4. Existenz und Eindeutigkeit bei AWA

A. Allgemeines.

Wir betrachten eine AWA

$$\mathbf{y}'(t) \;=\; \mathbf{f}(t, \mathbf{y}(t)), \quad \mathbf{y}(t_0) \;=\; \mathbf{y}_0. \tag{4.1}$$

Dabei: $\mathbf{f} : I \times D \to \mathbb{R}^n$, $I \subset \mathbb{R}$ offenes Intervall und $D \subset \mathbb{R}^n$ Gebiet. Ferner sei $(t_0, \mathbf{y}_0) \in I \times D$. Wir fragen

- Existiert eine Lösung $\mathbf{y}(t)$ in einer Umgebung $|t - t_0| < \varepsilon$ der Anfangszeit? (Lokale Existenz?)
- Ist diese eindeutig bestimmt? (Eindeutigkeit?)
- Wie weit lässt sich eine solche Lösung fortsetzen? (Globale Existenz?)

- Wie verändert sich die Lösung bei Störung der Anfangsdaten $(t_0, \mathbf{y}_0)$ oder der rechten Seite $\mathbf{f}$? (Stabilität?)

Historischer Rückblick:

Auf **Augustin Louis Cauchy** (1789 – 1857) geht ein Satz zurück, der die lokale Existenz und Eindeutigkeit garantiert unter der Voraussetzung, dass die rechte Seite $\mathbf{f}$ auf $I \times D$ stetig und beschränkt ist und sämtliche partiellen Ableitungen $\partial \mathbf{f}/\partial y_i,\ i = 1, \ldots, n,$ dort existieren und beschränkt sind (1826).

Rudolf Lipschitz (1832 – 1903) ersetzte 1876 die Voraussetzung an die partiellen Ableitungen durch eine schwächere Bedingung, die so genannte **Lipschitz–Bedingung**:

$$\|\mathbf{f}(t, \tilde{\mathbf{y}}) - \mathbf{f}(t, \mathbf{y})\| \ \leq \ L \ \|\tilde{\mathbf{y}} - \mathbf{y}\| \ . \tag{4.2}$$

Émile Picard (1856–1941) und **Ernst Lindelöf** (1870–1946) gaben um 1890 einen konstruktiven Beweis des Satzes von Lipschitz an, bei dem sie das **Verfahren der sukzessiven Approximation** verwendeten.

Im gleichen Jahr 1890 konnte **Giuseppe Peano** (1858 – 1932) zeigen, dass die Existenz einer Lösung von (4.1) bereits dann garantiert ist, wenn die rechte Seite lediglich stetig und beschränkt ist. Die Eindeutigkeit der Lösung ist allerdings unter dieser schwachen Voraussetzung nicht mehr gesichert.

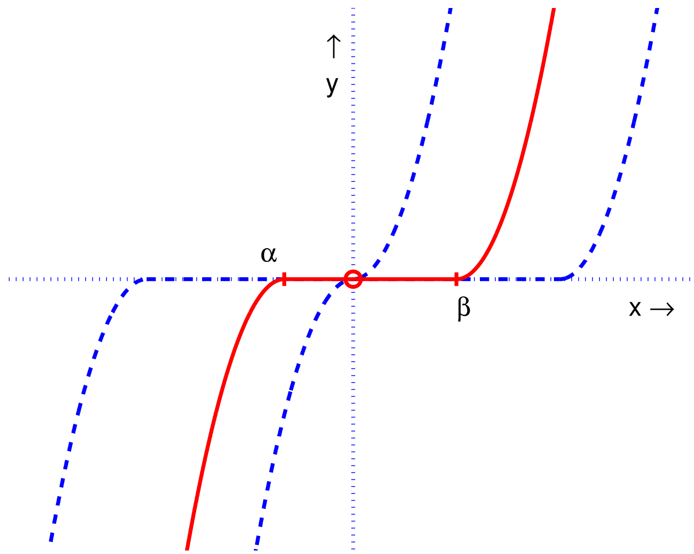
Beispiel (4.3) $\mathbf{y'(t) = \sqrt{|y(t)|}, \quad y(0) = 0}.$

Die rechte Seite $f(t,y) = \sqrt{|y|}$ ist stetig und beschränkt auf $\mathbb{R} \times [-a,a]$, $a > 0$, erfüllt jedoch keine Lipschitz–Bedingung.

In der Tat ist für beliebige $\alpha \le 0 \le \beta$

$$y_{\alpha,\beta}(t) \;=\; \begin{cases} -\frac{1}{4}(t-\alpha)^2\,, & -\infty < t \le \alpha \\ 0\,, & \alpha \le t \le \beta \\ \frac{1}{4}(t-\beta)^2\,, & \beta \le t < \infty \end{cases}$$

eine Lösung der AWA.



Mehrdeutigkeit der Lösungen einer AWA

B. Der Existenzsatz von Peano.

Satz (4.4) (Peano)

Ist $\mathbf{f}$ *auf* $G := I \times D$ *stetig und ist* $(t_0, \mathbf{y}_0) \in G$*, so existiert ein* $\delta > 0$*, so dass die AWA im Intervall* $|t - t_0| < \delta$ *eine Lösung besitzt.*

Bemerkungen (4.5)

a) Der Beweis lässt sich konstruktiv mit Hilfe des **Eulerschen Polygonzug-Verfahrens** führen.

$$t_{j+1} = t_j + h;\ \mathbf{Y}_{j+1} = \mathbf{Y}_j + h\,\mathbf{f}(t_j, \mathbf{Y}_j), \quad j = 0, \ldots \qquad (4.6)$$

Man zeigt, dass das Euler-Verfahren zu einer gegen Null konvergenten Schrittweitenfolge Näherungslösungen liefert, die eine konvergente Teilfolge besitzen. Deren Grenzwert ist dann notwendigerweise eine Lösung der AWA.

