6. Potenzreihen

6.1 Gleichmäßige Konvergenz

Sei $f_n : \mathbb{C}^m \supset D \to \mathbb{C}$ eine Folge von Funktionen.

Punktweise Konvergenz (6.1.1)

$$f_n \to f \quad (n \to \infty) \quad :\Longleftrightarrow \quad \forall\, z \in D : \lim_{n\to\infty} f_n(z) = f(z)$$

$$\Longleftrightarrow \quad \forall\, z \in D : \forall\, \varepsilon > 0 : \exists\, N = N(z,\varepsilon) \in \mathbb{N} :$$
$$\forall\, n \geq N : |\, f_n(z) - f(z)\,| < \varepsilon\,.$$

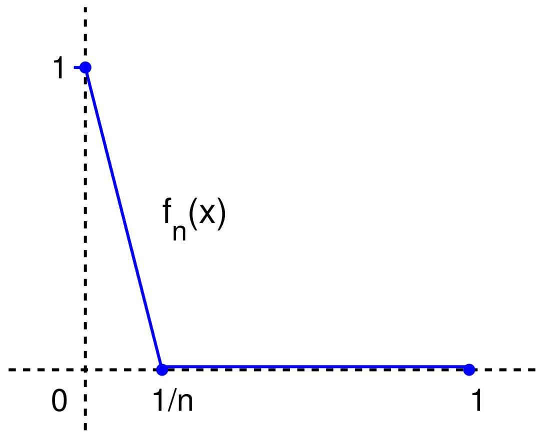
Gleichmäßige Konvergenz (6.1.2)

$$f_n \to f \quad (n \to \infty) \quad \text{glm.} :\Longleftrightarrow \lim_{n\to\infty} \Big[\sup_{z\in D} |f_n(z) - f(z)| \Big] = 0$$

$$\Longleftrightarrow \quad \forall\, \varepsilon > 0 : \exists\, N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N} :$$
$$\forall\, n \geq N,\ z \in D : |\, f_n(z) - f(z)\,| < \varepsilon.$$

Gleichmäßige Konvergenz $\Rightarrow$ Punktweise Konvergenz

Aber:



Gleichmäßige Konvergenz $\not\Leftarrow$ Punktweise Konvergenz

Satz (6.1.3)

$f_n : \mathbb{C}^m \supset D \to \mathbb{C}$ stetig und $f_n \to f$ $(n \to \infty)$ glm. auf D,
$\Rightarrow$ f stetig auf D.

Reihen von Funktionen (6.1.4) $\quad f(z) := \sum_{k=0}^{\infty} f_k(z),\ z \in D$

- **Majorantenkriterium von Weierstraß**

  $\forall z :\ |\, f_k(z)\,| \leq b_k \quad \wedge \quad \sum_{k=0}^{\infty} b_k < \infty$

  $\Rightarrow \quad \sum_{k=0}^{\infty} f_k(z)$ glm. und abs. kvgt auf D.

- f_k stetig $\ \wedge\ \sum_{k=0}^{\infty} f_k(z)$ glm. kvgt. $\ \Rightarrow\ f$ stetig

- **Differenzierbarkeit:**

  $D = [a, b] \ \wedge\ f_k$ dffb. $\ \wedge\ \sum f_k,\ \sum f_k'$ glm.kvgt. $\ \Rightarrow$
  $f(x)$ dffb. auf $[a, b]$ mit:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x} \sum_{k=0}^{\infty} f_k(x) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k'(x), \qquad x \in [a, b]\,.$$

6.2 Potenzreihen

$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k$: **Potenzreihe** zum Entw.punkt $z_0 \in \mathbb{C}$.

Beispiel: Taylor-Reihen von C^∞-Funktionen sind Potenzreihen:

