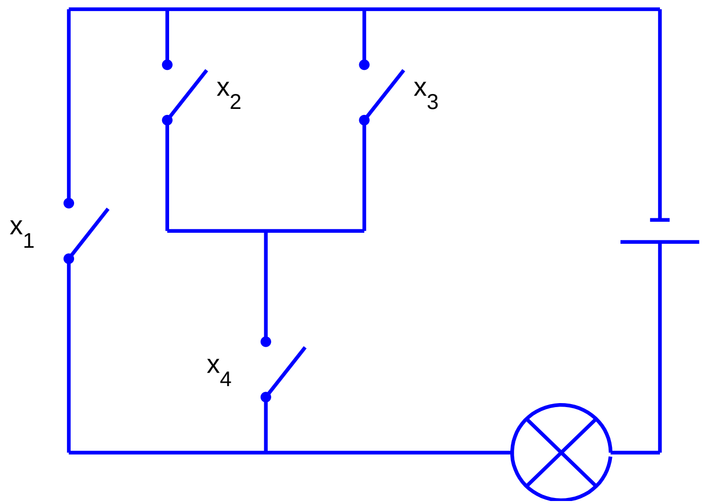
$$
\begin{aligned}
p^{(3)} &= \overline{x}_2\,\overline{x}_3\,\overline{x}_4\,\overline{x}_5 \vee \overline{x}_1\,x_2\,\overline{x}_4\,x_5 \vee x_1\,\overline{x}_2\,\overline{x}_4\,x_5 \vee x_1\,x_2\,x_3\,\overline{x}_5 \\
&\quad \vee \overline{x}_1\,\overline{x}_2\,\overline{x}_5 \vee x_2\,x_4\,\overline{x}_5 \vee x_2\,x_3\,x_4 \\
\tilde{p}^{(3)} &= x_1\,\overline{x}_2\,\overline{x}_3\,\overline{x}_4 \vee \overline{x}_1\,x_2\,\overline{x}_4\,x_5 \vee x_1\,\overline{x}_2\,\overline{x}_4\,x_5 \vee x_1\,x_2\,x_3\,\overline{x}_5 \\
&\quad \vee \overline{x}_1\,\overline{x}_2\,\overline{x}_5 \vee x_2\,x_4\,\overline{x}_5 \vee x_2\,x_3\,x_4\,.
\end{aligned}
$$

Schaltkreisalgebra.

Wir betrachten elektrische Schaltungen, die sich aus serien- oder parallelgeschalteten Schaltern zusammensetzen. Schalter sind durch zwei mögliche Zustände (offen, geschlossen) gekennzeichnet. Es kann sich dabei um mechanische Kontakte, Relais, Halbleiterdioden, Fotozellen oder Transistoren handeln.

Jede solche Schaltung läßt sich als ein Boolesches Polynom schreiben. Dabei entsprechen die Booleschen Variablen $x_1, \ldots, x_n$ den Eingangsgrößen (Schaltern), $p_{\mathbb{B}}(a_1, \ldots, a_n)$ ist der so genannte *Leitwert* oder *Schaltwert*. Die Konjunktion $x_i\, x_j$ entspricht der Reihenschaltung, die Disjunktion $x_i \vee x_j$ der Parallelschaltung der Schalter. Zusätzlich gibt es die Negation $\overline{x}_j$.

Die folgende Schaltung



entspricht beispielsweise dem Booleschen Polynom

$$p = x_1 \vee (x_4 \wedge (x_2 \vee x_3)).$$

Beispiel (6.9)
An jedem der drei Eingänge eines Raumes soll ein Schalter unabhängig von den anderen die Raumbeleuchtung ein- oder ausschalten können.

