10. Periodische Funktionen, Fourier–Reihen

Jean Baptiste Joseph Fourier:

Joseph Fourier wurde am 21.3.1768 bei Auxerre (Burgund) geboren und starb am 16.5.1830 in Paris. 1795 wurde Fourier Professor an der École normale und 1797 Nachfolger von Lagrange an der École polytechnique in Paris. Fourier beschäftigte sich mit der Wärmeausbreitung in Festkörpern uns stieß dabei auf einen Lösungsansatz mit trigonometrischen Reihen (Fourier-Reihen).

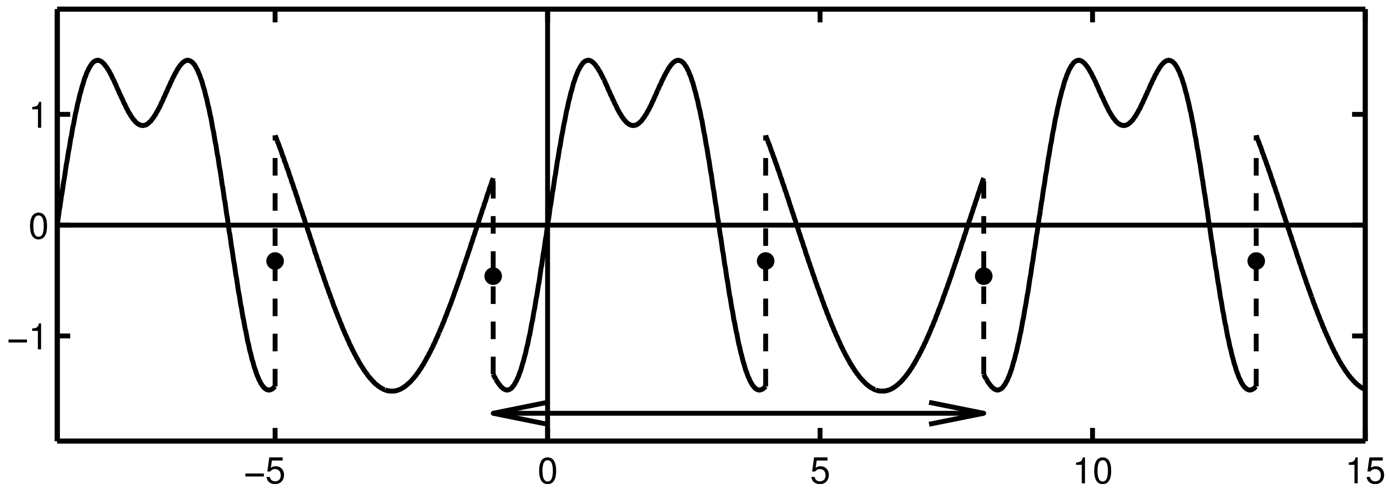
10.1 Grundlegende Begriffe

Joseph Fourier: „Jede“ periodische Funktion lässt sich durch eine „Überlagerung“ von **Grundschwingungen** $\cos(\omega t)$, $\sin(\omega t)$ und zugehörigen **Oberschwingungen** $\cos(k\,\omega\,t)$, $\sin(k\,\omega\,t)$, $k = 2, 3, \ldots$ darstellen (**Fourier–Reihe)**:

$$f(t) \;=\; \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left[a_k \cos(k\,\omega\,t) + b_k \sin(k\,\omega\,t) \right], \qquad \omega = \frac{2\pi}{T}$$

Definition (10.1.1)

Eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (oder $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$) heißt **periodisch** mit der Periode T, falls für alle $t \in \mathbb{R}$: $f(t+T) = f(t)$.



Eine periodische Funktion, Periode T

Beispiele (10.1.2)

a) $\sin t$, $\cos t$, e^{it}, $a_k \cos(kt) + b_k \sin(kt)$ sind sämtlich 2π–periodische Funktionen.

b) $U(t) = U_0 \cos(\omega t)$ hat die Periode $T = 2\pi/\omega$ und die **Frequenz** (= Anzahl der Schwingungen pro Sekunde) $\nu = \omega/(2\pi)$.

Bemerkungen (10.1.3)

a) Ist T eine Periode von f, so ist auch $k\,T$, $k \in \mathbb{Z}$, eine Periode. Sind T_1 und T_2 Perioden von f, so ist auch $k_1\,T_1 + k_2\,T_2 (k_1, k_2 \in \mathbb{Z})$ eine Periode von f.

b) Existiert eine kleinste positive Periode $T > 0$, so ist die Menge der Perioden gegeben durch $k\,T$, $k \in \mathbb{Z}$. Jede nichtkonstante, stetige und periodische Funktion (mit Periode $\neq 0$) besitzt eine kleinste positive Periode.

c) Sind f und g T–periodisch, so ist auch $\alpha\,f + \beta\,g$ eine T–periodische Funktion.

d) Jede T–periodische Funktion f, lässt sich durch die Substitution $\tau := (2\,\pi/T)\,t = \omega\,t$ in eine 2π–periodische Funktion

$$\tilde{f}(\tau) \;:=\; f(\tau/\omega), \quad \tau \in \mathbb{R}\,,$$

transformieren.