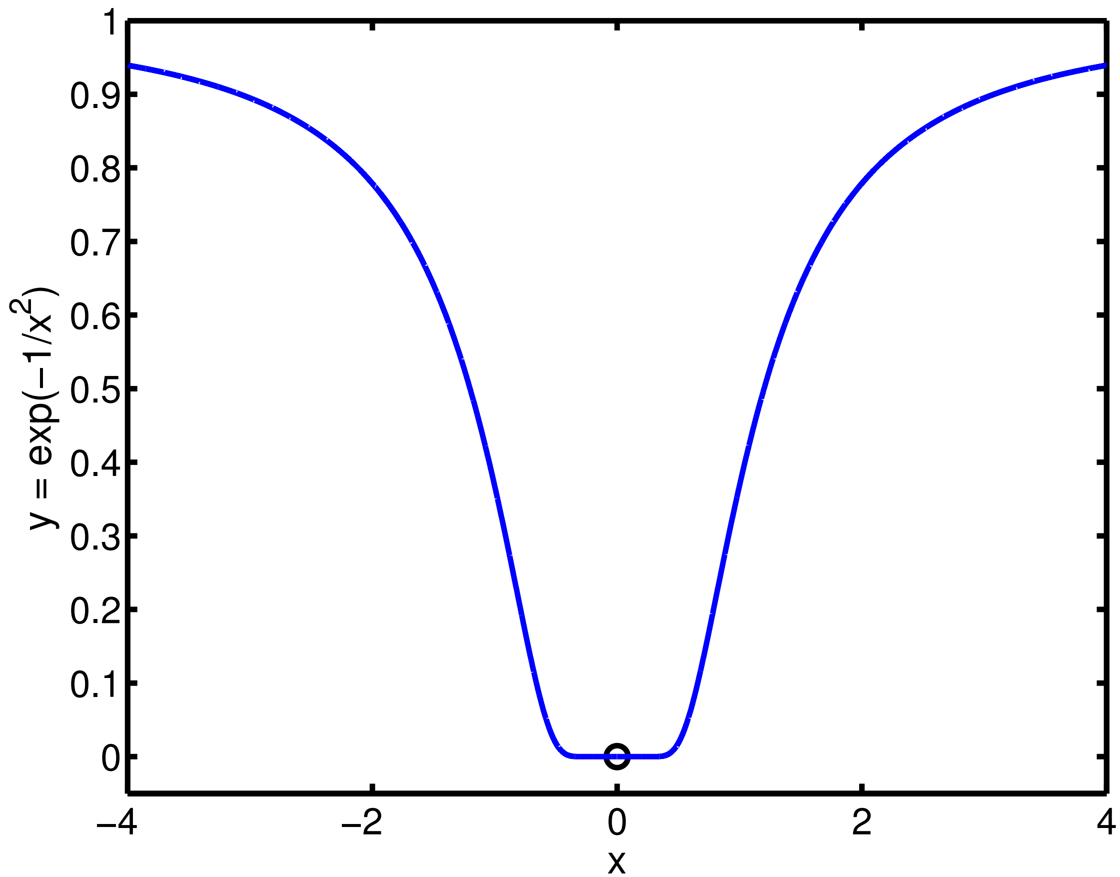
$$T(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k, \quad a_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} \qquad (6.2.1)$$

Warnung: Taylor-Reihen müssen nicht konvergieren, und selbst wenn sie konvergieren, müssen sie nicht gegen f konvergieren!!

Gegenbeispiel (6.2.2)

$$f(x) := \begin{cases} \exp(-1/x^2), & \text{für} \quad x \neq 0 \\ 0, & \text{für} \quad x = 0 \end{cases}$$

Definition (6.2.3) Konvergiert die Taylor-Reihe einer C^∞-Funktion f zu jedem Entwicklungspunkt lokal gegen f, so heißt f **analytisch (C^ω-Funktion)**.



y = exp(−1/x^2)
1
0.9
0.8
0.7
0.6
0.5
0.4
0.3
0.2
0.1
0
−4
−2
0
2
4
x

Satz (6.2.4) (Über Potenzreihen)

Sei $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k$ Potenzreihe.

- $\exists\, r \in [0, \infty] : |z - z_0| < r \Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k$ abs. konv.

  $|z - z_0| > r \Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k$ divergent.

  r: **Konvergenzradius**

- $\forall\, 0 < r_1 < r : \sum a_k (z - z_0)^k$ glm. kvgt. auf $|z - z_0| \leq r_1$
- $r = 1/\limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|}$ **(Cauchy-Hadamard Formel)**
- $r = \lim_{k\to\infty} |a_k/a_{k+1}|, \quad r = \lim_{k\to\infty} 1/\sqrt[k]{|a_k|}$.
- $\sum_{k=1}^{\infty} a_k k (z - z_0)^{k-1}$ hat den gleichen Konvergenzradius!

Folgerungen (6.2.5)

- $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k$ ist auf $K_r(z_0)$ stetig!
- Sind a_k, $z_0 = x_0 \in \mathbb{R}$, so ist $f(x)$ auf $]x_0 - r, x_0 + r[$ eine C^∞-Funktion und es gilt

$$f'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k k (x - x_0)^{k-1},$$
$$f''(x) = \sum_{k=2}^{\infty} a_k k(k-1) (x - x_0)^{k-2}, \; \cdots$$

Damit folgt insbesondere : $a_k = f^{(k)}(x_0)/k!, \; \forall\, k$

- **Identitätssatz (6.2.6)**

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k = \sum_{k=0}^{\infty} b_k (x - x_0)^k, \; \forall\, |x - x_0| < \varepsilon,$$
$$\Rightarrow \quad \forall\, k : \; a_k = b_k$$

- **Abelscher Grenzwertsatz (6.2.7)**
  Reelle Potenzreihen sind dort stetig, wo sie konvergieren, auch in den Randpunkten des Konvergenzintervalls!

Niels Henrik Abel: (1802-1829); Berlin, Paris

Niels Henrik Abel wurde am 5.8.1802 auf der Insel Finnøy (Norwegen) geboren und starb am 6.4.1829 in Froland (Norwegen). Abel arbeitete an elliptischen Funktionen und elliptischen Integralen und verallgemeinerte diese auf Riemannsche Flächen höheren Geschlechts. Es bewies, dass eine polynomiale Gleichung fünften Grades nicht explizit gelöst werden kann und er war neben Galois ein Mitbegründer der Gruppentheorie.

