4. Stetigkeit und Differenzierbarkeit

4.1 Grenzwerte von Funktionen. $(V, \|\cdot\|)$, $(W, \|\cdot\|)$ seien normierte Vektorräume über $\mathbb{R}/\mathbb{C}$, $D \subset V$, $f : D \to W$

Definition (4.1.1)

a) $x_0 \in V$ heißt **Häufungspunkt** von D $:\Longleftrightarrow$
$\exists (x_k) \in V^{\mathbb{N}}: \; x_k \in D \;\wedge\; x_k \neq x_0 \;\wedge\; x_k \to x_0 \; (k \to \infty)$.

D': **Menge der Häufungspunkte** von D, $\overline{D} := D \cup D'$ heißt **abgeschlossene Hülle** von D, D heißt **abgeschlossen** $:\Longleftrightarrow \; D = \overline{D}$.

b) $$K_\varepsilon(x_0) \; := \; \{x \in V : \; \|x - x_0\| < \varepsilon\}$$

heißt **(offene) Kugel** um x_0 mit Radius $\varepsilon > 0$.

c) x_0 heißt **innerer Punkt** von D $:\Longleftrightarrow$ $\exists \varepsilon > 0 :$ $K_\varepsilon(x_0) \subset D$.

D^0: **Menge der inneren Punkte** von D,

D heißt **offen** $:\Longleftrightarrow$ $D = D^0$.

d) D heißt **beschränkt** $:\Longleftrightarrow$ $\exists\, x_0 \in V,\ \varepsilon > 0 :$ $D \subset K_\varepsilon(x_0)$.

Beispiele (4.1.2)

- $D =]0,1[$; D ist offen, $D' = \overline{D} = [0,1]$.
- $D =]0,1]$; D weder offen noch abgeschlossen, $D^0 =]0,1[$, $D' = \overline{D} = [0,1]$.
- $D = \{1\} \cup]2,3]$; $D^0 =]2,3[$, $D' = [2,3]$, $\overline{D} = \{1\} \cup [2,3]$.
- Kugeln $K_r(x_0)$ sind stets offen und beschränkt, $K_r(x_0)' = \overline{K}_r(x_0) := \{x : \|x - x_0\| \leq r\}$.
- Innere Punkte sind stets auch Häufungspunkte.

Definition (4.1.3) Grenzwerte von Funktionen

Sei $f : D \to W,\ D \subset V,\ x_0 \in D'$.

a) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = y_0 \quad :\Longleftrightarrow$
$\forall\, (x_k) \in D^{\mathbb{N}} :\ x_k \neq x_0 \ \wedge\ x_k \to x_0 \ \Rightarrow\ f(x_k) \to y_0\, (k \to \infty)$.

b) Für $D \subset \mathbb{R}$ werden **einseitige Grenzwerte** definiert:

$f(x_0^-) := \lim\limits_{x \to x_0 -} f(x) = y_0 \quad :\Longleftrightarrow$
$\forall\, (x_k) \in D^{\mathbb{N}} :\ x_k < x_0 \ \wedge\ x_k \to x_0 \ \Rightarrow\ f(x_k) \to y_0\, (k \to \infty)$.

$f(x_0^+) := \lim\limits_{x \to x_0 +} f(x) = y_0 \quad :\Longleftrightarrow$
$\forall\, (x_k) \in D^{\mathbb{N}} :\ x_k > x_0 \ \wedge\ x_k \to x_0 \ \Rightarrow\ f(x_k) \to y_0\, (k \to \infty)$.

Hierbei muss jeweils wenigstens eine Folge (x_k) mit den verlangten Eigenschaften existieren!