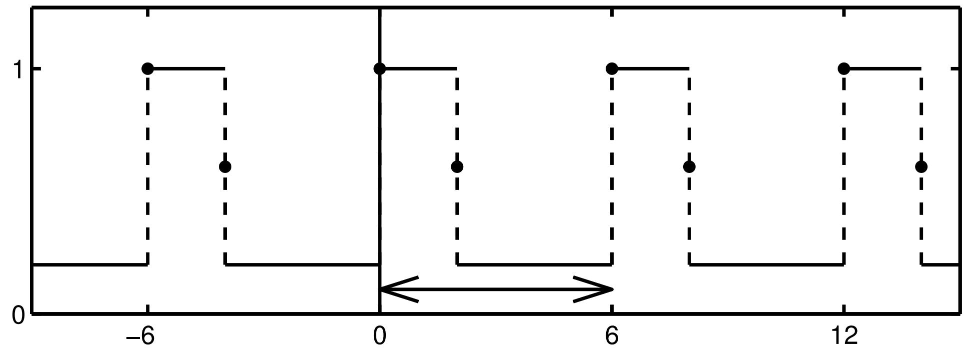
e) Ist f $T-$periodisch und lokal integrierbar, so gilt für beliebige $a \in \mathbb{R}$:

$$\int_0^T f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^{a+T} f(t)\,\mathrm{d}t\,.$$

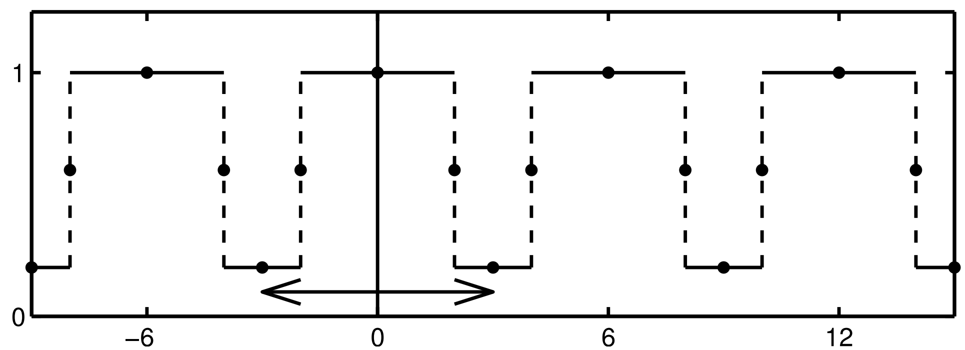
Definition (10.1.4) (Periodische Fortsetzung)

Jede Funktion $g(t)$, $t \in [0,T]$ bzw. $t \in [0,T/2]$, lässt sich zu einer $T-$periodischen Funktion auf $\mathbb{R}$ fortsetzen.

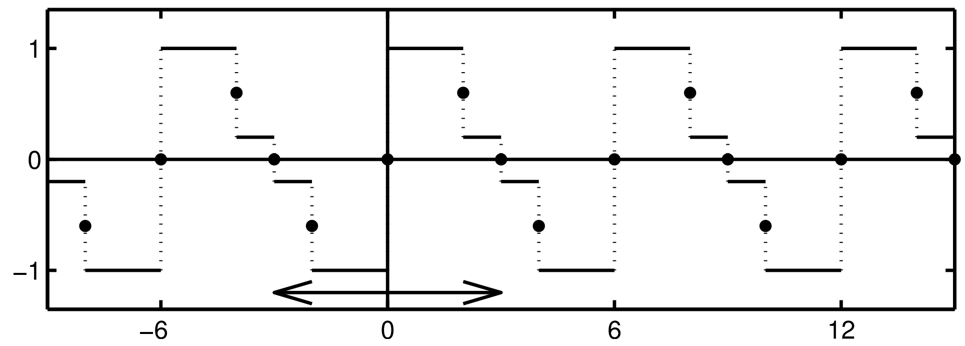
a) Direkte Fortsetzung: Ist g auf $[0,T]$ vorgegeben, so setzt man $f(t) := g(t-kT)$, $kT \le t < (k+1)\,T$.



b) Gerade Fortsetzung: Ist g auf $[0, T/2]$ vorgegeben, so spiegele man g an der y–Achse, $g(t) := g(-t)$, $-T/2 \leq t < 0$, und setze g dann wie in a) zu einer T–periodischen Funktion f fort.



c) Ungerade Fortsetzung: Ist g auf $[0, T/2]$ vorgegeben, so spiegele man g am Ursprung, $g(t) := -g(-t)$, $-T/2 < t < 0$, ergänze $g(-T/2) := g(0) := 0$ und setze g dann wie in a) zu einer T–periodischen Funktion f fort.



Definition (10.1.5) Eine Reihe der Form

$$f(t) \;=\; \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left[\, a_k \cos\,(k\,\omega\,t) + b_k \sin\,(k\,\omega\,t) \,\right]$$

mit $a_k, b_k \in \mathbb{R}/\mathbb{C}$ heißt **Fourier–Reihe**, oder **trigonometrische Reihe** ; dabei sei die **Kreisfrequenz** $\omega \;=\; 2\pi/T \;>\; 0$.