Beispiele (6.2.8)

a) $\sum\limits_{k=0}^{\infty} k!\, z^k$ konv. nur in $z = 0$, da $k!\,|z|^k \to \infty$ für $z \neq 0$.

b) $\sum\limits_{k=0}^{\infty} z^k$ hat den Konvergenzradius $r = 1$.

c) $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}$ hat den Konvergenzradius $r = \infty$.

d) Durch Differentiation folgt aus der geometrischen Reihe:

$$\frac{1}{(1-z)^2} = \sum_{k=1}^{\infty} k z^{k-1} = 1 + 2z + 3z^2 + 4z^3 + \ldots, \ |z| < 1,$$

$$\frac{1}{(1-z)^3} = \frac{1}{2} \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) z^{k-2} = \frac{1}{2} (2 + 6z + 12z^2 + \ldots), \ |z| < 1 .$$

e) Umgekehrt lassen sich Potenzreihen auch integrieren:

Aus $\dfrac{1}{1+z} = \sum\limits_{k=0}^{\infty} (-1)^k z^k$ folgt

$$\ln(1+x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k+1} x^{k+1}, \qquad -1 < x < 1 .$$

f) Aus $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \arctan x = \dfrac{1}{1+x^2} = \sum\limits_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^{2k}$ folgt

$$\arctan x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} x^{2k+1}, \qquad -1 < x < 1 .$$

g) Der Abelsche Grenzwertsatz ergibt für Beispiel e):

$$\ln 2 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k+1} .$$

Satz (6.2.9) (Rechenregeln für Potenzreihen)

Seien $f(z) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k z^k, \;\; g(z) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} b_k z^k$ mit $r_1, \; r_2 > 0$.

- $f(z) + g(z) \;=\; \sum\limits_{k=0}^{\infty} (a_k + b_k)\, z^k, \;\; |z| < \min(r_1, r_2)$.
- $\alpha\, f(z) \;=\; \sum\limits_{k=0}^{\infty} (\alpha\, a_k)\, z^k, \;\; |z| < r_1$.
- **Cauchy-Produkt:**

$$f(z) \cdot g(z) \;=\; \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{\ell=0}^{k} a_\ell\, b_{k-\ell} \right) z^k, \;\; |z| < \min(r_1, r_2).$$

- $f(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad g(f(z)) \;=\; \sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k\, z^k, \quad |z| < r_3\,.$
- $f(0) \neq 0 \quad \Rightarrow \quad 1/f(z) \;=\; \sum\limits_{k=0}^{\infty} d_k\, z^k, \quad |z| < r_4\,.$

$$1 \;=\; \Big(\sum_{k=0}^{\infty} a_k\, z^k \Big) \cdot \Big(\sum_{k=0}^{\infty} d_k\, z^k \Big) \;=\; \sum_{k=0}^{\infty} \Big(\sum_{\ell=0}^{k} d_\ell\, a_{k-\ell} \Big) z^k$$

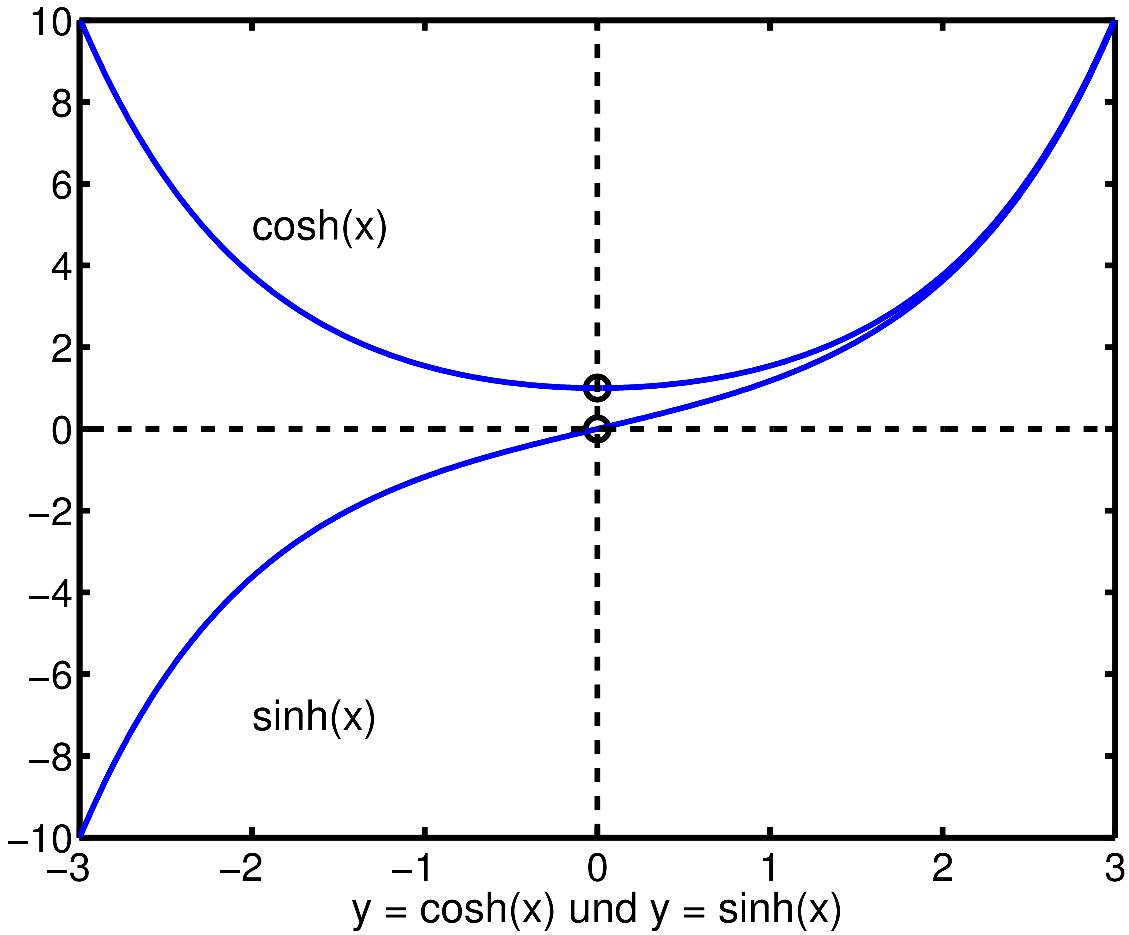
Beispiel (6.1.10)