Beispiele (4.1.4)

- $\lim\limits_{x\to 0-} \sin\frac{1}{x}$ und $\lim\limits_{x\to 0+} \sin\frac{1}{x}$ existieren nicht; $\lim\limits_{x\to 0} x \sin\frac{1}{x} = 0.$
- $\lim\limits_{x\to 0-} \frac{1}{x} = -\infty, \quad \lim\limits_{x\to 0+} \frac{1}{x} = \infty, \quad \lim\limits_{x\to \infty} \frac{1}{x} = 0.$
- Die Grenzwertsätze gelten analog für Funktionsgrenzwerte!
- $$\lim_{x\to -1} \frac{(x+3)\,(2\,x-1)}{x^2+3\,x-2} = \frac{\lim(x+3)\cdot\lim(2\,x-1)}{\lim(x^2+3\,x-2)} = \frac{3}{2}.$$
- $$\lim_{x\to\infty} \frac{2\,x^4-3\,x^2+1}{6\,x^4+x^3-3\,x} = \lim_{x\to\infty} \frac{2-\frac{3}{x^2}+\frac{1}{x^4}}{6+\frac{1}{x}-\frac{3}{x^3}} = \frac{1}{3}.$$
- $$\lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)-x}{h\,(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})} = \frac{1}{2\,\sqrt{x}}, \qquad x > 0.$$

- $$\lim_{(x,y)\to(1,2)} \frac{3-x+y}{4+x-2\,y} \;=\; \frac{3-\lim x+\lim y}{4+\lim x-2\,\lim y} \;=\; 4.$$

- $$\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{4\,x+y-3\,z}{2\,x-5\,y+2\,z} \quad \text{existiert nicht!}$$

Definition (4.1.5) (Stetigkeit) Sei $F: D \to W$, $D \subset V$.

a) f heißt **stetig ergänzbar** in $x_0 \in D'$, falls $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ existiert.

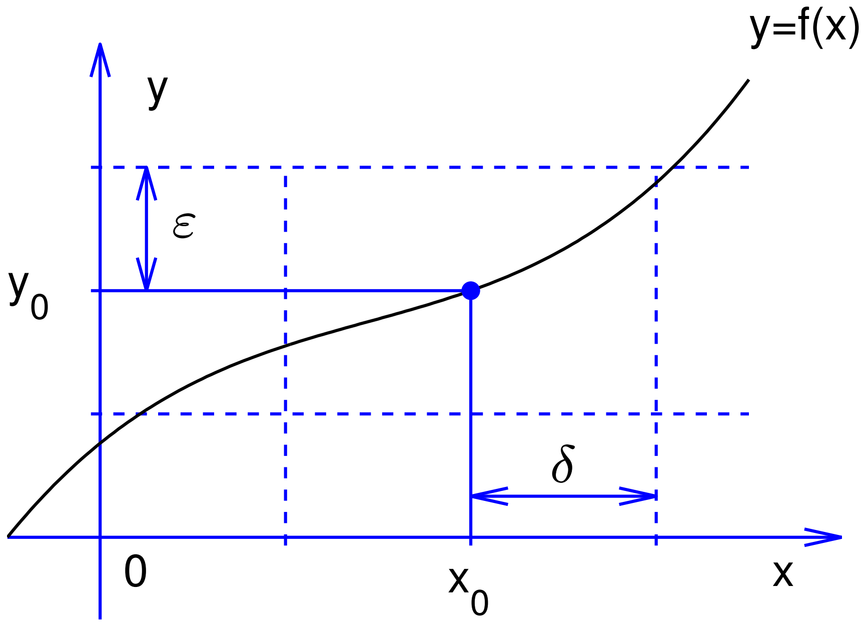
b) f heißt **stetig** in $x_0 \in D' \cap D$, falls $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$.

c) f heißt **stetig**, falls f in allen Punkten $x_0 \in D' \cap D$ stetig ist.