Die zugehörigen Partialsummen

$$f_n(t) \;=\; \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} \left[\, a_k \cos\,(k\,\omega\,t) + b_k \sin\,(k\,\omega\,t) \,\right]$$

heißen **trigonometrische Polynome**.

Komplexe Schreibweise (10.1.6)

Durch Umformung erhält man für die Partialsummen:

$$\begin{aligned} f_n(t) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} \left[a_k \cos(k\,\omega\,t) + b_k \sin(k\,\omega\,t) \right] \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} \left[\frac{a_k}{2} \left(\mathrm{e}^{ik\omega t} + \mathrm{e}^{-ik\omega t}\right) + \frac{b_k}{2i} \left(\mathrm{e}^{ik\omega t} - \mathrm{e}^{-ik\omega t}\right) \right] \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} \left[\frac{a_k - ib_k}{2}\, \mathrm{e}^{ik\omega t} + \frac{a_k + ib_k}{2}\, \mathrm{e}^{-ik\omega t} \right] \\ &= \sum_{k=-n}^{n} \gamma_k\, \mathrm{e}^{i\,k\,\omega\,t}, \end{aligned}$$

und analog

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left[a_k \cos(k\,\omega\,t) + b_k \sin(k\,\omega\,t) \right] \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \gamma_k\, \mathrm{e}^{i\,k\,\omega\,t} := \lim_{n\to\infty} \sum_{k=-n}^{n} \gamma_k\, \mathrm{e}^{i\,k\,\omega\,t}. \end{aligned}$$

Umrechnung der Koeffizienten: $\quad (k = 1, 2, \ldots, n)$

$$\begin{array}{lll} \gamma_0 = \frac{1}{2}\,a_0, & \gamma_k = \frac{1}{2}\,(a_k - ib_k), & \gamma_{-k} = \frac{1}{2}\,(a_k + ib_k) \\ a_0 = 2\,\gamma_0, & a_k = \gamma_k + \gamma_{-k}, & b_k = i\,(\gamma_k - \gamma_{-k}) \end{array}$$

Beispiel (10.1.7) Für $a_k = 2$, $b_k = 0$ und $\omega = 1$:

$$\begin{aligned} f_n(t) &= 1 + 2\cos t + 2\cos(2\,t) + \ldots + 2\cos(nt) \\ &= \sum_{k=-n}^{n} \mathrm{e}^{i\,k\,t} \\ &= \begin{cases} 2\,n + 1, & \text{für} \quad t = 2\,k\,\pi, \quad k \in \mathbb{Z}\,, \\ \dfrac{\sin\left[(n + 1/2)\,t\right]}{\sin\,(t/2)}\,, & \text{sonst}\,. \end{cases} \end{aligned}$$

Die erste Gleichung folgt dabei aus der komplexen Darstellung $\cos(k\,t) = (\mathrm{e}^{ikt} + \mathrm{e}^{-ikt})/2$. Die zweite Gleichung ergibt sich aus der geometrischen Summenformel (3.4.5).

Die Umformung zeigt, dass die Partialsummenfolge $f_n(t)$ für kein $t \in \mathbb{R}$ konvergiert. Die obige Funktion f_n heißt auch **Dirichlet-Kern**. Sie tritt bei der Integraldarstellung von Fourier-Reihen auf.

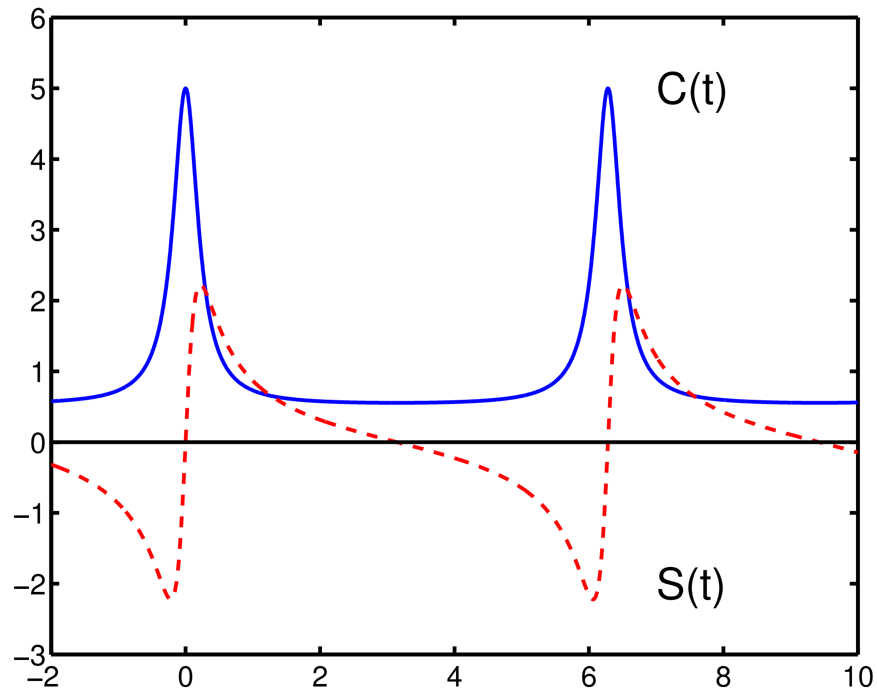
Beispiel (10.1.8) Für $z = r\,\mathrm{e}^{i\,t}$, $-1 < r < 1$:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{1 - r\,\mathrm{e}^{i\,t}} &= \frac{(1 - r\cos t) + i\,(r\sin t)}{(1 - r\cos t)^2 + (r\sin t)^2} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \left(r\,\mathrm{e}^{i\,t}\right)^k \\
&= \left(\sum_{k=0}^{\infty} r^k \cos(k\,t)\right) + i\left(\sum_{k=0}^{\infty} r^k \sin(k\,t)\right).
\end{aligned}$$