Aus $\mathrm{e}^x = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}\, x^k$ erhält man Potenzreihenentwicklungen für die hyperbolischen Funktionen:

$$\begin{aligned}\cosh x \; &:= \; \frac{1}{2}(\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}) \; = \; \frac{1}{2}\Big(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} x^k + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}\,(-1)^k\, x^k \Big) \\ &= \; \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k)!}\, x^{2k}\,, \quad \forall x \in \mathbb{R}\,.\end{aligned}$$

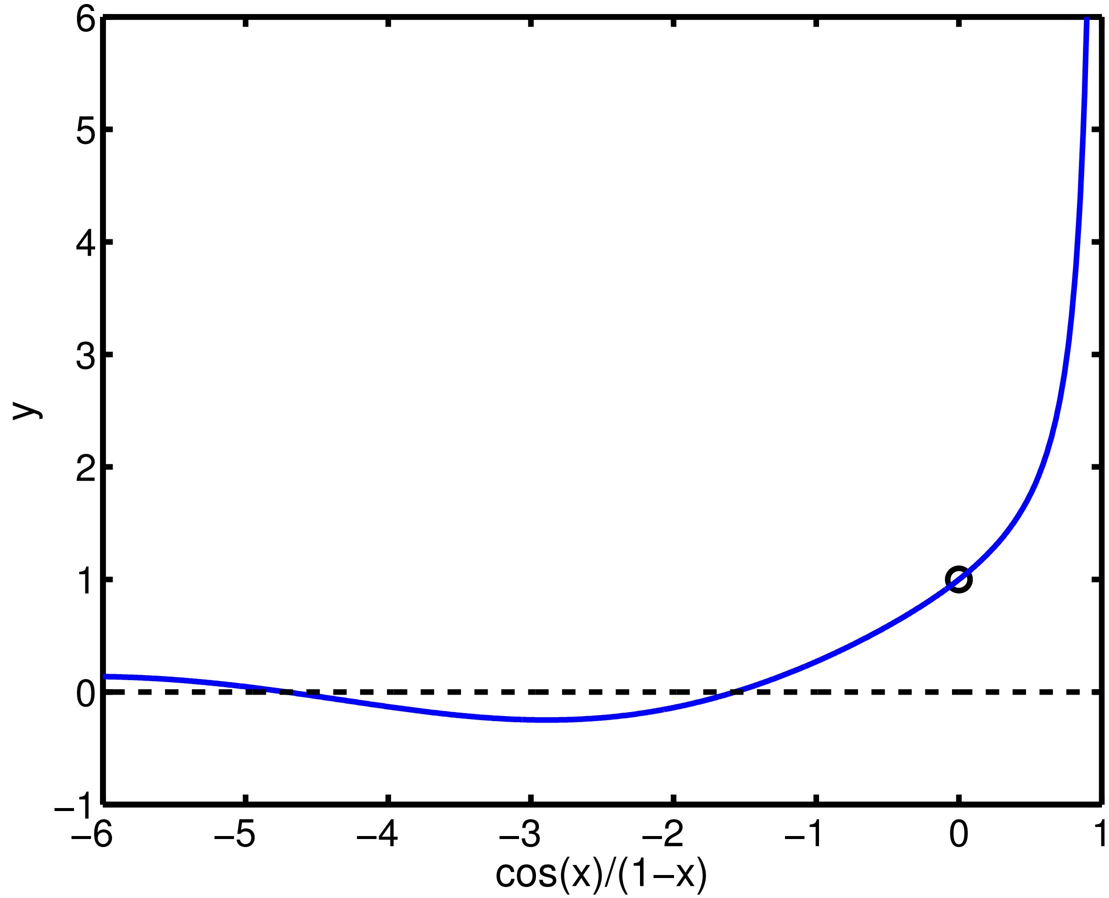
Analog:

$$\begin{aligned}\sinh x \; &:= \; \frac{1}{2}(\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}) \; = \; \frac{1}{2}\Big(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} x^k - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}\,(-1)^k\, x^k \Big) \\ &= \; \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)!}\, x^{2k+1}\,, \quad \forall\, x \in \mathbb{R}\,.\end{aligned}$$


10
8
6
4
2
0
−2
−4
−6
−8
−10
−3
−2
−1
0
1
2
3
cosh(x)
sinh(x)
y = cosh(x) und y = sinh(x)