Satz (4.1.6)

Für $x_0 \in D' \cap D$ gilt: f ist genau dann in x_0 stetig, falls

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0 : \forall x \in D : \|x - x_0\| < \delta \Rightarrow \|f(x) - f(x_0)\| < \varepsilon.$$



Bemerkungen (4.1.7)

a) Sind f, $g : D \to W$ stetig in $x_0 \in D \cap D'$, so sind auch $f + g$ und $\alpha\, f$ stetig in x_0. Für $W = \mathbb{R}/\mathbb{C}$ sind auch $f \cdot g$ und f/g stetig in x_0, letzteres falls $g(x_0) \neq 0$.

b) Die Komposition stetiger Funktionen ist stetig!

Beispiele (4.1.8)

a) Konstante Funktionen sind stetig.

b) Die Identität $\mathrm{id} : V \to V$, $f(x) := x$ ist stetig.

c) Polynomfunktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ oder $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$,

$f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ sind stetig!

d) Polynomfunktionen in mehreren Variablen

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{k_1 \ldots k_n = 0}^{m} a_{k_1 \ldots k_n} x_1^{k_1} \ldots x_n^{k_n} \quad \text{sind stetig!}$$

e) Lineare Abbildungen $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{A}\,\mathbf{x}$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{(m,n)}$ sind stetig.

f) Quadratische Formen $g(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \mathbf{x}^\top \mathbf{A}\,\mathbf{y}$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m$, $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ sind stetig.

g) Wurzeln $\sqrt[m]{x} : [0,\infty[\to \mathbb{R}$ sind stetig.

h) Durch Potenzreihen $f(z) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k\, z^k$ definierte Funktionen sind stetig. Damit sind auch die elementaren Funktionen exp, sin, cos, tan ... auf ihrem jeweiligen Definitionsbereich stetig.

h) $f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ ist als Komposition stetiger Funktionen stetig.

i) $f(x) = \dfrac{x^3 + 2\,x^2 - 3}{x - 1}$ ist auf $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ stetig und in $x = 1$ stetig ergänzbar.

Satz (4.1.9) Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig.

a) Existenz einer Nullstelle:

$$f(a) \cdot f(b) < 0 \;\Rightarrow\; \exists\, x_0 \in\,]a,b[:\; f(x_0) = 0.$$

b) Zwischenwertsatz:

$$f(a) < c < f(b) \quad \Rightarrow \quad \exists\, x_0 \in\,]a,b[:\; f(x_0) = c$$

c) Stetigkeit der Umkehrfunktion: Ist f stetig und streng monoton wachsend, so ist auch f^{-1} stetig und streng monoton wachsend.

d) Min–Max–Eigenschaft:

$$\exists\, x_1, x_2 \in [a,b] :\; f(x_1) = \min_{x \in [a,b]} f(x) \;\wedge\; f(x_2) = \max_{x \in [a,b]} f(x).$$

Verallgemeinerung auf mehrere Variable.

Definition (4.1.10) $D \subset \mathbb{R}^n$ heißt **kompakt**, falls jede Folge $(x_k) \in D^{\mathbb{N}}$ eine in D konvergente Teilfolge besitzt.

Satz (4.1.11) (Min-Max Eigenschaft)

Ist $D \subset \mathbb{R}^n$ kompakt und $f : D \to \mathbb{R}$ stetig, so existieren $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in D$ mit

$$f(\mathbf{x}_1) = \min_{\mathbf{x} \in D} f(\mathbf{x}) \quad \text{und} \quad f(\mathbf{x}_2) = \max_{\mathbf{x} \in D} f(\mathbf{x}).$$

Kriterien für Kompaktheit (4.1.12) Es sind äquivalent:

a) D ist kompakt,
b) D ist beschränkt und abgeschlossen,
c) Jede offene Überdeckung von D besitzt eine endliche Teilüberdeckung **(Heine, Borel)**.

Beispiele (4.1.13)

a) Normen sind stetig! Denn

$$\big|\,\|\mathbf{x}_k\| - \|\mathbf{x}_0\|\,\big| \;\le\; \|\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_0\| \;\to\; 0 \quad (k \to \infty)\,.$$

b) Abbildungen der Form $\mathbf{x} \mapsto \|\,\mathbf{A}\,\mathbf{x}\,\|$ sind stetig!