Für $|r| < 1$ und $t \in \mathbb{R}$ konvergieren beide Reihen gleichmäßig, und man hat somit die folgende Fourier-Reihen Darstellung:

$$\sum_{k=0}^{\infty} r^k \cos(kt) = \frac{1 - r\cos t}{1 - 2r\cos t + r^2} =: C(t)$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} r^k \sin(kt) = \frac{r\sin t}{1 - 2r\cos t + r^2} =: S(t)\,.$$



Satz (10.1.9)

a) Die Funktionen $e^{i\,k\,\omega\,t}$, $k \in \mathbb{Z}$, $\omega = \dfrac{2\,\pi}{T} > 0$, bilden ein Orthonormalsystem bezüglich des Skalarprodukts:

$$\langle u, v\rangle \;:=\; \frac{1}{T}\int\limits_0^T \overline{u(t)}\, v(t)\;\mathrm{d}t\,.$$

b) Konvergiert die Fourier–Reihe $\sum_{k=-\infty}^{\infty} \gamma_k\, e^{i\,k\,\omega\,t}$ auf $[0,T]$ gleichmäßig gegen eine Funktion f, so ist diese stetig, und es gilt:

$$\gamma_k \;=\; \frac{1}{T}\int\limits_0^T f(t)\, e^{-i\,k\,\omega\,t}\,\mathrm{d}t, \qquad k \in \mathbb{Z}. \tag{10.1.10}$$

Reelle Orthogonalitätsrelationen (10.1.11):

$$\int_0^T \cos(k\,\omega\,t)\,\cos(\ell\,\omega\,t)\,\mathrm{d}t \;=\; \begin{cases} 0 & : \; k \neq \ell \\ T/2 & : \; k = \ell \neq 0 \\ T & : \; k = \ell = 0 \end{cases}$$

$$\int_0^T \sin(k\,\omega\,t)\,\sin(\ell\,\omega\,t)\,\mathrm{d}t \;=\; \begin{cases} 0 & : \; k \neq \ell \\ T/2 & : \; k = \ell \neq 0 \end{cases}$$

$$\int_0^T \sin(k\,\omega\,t)\,\cos(\ell\,\omega\,t)\,\mathrm{d}t \;=\; 0\,.$$

Reelle Fourier–Koeffizienten (10.1.12): $(k \geq 0)$

$$a_k \;=\; \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos(k\,\omega\,t)\,\mathrm{d}t, \qquad b_k \;=\; \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin(k\,\omega\,t)\,\mathrm{d}t$$

10.2 Fourier–Reihen

Definition (10.2.1)

a) Eine Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ heißt **stückweise stetig** bzw. **stückweise stetig differenzierbar**, falls f bis auf endlich viele Stellen $t_0 < t_1 < \ldots < t_m$ in $[a,b]$ stetig bzw. stetig differenzierbar ist und in den t_j die einseitigen Grenzwerte von f bzw. von f und f' existieren.

b) Für eine stückweise stetige Funktion $f : [0,T] \to \mathbb{C}$ werden die **Fourier–Koeffizienten** definiert durch:

$$\gamma_k := \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\,\mathrm{e}^{-i\,k\,\omega\,t}\,\mathrm{d}t, \qquad k \in \mathbb{Z},$$

$$a_k := \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\,\cos(k\,\omega\,t)\,\mathrm{d}t,\;\; b_k := \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\,\sin(k\,\omega\,t)\,\mathrm{d}t,\;\; k \geq 0.$$

Dabei ist $\omega = 2\pi/T$ die **Kreisfrequenz**.

c) $F_f(t) = \sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} \gamma_k \, \mathrm{e}^{i\,k\,\omega\,t} = \frac{a_0}{2} + \sum\limits_{k=1}^{\infty} [\,a_k \cos(k\,\omega\,t) + b_k \sin(k\,\omega\,t)\,]$

heißt die **Fourier–Reihe** von f.

In obiger Definition wird f identifiziert mit der T–periodischen Fortsetzung von f (direkte Fortsetzung).

Schreibweise: $f(t) \sim \sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} \gamma_k \, \mathrm{e}^{i\,k\,\omega\,t}$.