Beispiel (6.2.11)

$$\begin{aligned}
\frac{\cos x}{1-x} &= \Big(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!}\, x^{2k}\Big)\Big(\sum_{\ell=0}^{\infty} x^{\ell}\Big) \\
&= \Big(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - + \cdots\Big)\Big(1 + x + x^2 + \cdots\Big) \\
&= 1 + x + (1 - \frac{1}{2!})\, x^2 + (1 - \frac{1}{2!})\, x^3 \\
&\quad + (1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{4!})\, x^4 + \ldots \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \Big(\sum_{\ell=0}^{k} \frac{(-1)^{\ell}}{(2\,\ell)!}\Big)(x^{2\,k} + x^{2\,k+1}), \qquad -1 < x < 1\,.
\end{aligned}$$


y
6
5
4
3
2
1
0
−1
−6
−5
−4
−3
−2
−1
0
1
cos(x)/(1−x)

Beispiel (6.2.12)

$f(x) := (\mathrm{e}^x - 1)/x$ besitzt eine Potenzreihenentwicklung zum Entwicklungspunkt $x_0 = 0$:

$$\mathrm{e}^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} x^k \Rightarrow \mathrm{e}^x - 1 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k+1)!} x^{k+1}$$

$$\Rightarrow \frac{\mathrm{e}^x - 1}{x} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k+1)!} x^k, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Die obige Funktion $f(x)$ lässt sich also zu einer *analytischen* Funktion auf $\mathbb{R}$ erweitern. Dabei ist $f(0) = 1$.

Sei nun $\quad g(x) := \dfrac{1}{f(x)} = \dfrac{x}{\mathrm{e}^x - 1} = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{B_k}{k!} x^k \qquad \Rightarrow$

$$1 = \Big(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{(k+1)!} \Big) \Big(\sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{B_\ell}{\ell!} x^\ell \Big) = \sum_{k=0}^{\infty} \Big(\sum_{\ell=0}^{k} \frac{B_\ell}{\ell!\,(k-\ell+1)!} \Big) x^k$$

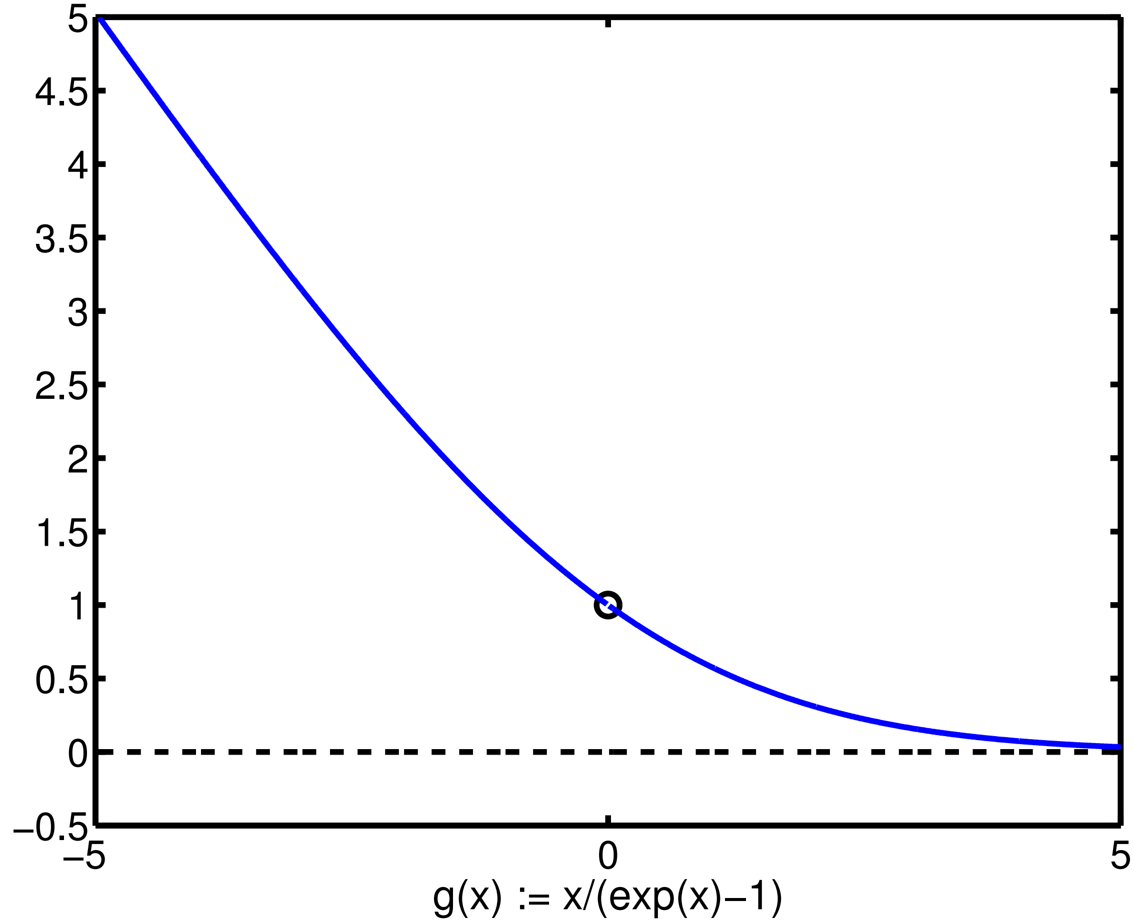
Hierauf wird nun **Koeffizientenvergleich** angewendet:

$$B_0 = 1, \quad B_k = -\sum_{\ell=0}^{k-1} \frac{k!}{\ell!(k-\ell+1)!} B_\ell\,, \quad k = 1, 2, \ldots$$

Die Zahlen B_k heißen **Bernoullische Zahlen**. Man findet:

$$B_0 = 1, \quad B_1 = -\frac{1}{2}, \quad B_2 = \frac{1}{6}, \quad B_3 = 0,$$
$$B_4 = -\frac{1}{30}, \quad B_5 = 0, \quad B_6 = \frac{1}{42}, \quad \ldots$$

Bemerkung: Es gilt: $B_{2k+1} = 0,\ k > 0$.