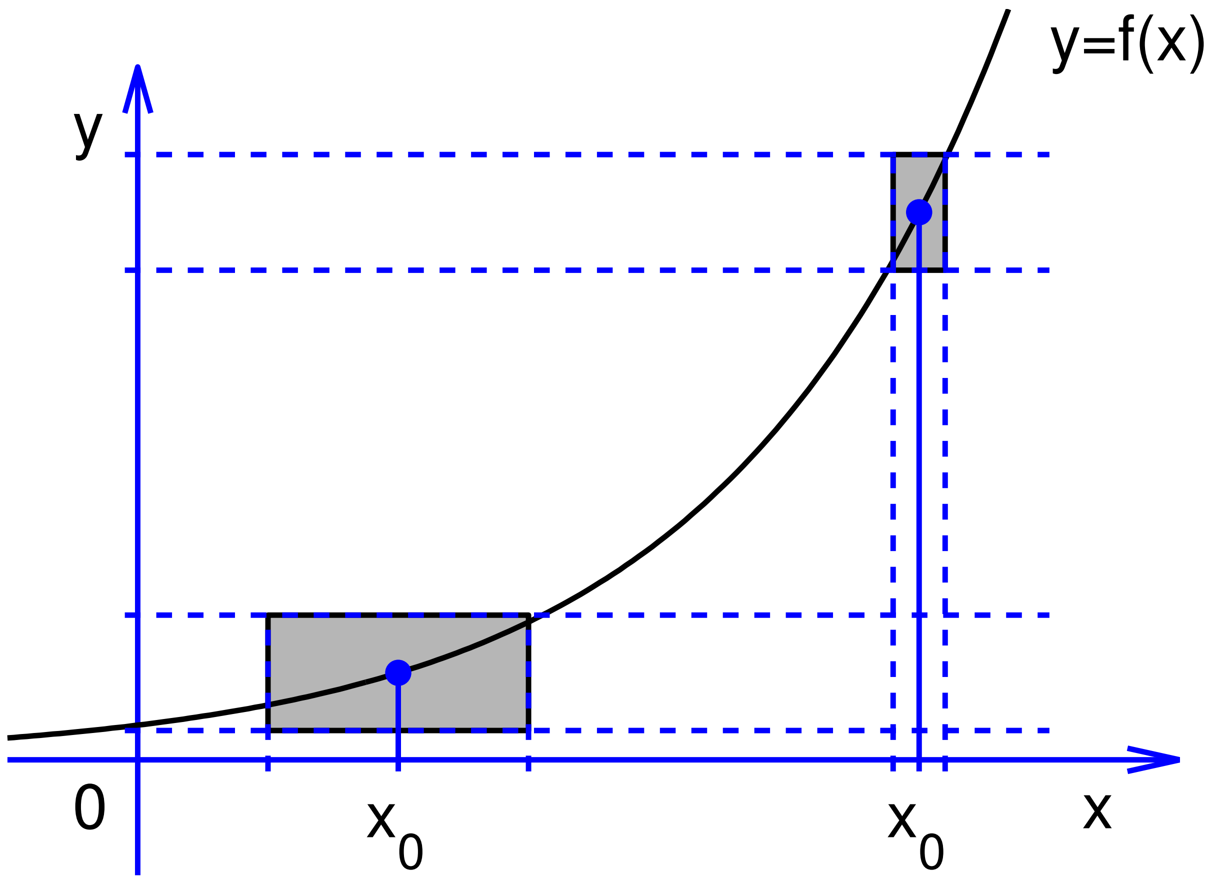
c) Sphären $S^{n-1} := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \|\mathbf{x}\| = 1\}$ sind kompakt (beschränkt und abgeschlossen). Daher $\exists\ \mathbf{x}_1,\ \mathbf{x}_2 \in S^{n-1}$ mit

$$\|\mathbf{A}\,\mathbf{x}_1\| = \min_{\|\mathbf{x}\|=1} \|\mathbf{A}\mathbf{x}\|, \qquad \|\mathbf{A}\,\mathbf{x}_2\| = \max_{\|\mathbf{x}\|=1} \|\mathbf{A}\mathbf{x}\|\,.$$

d) Bilineare Abbildungen $\langle\cdot,\cdot\rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ sind stetig!

e) Die Determinante $(\mathbf{x}_1,\ldots,\mathbf{x}_n) \mapsto \det(\mathbf{x}_1,\ldots,\mathbf{x}_n)$ ist stetig!