Satz (10.2.2)

$$f \quad \text{gerade} \quad \Rightarrow \quad a_k = \frac{4}{T} \int\limits_0^{T/2} f(t) \cos(k\,\omega\,t)\,\mathrm{d}t\,, \qquad b_k = 0\,.$$

$$f \quad \text{ungerade} \quad \Rightarrow \quad a_k = 0\,, \qquad b_k = \frac{4}{T} \int\limits_0^{T/2} f(t) \sin(k\,\omega\,t)\,\mathrm{d}t\,.$$

Beispiele (10.2.3)

a) Sägezahnfunktion:

$$S(t) \;:=\; \begin{cases} 0, & t = 0,\; t = 2\pi\,, \\ \dfrac{1}{2}\,(\pi - t), & 0 < t < 2\pi\,. \end{cases}$$

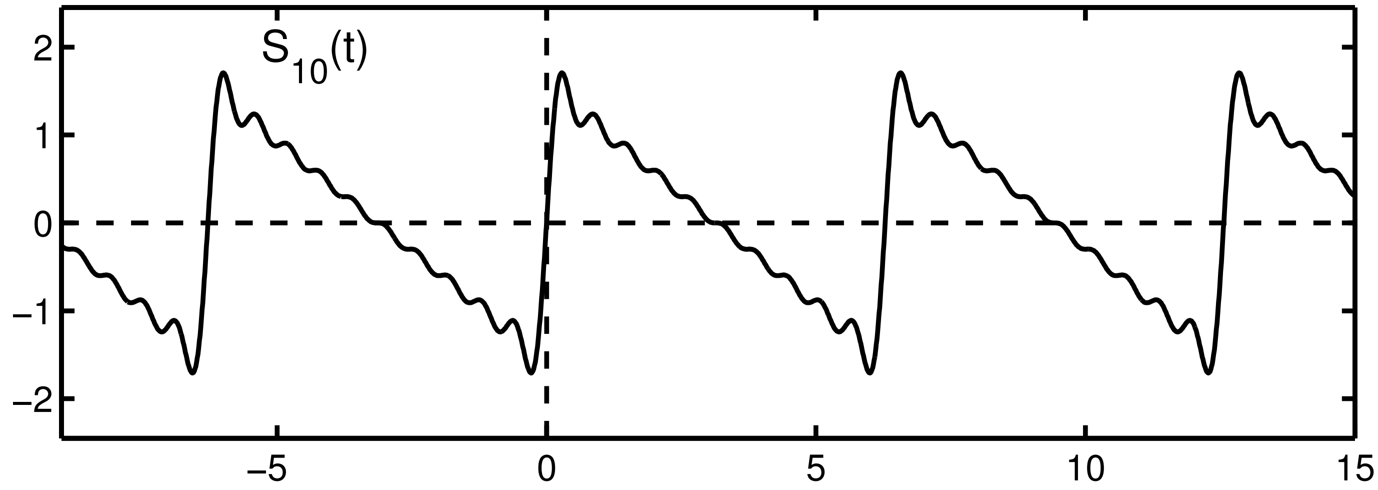
Da S ungerade ist, folgt:

$$a_k \;=\; 0 \;\; (\forall\, k), \qquad b_k \;=\; \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\pi - t}{2} \,\sin\,(k\,t)\,\mathrm{d}t \;=\; \frac{1}{k}\,.$$

Damit folgt:

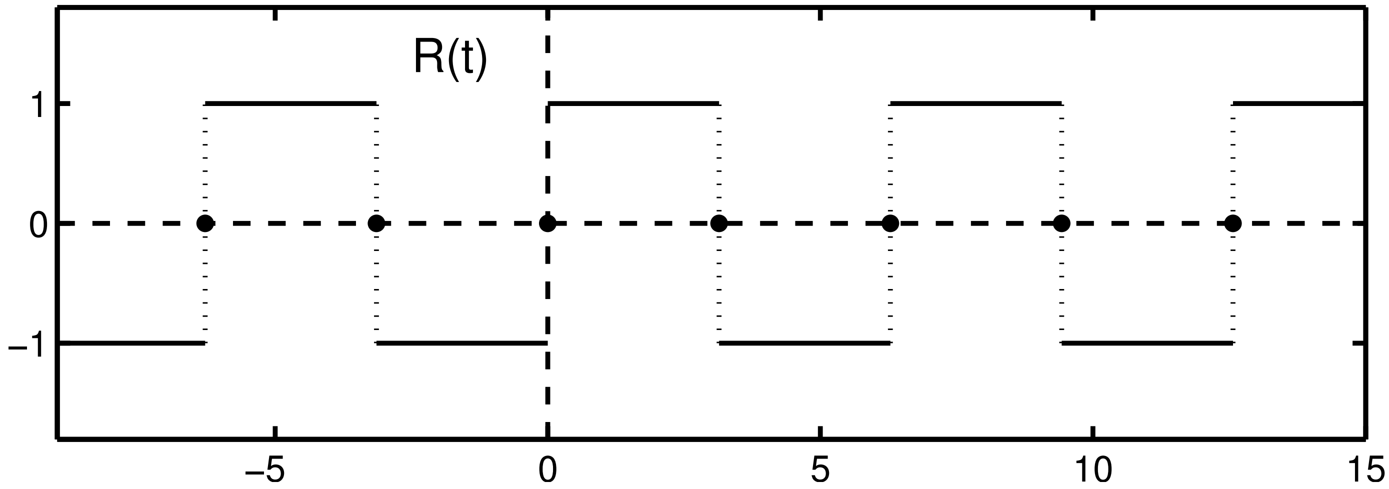
$$S(t) \;\sim\; \sin t + \frac{\sin(2\,t)}{2} + \frac{\sin(3\,t)}{3} + \ldots$$