5
4.5
4
3.5
3
2.5
2
1.5
1
0.5
0
−0.5
−5
0
5
g(x) := x/(exp(x)−1)

6.3 Elementare Funktionen

Die Exponentialfunktion

$$\exp(z) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} z^k$$

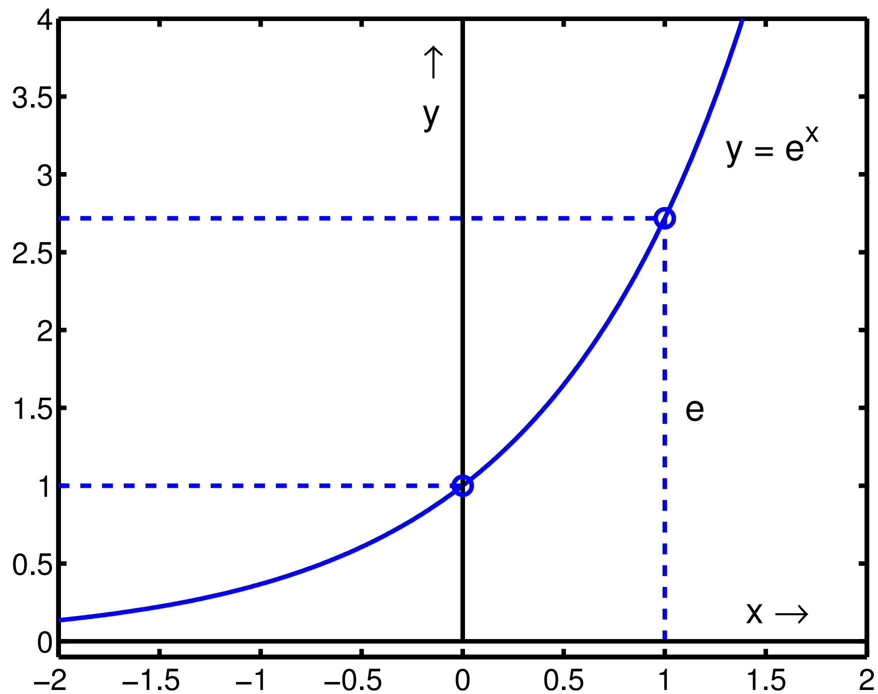
- Konvergenzradius: $r = \infty$; also $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$.
- Für reelle Argumente liefert die Differentiation der Reihe:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \exp(x) = \exp(x), \qquad \exp(0) = 1.$$

- **Funktionalgleichung:** (Beweis mittels Cauchy-Produkt)

$$\exp(z + w) = \exp(z) \cdot \exp(w), \qquad \forall\, z,\, w \in \mathbb{C}.$$

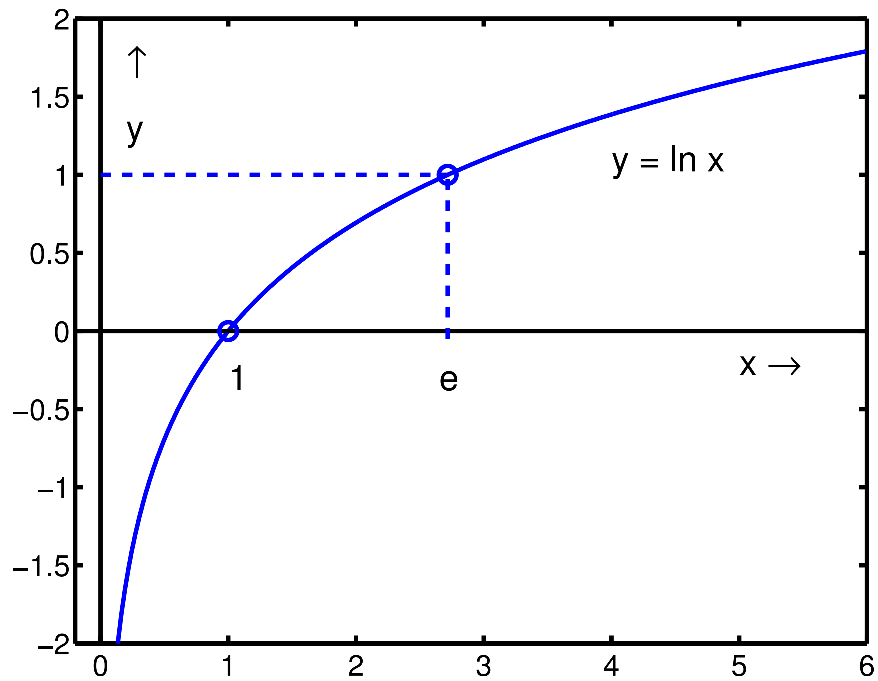
- $\forall\, z : \exp(z) \neq 0\,, \quad \forall\, z : \exp(-z) = 1/\exp(z)\,.$
- $\forall\, x \in \mathbb{R} : \exp(x) > 0, \quad \lim\limits_{x \to +\infty} \exp(x) = \infty, \quad \lim\limits_{x \to -\infty} \exp(x) = 0\,.$



- Auf $\mathbb{R}$ ist $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ streng monoton wachsend.
- $e := \exp(1) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} = \lim_{n\to\infty} (1 + \frac{1}{n})^n$
- $e = 2.7182\,81828\,45904\,52353\,60287\ldots$ ist irrational!