Gleichmäßige Stetigkeit: Wie hängt δ von ε und x_0 ab?



Definition (4.1.14) $f : D \to \mathbb{R}^m$ **gleichmäßig stetig**, falls

$\forall \varepsilon > 0 \,:\, \exists\, \delta > 0 \,:\, \forall\, \mathbf{x}, \mathbf{x}_0 \in D :\; \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| < \delta \;\Rightarrow\; \|\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{f}(\mathbf{x}_0)\| < \varepsilon\,.$

Satz (4.1.15)

Jede stetige Funktion $f : D \to \mathbb{R}^m$ auf einem kompaktem Definitionsbereich $D \subset \mathbb{R}^n$ ist gleichmäßig stetig.

Beispiel (4.1.16) Die Funktion $f(x) := 1/x$ ist nach obigem auf jedem kompaktem Intervall $[a, b]$, $a > 0$, gleichmäßig stetig – auf einem halboffenen Intervall $]0, b]$ jedoch nicht!

Denn für $x_1, x_2 > 0$ gilt

$$|f(x_1) - f(x_2)| = \left| \frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_2} \right| = \frac{|x_1 - x_2|}{x_1 x_2} < \varepsilon,$$

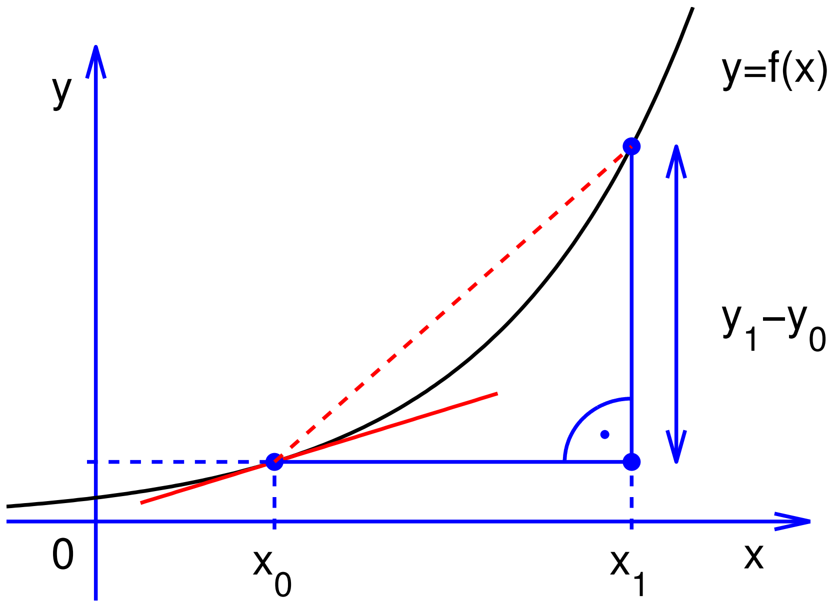
falls $|x_1 - x_2| < \delta := x_1 x_2 \varepsilon \to 0$ für $x_1, x_2 \to 0$. **qed**

4.2 Differentialrechnung einer Variablen

Definition (4.2.1) Sei $\mathbf{f} : D \to \mathbb{R}^m$, $D \subset \mathbb{R}$, $x_0 \in D \cap D'$.

a) f **differenzierbar** in x_0 $:\Leftrightarrow$ $\exists\, \mathbf{f}'(x_0) := \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{\mathbf{f}(x) - \mathbf{f}(x_0)}{x - x_0}$.