Für die 10. Partialsumme $S_{10}(t) = \sum\limits_{k=1}^{10} \dfrac{\sin\,(k\,t)}{k}$ erhält man die folgende Approximation:



b) Rechteckschwingung:

$$R(t) = \begin{cases} 0, & t = 0,\ t = \pi,\ t = 2\pi \\ 1, & 0 < t < \pi \\ -1, & \pi < t < 2\pi\,. \end{cases}$$

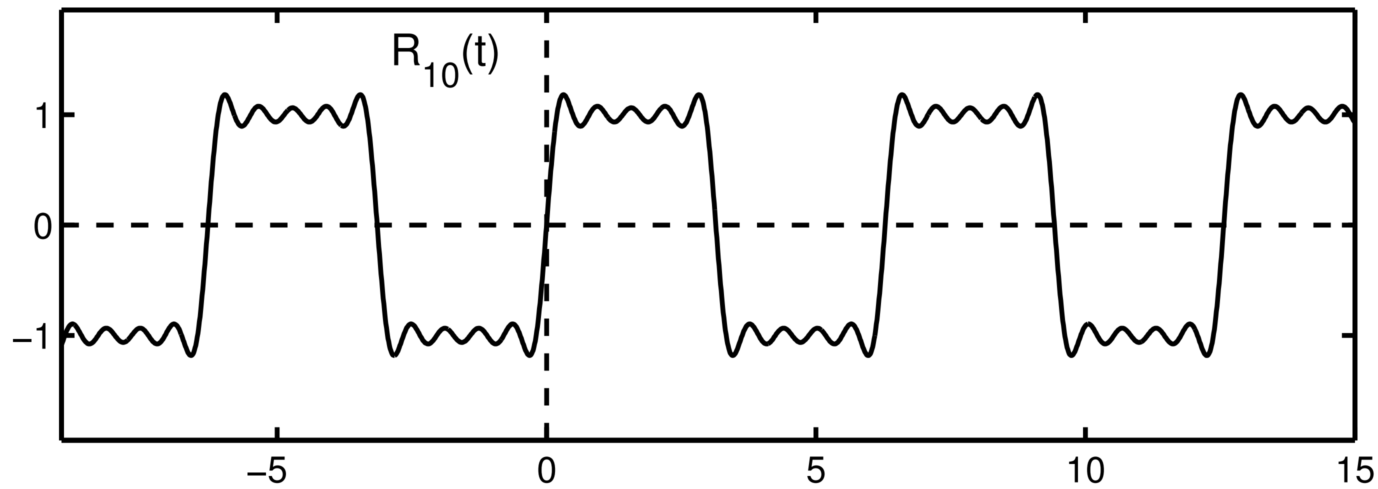


Wiederum ist R eine ungerade Funktion und somit:

$$a_k = 0, \quad k = 0, 1, \ldots, \quad \text{und}$$

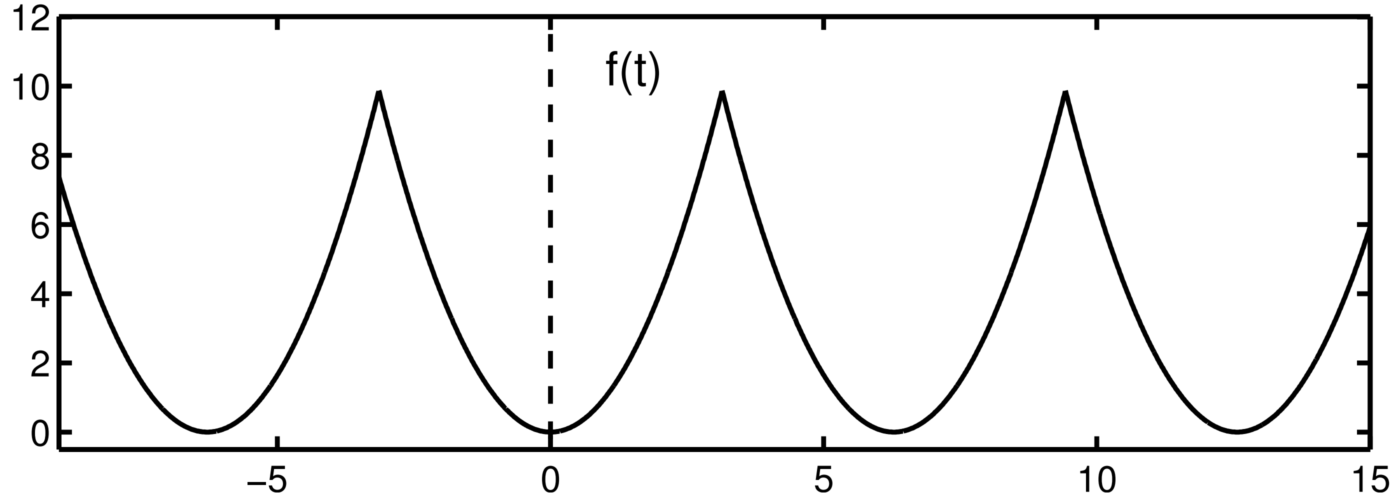
$$b_k = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \sin(kt)\mathrm{d}t = \begin{cases} 0, & k \quad \text{gerade} \\ \dfrac{4}{k\,\pi}, & k \quad \text{ungerade} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad R(t) \sim \frac{4}{\pi}\left(\frac{\sin t}{1} + \frac{\sin(3\,t)}{3} + \frac{\sin(5\,t)}{5} + \ldots\right).$$



c) Periodisch fortgesetzte Parabel:

Sei $f(t) := t^2, \; -\pi < t < \pi$ mit (2π)–periodischer Fortsetzung:

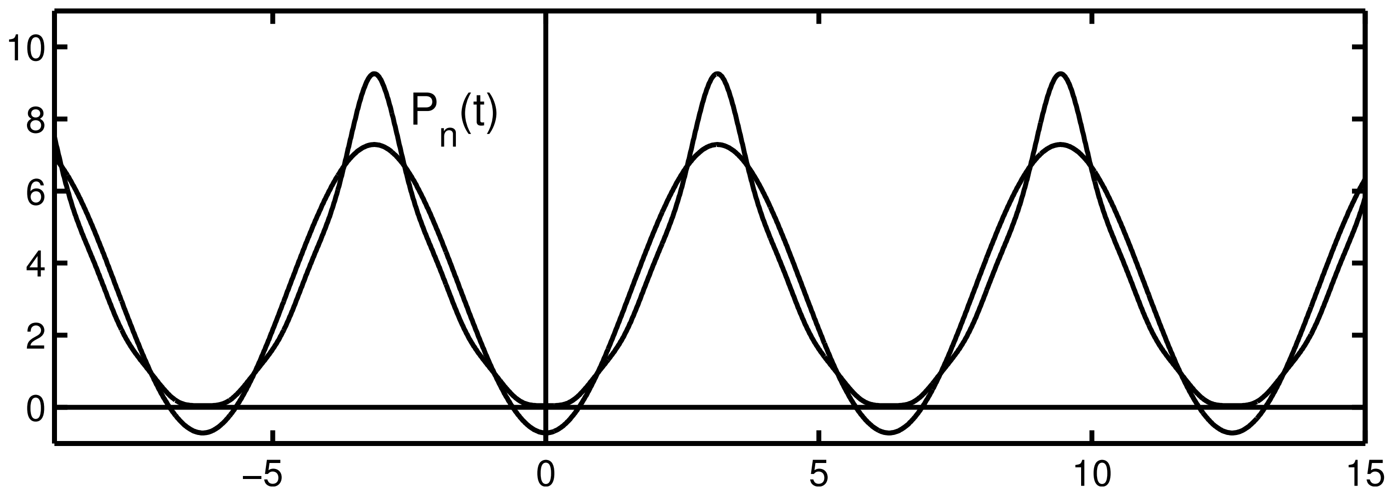


Die Funktion f ist gerade; damit folgt: $b_k = 0\,,\ \forall\, k\,,$ und

$$a_k \;=\; \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi} t^2\,\cos\,(k\,t)\,dt \;=\; \begin{cases} \dfrac{2\,\pi^2}{3}, & \text{für} \quad k = 0 \\ (-1)^k\,\dfrac{4}{k^2}, & \text{für} \quad k = 1, 2, \ldots \end{cases}$$

Somit erhält man die folgende Fourier–Reihe :

$$f(t) \;\sim\; \frac{\pi^2}{3} - \frac{4\,\cos t}{1^2} + \frac{4\,\cos(2\,t)}{2^2} - \frac{4\,\cos(3\,t)}{2^3} + - \;\ldots$$



Rechenregeln für Fourier–Reihen (10.2.4)

Sind f, $g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ T–periodische, stkw. stetige Funktionen mit

$$f \;\sim\; \sum_{k=-\infty}^{\infty} \gamma_k \, \mathrm{e}^{i\,k\,\omega\,t}, \quad g \;\sim\; \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta_k \, \mathrm{e}^{i\,k\,\omega\,t}\,, \qquad \text{so gelten:}$$

a) Linearität:

$$\alpha\, f(t) \,+\, \beta\, g(t) \;\sim\; \sum_{k=-\infty}^{\infty} (\alpha\,\gamma_k + \beta\,\delta_k)\, \mathrm{e}^{i\,k\,\omega\,t}$$

b) Konjugation:

$$\overline{f(t)} \;\sim\; \sum_{k=-\infty}^{\infty} \overline{\gamma}_{-k}\, \mathrm{e}^{i\,k\,\omega\,t}$$

c) Zeitumkehr:

$$f(-t) \;\sim\; \sum_{k=-\infty}^{\infty} \gamma_{-k}\, \mathrm{e}^{i\,k\,\omega\,t}$$

d) Streckung:

$$f(c\,t) \;\sim\; \sum_{k=-\infty}^{\infty} \gamma_k\, \mathrm{e}^{i\,k\,(c\omega)\,t}, \qquad c > 0$$

e) Verschiebung:

$$f(t + a) \quad\sim\quad \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(\gamma_k\, \mathrm{e}^{i\,k\,\omega\,a}\right) \mathrm{e}^{i\,k\,\omega\,t}, \qquad a \in \mathbb{R}$$

$$\mathrm{e}^{i\,n\,\omega\,t}\, f(t) \;\sim\; \sum_{k=-\infty}^{\infty} \gamma_{k-n}\, \mathrm{e}^{i\,k\,\omega\,t}, \qquad n \in \mathbb{Z}$$

f) Ableitung:

Ist f stetig und stkw. stetig diffb., so gilt :

$$f'(t) \;\sim\; \sum_{k=-\infty}^{\infty} (\,i\,k\,\omega\,\gamma_k)\, \mathrm{e}^{i\,k\,\omega\,t}$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} (\,k\,\omega\,)\, [\,b_k \cos(k\,\omega\,t) \;-\; a_k \sin(k\,\omega\,t)\,]$$

g) Integration: Gilt $a_0 = \gamma_0 = \int_0^T f(t)\,\mathrm{d}t = 0$, so folgt:

$$\int\limits_0^t f(\tau)\,\mathrm{d}\tau \sim -\frac{1}{T}\int\limits_0^T t\,f(t)\,\mathrm{d}t - \sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{b_k}{k\,\omega}\cos(k\,\omega\,t) - \frac{a_k}{k\,\omega}\sin(k\,\omega\,t)\right]$$

Satz (10.2.5) (Konvergenzsatz)

Sei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ T–periodisch und stkw. stetig diffb. mit zugehöriger Fourier–Reihe

$$F_f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left[a_k\cos(k\,\omega\,t) + b_k\sin(k\,\omega\,t)\right].$$

a) Die Reihe konvergiert punktweise. Für alle $t\in\mathbb{R}$ gilt:

$$F_f(t) = \frac{1}{2}\Big(f(t^+) + f(t^-)\Big).$$

b) In allen kompakten Intervallen $[a, b]$, in denen f stetig ist, ist die Konvergenz gleichmäßig.

c) In allen Unstetigkeitstellen überschwingen die Partialsummen

$$S_n(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} [\, a_k \cos(k\,\omega\,t) + b_k \sin(k\,\omega\,t)\,]$$

für große n den Sprung um ca. 18% (**Gibbs–Phänomen**)

Bemerkung (10.2.6)

a) Die Voraussetzung der stückweise stetigen Differenzierbarkeit lässt sich noch weiter abschwächen. Die bloße Stetigkeit der Funktion f reicht jedoch nicht aus, um die Konvergenz der Fourier–Reihe gegen f zu garantieren.

b) In den Beispielen (10.2.3) gilt stets Gleichheit für **alle** $t \in \mathbb{R}$.

Satz (10.2.7) (Approximationsgüte)

a) Approximation im quadratischen Mittel:

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ eine T–periodische, stkw. stetige Funktion und

$$S_n(t) \;:=\; \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} \left[\, a_k \cos(k\,\omega\,t) + b_k \sin(k\,\omega\,t) \right]$$

die Partialsummen der zugehörigen Fourier–Reihe. Für

$$T_n \;:=\; \operatorname{Spann}\left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}, \cos(\omega t), \ldots, \cos(n\omega t), \sin(\omega t), \ldots, \sin(n\omega t) \right\}$$

mit Skalarprodukt $\langle u, v\rangle \;=\; \dfrac{2}{T} \displaystyle\int_0^T \overline{u(t)} \cdot v(t)\,\mathrm{d}t$ gilt dann:

$$\forall\, \varphi \in T_n \;:\; \|f - S_n\|_2 \;\le\; \|f - \varphi\|_2 \,,$$

d.h., $S_n(t)$ ist von allen Funktionen aus T_n die beste Approximation an f „im quadratischen Mittel“.

b) Besselsche Ungleichung:

$$\frac{|a_0|^2}{2} + \sum_{k=1}^{n} \left(|a_k|^2 + |b_k|^2\right) \leq \frac{2}{T} \int_0^T |f(t)|^2 \, \mathrm{d}t \, .$$

Hieraus folgt insbesondere die Konvergenz von $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|^2$ und $\sum_{k=1}^{\infty} |b_k|^2$ und damit auch: $a_k \to 0$, $b_k \to 0$. (**Riemannsches Lemma**).

c) Konvergenzgeschwindigkeit:

Ist $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}/\mathbb{C}$ T–periodisch, stückweise $(m+1)$–fach stetig differenzierbar, und sind die Ableitungen $f^{(k)}$, $0 \leq k < m$, stetig auf $\mathbb{R}$, so gibt es eine Konstante $C > 0$ mit

$$|\gamma_k| \leq \frac{C}{|k|^{m+1}} \, , \qquad k = \pm 1 \, , \pm 2 \, , \ldots$$

Bemerkung (10.2.8)

Man kann zeigen, dass die Besselsche Ungleichung für $n \to \infty$ in Gleichheit übergeht (**Parsevalsche Gleichung**):

$$\frac{|a_0|^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(|a_k|^2 + |b_k|^2\right) = \frac{2}{T} \int_0^T |f(t)|^2 \, \mathrm{d}t \, .$$

Satz (10.2.9) (Eindeutigkeitssatz)

Haben zwei T–periodische, stückweise stetige Funktionen f und g dieselben Fourier–Koeffizienten, und erfüllen beide die Mittelwerteigenschaft

$$\forall \, t : \; f(t) = \frac{1}{2} \left(f(t^-) + f(t^+)\right) ,$$

so stimmen sie überein, $f = g$.