Der natürliche Logarithmus $\ln :]\,0, \infty\,[\to \mathbb{R}$

ist die Umkehrfunktion der reellen Exponentialfunktion.



- $\ln$ ist streng monoton wachsend und eine C^∞-Funktion.

- **Funktionalgleichung:**

  $$\ln(x\,y) \;=\; \ln(x) + \ln(y), \qquad \ln(x^q) \;=\; q \cdot \ln(x) \qquad (q \in \mathbb{Q})$$

- $\lim\limits_{x \to 0+} \ln x \;=\; -\infty, \qquad \lim\limits_{x \to \infty} \ln x \;=\; \infty\,.$

- $\ln(1) \;=\; 0, \qquad \ln(\mathrm{e}) \;=\; 1$

- $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x}(\ln x) \;=\; \dfrac{1}{x}$

- $\ln(1+x) \;=\; \sum\limits_{k=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^k}{k+1}\, x^{k+1}, \qquad -1 < x \leq 1$

Allgemeine Potenzen

$$a^z := \exp(z \cdot \ln a), \quad a > 0, \quad z \in \mathbb{C}$$

- $f(x) = a^x$ ist streng monoton wachsend (für $a > 1$)
- $a^0 = 1, \quad a^1 = a, \quad a^{-x} = \dfrac{1}{a^x}$
- $a^x \cdot a^y = a^{x+y}, \quad (a^x)^y = a^{x \cdot y}.$
- Umkehrfunktion ist der **Logarithmus** zur Basis a:

  $$\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}, \; a \neq 1, \; a, \; x > 0$$
- $\dfrac{d}{dx}(a^x) = \ln a \cdot a^x, \quad x \in \mathbb{R}, \quad a > 0$
- $\dfrac{d}{dx}(x^a) = a\, x^{a-1}, \quad a \in \mathbb{R}, \quad x > 0,$
- $\dfrac{d}{dx}(\log_a x) = \dfrac{1}{x \ln a}, \quad x, a > 0.$

Binomialreihe

$$(1 + x)^a = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{a}{k} x^k, \quad a \in \mathbb{R}, \quad -1 < x < 1$$

- $\displaystyle \binom{a}{k} := \frac{1}{k!} \prod_{j=0}^{k-1} (a - j), \qquad k \geq 0$
- $\displaystyle \sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 - \frac{5}{128}x^4 + - \cdots$
- $\displaystyle \frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 - \frac{5}{16}x^3 + \frac{35}{128}x^4 - + \cdots$

Hyperbolische Funktionen

- $\displaystyle \cosh z := \frac{1}{2}(\mathrm{e}^z + \mathrm{e}^{-z}) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k)!} z^{2k}$

  $\displaystyle \sinh z := \frac{1}{2}(\mathrm{e}^z - \mathrm{e}^{-z}) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)!} z^{2k+1}$

- $\cosh(-z) = \cosh(z), \qquad \sinh(-z) = -\sinh(z)$
- $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x}\cosh(x) = \sinh(x), \qquad \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x}\sinh(x) = \cosh(x)$
- $\sinh(x+y) = \sinh x\,\cosh y + \cosh x\,\sinh y,$