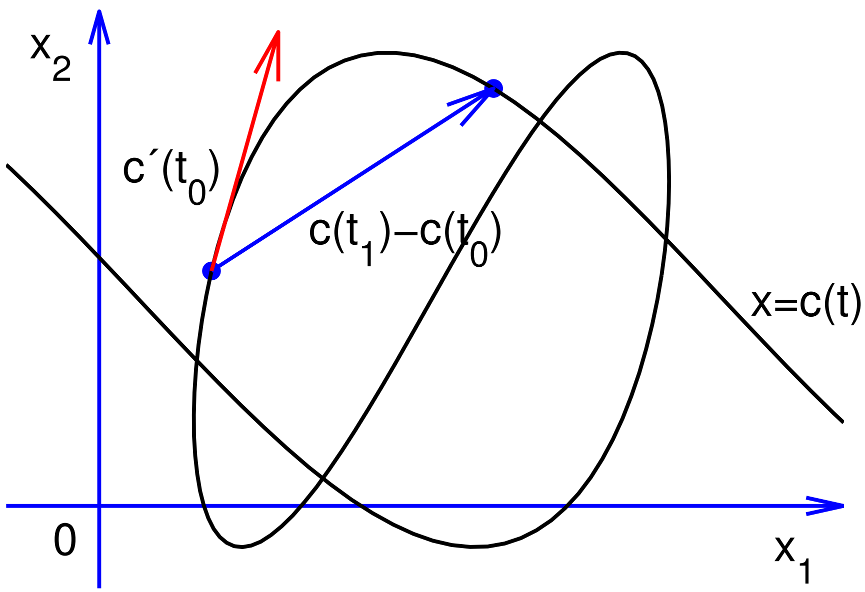
b) **Einseitige Ableitungen:** $\mathbf{f}'(x_0^{\pm}) := \lim\limits_{x \to x_0 \pm} \dfrac{\mathbf{f}(x) - \mathbf{f}(x_0)}{x - x_0}$.



c) Der Differentialquotient

$$\dot{\mathbf{c}}(t_0) \;:=\; \mathbf{c}'(t_0) \;:=\; \lim_{t \to t_0} \frac{\mathbf{c}(t) - \mathbf{c}(t_0)}{t - t_0}$$

beschreibt auch die lokale Geschwindigkeit einer Kurve $\mathbf{c}(t) \in \mathbb{R}^m$.



d) Die Tangente: Durch $\mathbf{y} = \mathbf{f}(x_0) + \mathbf{f}'(x_0)\,(x - x_0)$ wird die *bestapproximierende Gerade (Tangente)* an den Funktionsgraphen im Punkt $(x_0, \mathbf{f}(x_0))$ beschrieben.

Für den Fehler $\mathbf{r}(x; x_0) := \mathbf{f}(x) - \Big[\mathbf{f}(x_0) + \mathbf{f}'(x_0)\,(x - x_0)\Big]$ gilt:

$\mathbf{f}$ ist genau dann in x_0 differenzierbar, wenn es einen Vektor $\mathbf{f}'(x_0)$ gibt mit

$$\mathbf{r}(x, x_0) = o(x - x_0) :\Leftrightarrow \lim_{x \to x_0} \frac{\mathbf{r}(x; x_0)}{x - x_0} = 0.$$

$o(h)$ heißt **Landau–Symbol**.