Eingangsgrößen (Schalter): x_1, x_2, x_3
Ausgang (Lampe): p

x_1	x_2	x_3	p
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	1
1	0	0	1
0	1	1	0
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	1

Hiermit ergibt sich die folgende DNF für die Schaltung

$$p \;=\; x_1 x_2 x_3 \vee x_1 \overline{x}_2 \overline{x}_3 \vee \overline{x}_1 x_2 \overline{x}_3 \vee \overline{x}_1 \overline{x}_2 x_3.$$

Minimierung nach Karnaugh.

Das folgende graphische Verfahren optimiert Schaltkreisfunktionen mit maximal vier Booleschen Variablen. Vorgegeben ist wieder ein Boolesches Polynom in disjunkter Normalform. Die auftretenden Produktterme werden in das sog. *Karnaughsche Diagramm* eingetragen.

$n = 2:$

0 0	0 1
1 0	1 1

$n = 3:$

0 0 0	0 0 1	0 1 1	0 1 0
1 0 0	1 0 1	1 1 1	1 1 0

$n = 4:$

0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1	1	0	0	0	1
1	0	0	0	1	0	1	0	1	0	1	1	1	0	0	1
1	1	0	0	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	0	1
0	1	0	0	0	1	1	0	0	1	1	1	0	1	0	1

Die Diagramme haben die Eigenschaft, dass benachbarten Produktterme, die sich nur in einem Faktor unterscheiden auch im Diagramm benachbart sind. Hierzu sind für $n = 3$ die Seitenbegrenzungen rechts und links zu identifizieren, man erhält also einen *Zylinder*. Für $n = 4$ sind sowohl die obere und untere wie auch die rechte und linke Begrenzungslinie zu identifizieren; man erhält einen *Torus*.

Man geht nun wie folgt vor:

1.) Jeder Produktterm, der in der DNF von $p(x_1, \ldots, x_n)$ auftritt, wird im Karnaugh-Diagramm schraffiert.

2.) Schraffierte Blöcke werden nach folgenden Regeln zusammengefaßt

- 8 benachbarte schraffierte Felder in zwei benachbarten Reihen werden zu einem Term der Länge $n - 3$ zusammengefaßt.
- 4 benachbarte schraffierte Felder in einer Reihe oder in zwei benachbarten Reihen werden zu einem Term der Länge $n - 2$ zusammengefaßt.
- 2 benachbarte schraffierte Felder werden zu einem Term der Länge $n - 1$ zusammengefaßt.

3.) Die maximal zusammengefaßten Blöcke liefern genau die Primimplikanten von p.

Beispiel (6.10)

$$
\begin{aligned}
p^{(1)} \;=\; & 0000 \vee 0011 \vee 0010 \vee 1100 \\
& \vee 1000 \vee 1011 \vee 1001 \vee 0001
\end{aligned}
$$

Karnaugh-Diagramm:

0 0 0 0	0 0 1 0	0 0 1 1	0 0 0 1
1 0 0 0	1 0 1 0	1 0 1 1	1 0 0 1
1 1 0 0	1 1 1 0	1 1 1 1	1 1 0 1
0 1 0 0	0 1 1 0	0 1 1 1	0 1 0 1

$\Rightarrow$ Die Primimplikanten lauten damit:

$$-0-1,\ -00-,\ 00--,\ 1-00$$

Die minimale Überdeckung ist gegeben durch:

$$1-00,\ -0-1,\ 00--\ ,$$

die Minimalform lautet also $p \sim x_1\,\overline{x}_3\,\overline{x}_4 \vee \overline{x}_2\,x_4 \vee \overline{x}_1\,\overline{x}_2$.

Originalarbeiten zu Abschnitt 6:

W.V. Quine: The Problem of Simplifying Truth Functions;
American Mathematical Monthly, 1952.

E.J. McCluskey: Minimisation of Boolean Functions;
Bell System Technical Journal, 1417–1444, 1956.

M. Karnaugh: A Map Method for Synthesis of Combinational Logic Circuits;
Transactions of the AIEE, Communications and Electronics, 72, 593–599, 1953.