  $\cosh(x+y) = \cosh x\,\cosh y + \sinh x\,\sinh y.$

  $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$

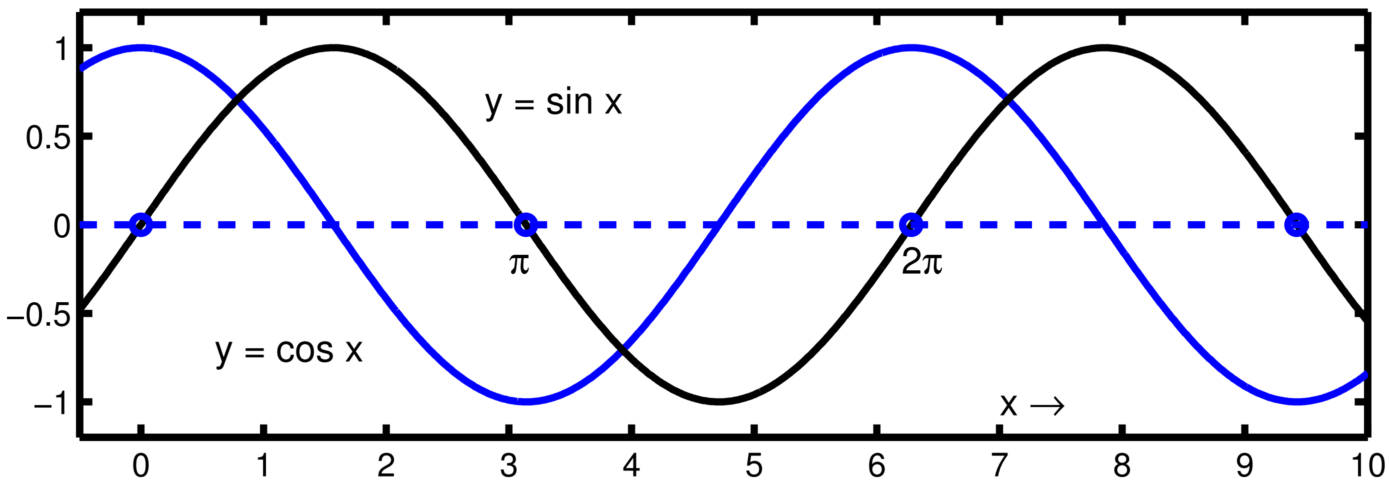
- **Umkehrfunktionen**

  $\operatorname{arsinh} x = \ln(x + \sqrt{x^2+1}), \quad x \in \mathbb{R},$

  $\operatorname{arcosh} x = \ln(x + \sqrt{x^2-1}), \quad 1 \le x < \infty$

  $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x}\operatorname{arsinh} x = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}, \qquad \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x}\operatorname{arcosh} x = \dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$

Trigonometrische Funktionen



- $$\cos z \ := \ \frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{iz} + \mathrm{e}^{-iz}\right) \ = \ \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!}\, z^{2k}$$

  $$\sin z \ := \ \frac{1}{2i}\left(\mathrm{e}^{iz} - \mathrm{e}^{-iz}\right) \ = \ \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}\, z^{2k+1}$$

- $\sin(0) = 0 \quad \cos(0) = 1$
- $\sin(-z) = -\sin z \quad \cos(-z) = \cos z$
- $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x}\cos x = -\sin x, \quad \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x}\sin x = \cos x$
- $\sin(u+v) = \sin u \cos v + \cos u \sin v$

  $\cos(u+v) = \cos u \cos v - \sin u \sin v$
- $\sin^2 z + \cos^2 z = 1$

Die Kreiszahl π (Periphereia)

$$\pi \;=\; 3.1415\,92653\,58979\,32384\,62643\,38327\,950288\ldots$$

$\cos 0 = 1 > 0$, $\;\Rightarrow\;$ $\sin x$ streng monoton wachsend in $[-\varepsilon, \varepsilon]$.
$\Rightarrow\;$ $\sin x > 0$ für $x \in \,]0, \varepsilon]$
$\Rightarrow\;$ $\cos x$ fällt somit streng monoton in $]0, \varepsilon]$.

Für $x = \sqrt{6} \approx 2.45$ erfüllt $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k}$ das Leibniz–Kriterium.
Damit lässt sich abschätzen:

$$\left| \cos\sqrt{6} \;-\; \left(1 - \frac{6}{2!}\right) \right| \;\leq\; \frac{(\sqrt{6})^4}{4!} \qquad \Rightarrow \qquad \cos\sqrt{6} \;\leq\; -\frac{1}{2} \;<\; 0\,.$$

Nach dem Zwischenwertsatz hat $\cos x$ wenigstens eine Nullstelle im Intervall $]\,0, \sqrt{6}\,[$. **Die Kreiszahl π wird definiert als das Doppelte der kleinsten positiven Nullstelle von $\cos x$.**

Folgerung

$$\begin{aligned}
\sin(\pi/2) &= +\sqrt{1-\cos^2(\pi/2)} = 1\\
\sin\pi &= 2\sin(\pi/2)\cos(\pi/2) = 0\\
\cos\pi &= \cos^2(\pi/2) - \sin^2(\pi/2) = -1
\end{aligned}$$

und mit dem Additionstheoremen:

$$\begin{aligned}
\sin(z+\frac{\pi}{2}) &= \cos z, & \cos(z+\frac{\pi}{2}) &= -\sin z\\
\sin(z+\pi) &= -\sin z, & \cos(z+\pi) &= -\cos z\\
\sin(z+2\pi) &= \sin z, & \cos(z+2\pi) &= \cos z
\end{aligned}$$

$\Rightarrow$ sin und cos sind 2π–periodische Funktionen.

F. von Lindemann (1882): π ist transzendent.

$\Rightarrow$ Die Quadratur des Kreises ist unmöglich!!

Ferdinand von Lindemann:

Ferdinand von Lindemann wurde am 12.4.1852 in Hannover geboren und starb am 6.3.1939 in München. Lindemann studierte ab 1870 in Göttingen und Erlangen. 1877 wurde er Professor in Freiburg. 1883 wechselte er nach Königsberg und 1893 an die Ludwig-Maximilians-Universität München. Aus seiner Freiburger Zeit stammt sein Beweis, dass π eine transzendente Zahl ist, womit erstmals auch die Unmöglichkeit der Quadratur des Kreises bewiesen wurde.

Archimedes ($\approx$ 250 v. Chr.):

$$3+\frac{10}{71} = 3.1409 < \pi < 3+\frac{10}{70} = 3.1428$$

Ludolph van Ceulen ($\approx$ 1610):

π mittels eines im Kreis einbeschriebenen regelmäßigen 2^{62}-Ecks auf 35 Dezimalstellen berechnet

John Wallis ($\approx$ 1655):

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdot\frac{8}{7}\cdot\frac{8}{9}\cdots$$

Gottfried Wilhelm Leibniz ($\approx$ 1682):

$$\frac{\pi}{4} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}$$

Fabrice Bellard (2010):

π auf $\approx 2.7\times 10^{12}$ Dezimalstellen berechnet