Beispiele (4.2.2)

a) Konstante Funktionen $f(x) = c$ sind auf $\mathbb{R}$ differenzierbar mit $f'(x) = 0$.

b) Für $n \in \mathbb{N}$ ist $f(x) = x^n$ auf $\mathbb{R}$ differenzierbar; $f'(x) = n\,x^{n-1}$.
Denn

$$\lim_{x \to x_0} \frac{x^n - x_0^n}{x - x_0} \;=\; \lim_{x \to x_0} \sum_{k=0}^{n-1} x^k\, x_0^{n-1-k} \;=\; n\, x_0^{n-1}\,.$$

c) Grenzwertsätze $\Rightarrow$ Polynome sind differenzierbar mit

$$\frac{d}{dx}\Big(\sum_{k=0}^{n} a_k\, x^k\Big) \;=\; \sum_{k=1}^{n} a_k\, k\, x^{k-1}\,.$$

d)

$$\begin{aligned}
\sin' x \;&=\; \lim_{h \to 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} \\
&=\; \sin x \cdot \lim_{h \to 0}\left(\frac{\cos h - 1}{h}\right) + \cos x \cdot \lim_{h \to 0}\left(\frac{\sin h}{h}\right) \\
&=\; 0 \cdot \sin x + 1 \cdot \cos x
\end{aligned}$$

Analog: $\cos' x = -\sin x$.

Differentiationsregeln (4.2.3)

a) f differenzierbar $\Rightarrow$ f stetig

b) $(\alpha\, f + \beta\, g)'(x) = \alpha\, f'(x) + \beta\, g'(x)$

c) $(f \cdot g)'(x) = f'(x)\, g(x) + f(x)\, g'(x)$ **(Produktregel)**

d) $\left(\dfrac{f}{g}\right)'(x) = \dfrac{f'(x)\, g(x) - f(x)\, g'(x)}{g(x)^2}$ **(Quotientenregel)**

e) $(g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x)$ **(Kettenregel)**

f) Umkehrsatz: Ist f auf $[a,b]$ dffb. mit $f'(x) \neq 0\,(\forall\, x)$, so ist f auf $[a,b]$ injektiv, die Umkehrabbildung f^{-1} ist auf $f([a,b])$ diffb. und es gilt $\left(f^{-1}\right)'(y) = \dfrac{1}{f'(x)}, \quad y = f(x)$.

g) Verallgemeinerte Produktregel: Ist $\langle\cdot,\cdot\rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine Bilinearform und sind $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ diffb, so ist auch das Produkt $\langle f, g\rangle$ dffb. und es gilt

$$\frac{d}{dx}\langle f(x), g(x)\rangle = \Big\langle f'(x), g(x)\Big\rangle + \Big\langle f(x), g'(x)\Big\rangle$$

Beispiele (4.2.4)

- $$\frac{d}{dx}\tan x = \frac{d}{dx}\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right) = \frac{\cos x\,\cos x - \sin x\,(-\sin x)}{\cos^2 x}$$
  $$= \frac{1}{\cos^2 x}, \qquad x \neq \frac{\pi}{2} + k\,\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$$

- $$\frac{d}{dy}\operatorname{arctan} y = \frac{1}{\frac{d}{dx}\tan x} = \cos^2 x$$
  $$= \frac{1}{1 + \tan^2 x} = \frac{1}{1 + y^2}.$$

- $$\frac{d}{dy}\ln y = \frac{1}{\frac{d}{dx}\mathrm{e}^x} = \frac{1}{\mathrm{e}^x} = \frac{1}{y}\,.$$

- $$\frac{d}{dy}\sqrt[m]{y} = \frac{1}{\frac{d}{dx}x^m} = \frac{1}{m\,x^{m-1}} = \frac{1}{m}\,y^{\frac{1}{m}-1}\,.$$

- $$\frac{d}{dx}\left[\cos(\mathrm{e}^x)\right] = -\sin(\mathrm{e}^x)\cdot\mathrm{e}^x\,.$$

- $$\frac{d}{dx}\left[a^x\right] = \frac{d}{dx}\left[\mathrm{e}^{(\ln a)\,x}\right] = (\ln a)\cdot a^x\,.$$

- $$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\left[x^x\right] &= \frac{d}{dx}\left[\mathrm{e}^{x\cdot\ln x}\right] = \mathrm{e}^{x\,\ln x}\left(1\cdot\ln x + x\cdot\tfrac{1}{x}\right)\\ &= x^x\cdot(1+\ln x)\,.\end{aligned}$$

Definition (4.2.5)

$f : [a, b] \to \mathbb{R}^m$ heißt eine **C^k–Funktion**, falls f k-fach stetig differenzierbar ist, $k \in \mathbb{N}$.

Die Menge aller C^k–Funktionen wird mit C$^k([a, b], \mathbb{R}^m)$ bezeichnet; sie bildet einen reellen Vektorraum.

Mit C$([a, b], \mathbb{R}^m)$ wird der Vektorraum der stetigen Funktionen bezeichnet, mit C$^\infty([a, b], \mathbb{R}^m)$ der Vektorraum der beliebig oft stetig differenzierbaren Funktionen. Natürlich gilt

$$\mathrm{C}^\infty([a, b], \mathbb{R}^m) \subset \mathrm{C}^2([a, b], \mathbb{R}^m) \subset \mathrm{C}^1([a, b], \mathbb{R}^m) \subset \mathrm{C}([a, b], \mathbb{R}^m)$$

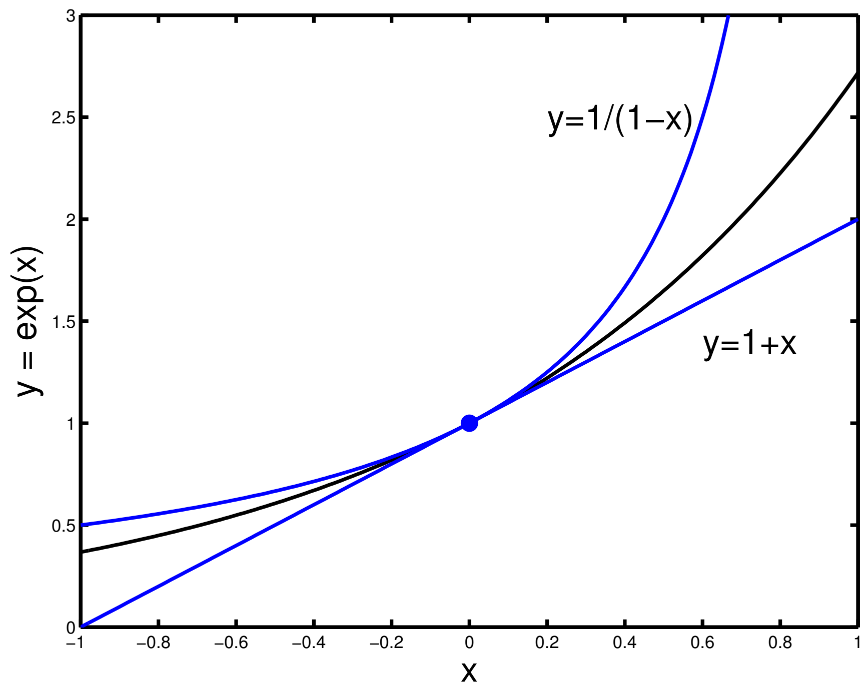
Die Exponentialfunktion (4.2.6)

(1) Für $x \in \mathbb{R}$ definiert man $\exp(x) := \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$.

Konvergenz wird im Lehrbuch (8.2.13)-(8.2.16) gezeigt.

(2) $$\forall\, x: \; -n < x < 1 \;\Rightarrow\; 1 + x \;\leq\; \left(1 \,+\, \frac{x}{n}\right)^n \;\leq\; \frac{1}{1-x} \quad .$$

(3) $$\forall\, x < 1 \;: \quad 1 + x \;\leq\; \exp(x) \;\leq\; \frac{1}{1-x} \quad .$$



(4) $\forall\, x,\ y \in \mathbb{R}: \quad \exp(x+y) = \exp(x)\cdot\exp(y) \quad .$

(5) $\forall\, x \in \mathbb{R}: \quad \frac{d}{dx}\exp(x) = \exp(x) \quad .$