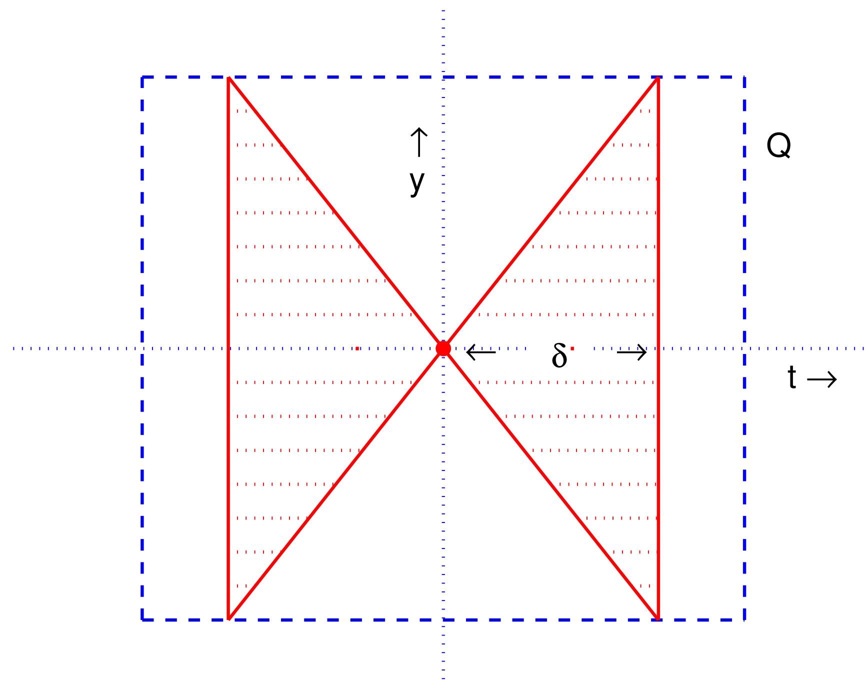
b) Ist die rechte Seite $\mathbf{f}$ der DGL auf einem kompakten Quader

$$Q \;:=\; \{(t,\mathbf{y}) : |t-t_0| \le a \wedge \|\mathbf{y}-\mathbf{y}_0\|_\infty \le b\} \text{ mit } a,\, b > 0 \quad (4.7)$$

stetig, so existiert auf dem Intervall $|t - t_0| \le \delta$ eine Lösung der AWA, wobei δ wie folgt erklärt ist

$$\delta \;:=\; \min(a, \frac{b}{M}) \;>\; 0,\;\; M \;:=\; \sup\{\|f(t,\mathbf{y})\|_\infty : \;(t,\mathbf{y}) \in Q\}. \quad (4.8)$$

c) Ist $\mathbf{f}$ auf $G := I \times D$ stetig, so lässt sich jede Lösung $\mathbf{y}$ der AWA auf ein **maximales Existenzintervall** $t_{\min} < t < t_{\max}$ fortsetzen. Dabei kommt $(t, \mathbf{y}(t))$ für $t \to t_{\min}$ bzw. $t \to t_{\max}$ dem Rand von G beliebig nahe. D.h. jeder (endliche) Häufungspunkt einer Folge $(t_k, \mathbf{y}(t_k))_{k\in\mathbb{N}}$ mit $t_k \to t_{\min}$ bzw. $t_k \to t_{\max}\,(k \to \infty)$ liegt auf dem Rand von G.



Beispiele (4.9) **a)** $\mathbf{y' = y}, \quad \mathbf{G = \mathbb{R} \times \mathbb{R}}.$

Die allgemeine Lösung ist $y(t) = C\mathrm{e}^t$. Jede Lösung lässt sich auf $\mathbb{R}$ fortsetzen. Wegen $t_{\text{min}} = -\infty$ und $t_{\text{max}} = \infty$ existieren keine (endlichen) Häufungspunkte.

b) $\quad \mathbf{y' \; = \; -t/y}, \quad \mathbf{G} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{+}.$

Man beachte, dass G ein Gebiet, also zusammenhängend sein muss!
Die allgemeine Lösung der DGL lautet $y(t) = +\sqrt{r^2 - t^2}, \quad r > 0.$
Damit ist $t_{\text{min}} = -r$ und $t_{\text{max}} = r$ und die beiden Häufungspunkte $(t_{\text{min}}, 0)$ und $(t_{\text{max}}, 0)$ liegen auf dem Rand von G.

c) $\quad \mathbf{y' \; = \; y^2}, \quad \mathbf{y(0) = 1}, \quad \mathbf{G} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}.$

Mittels Variablentrennung erhält man die Lösung $y(t) = 1/(1-t)$ und damit $t_{\text{min}} = -\infty, \quad t_{\text{max}} = 1$. Wiederum existieren keine (endlichen) Häufungspunkte für $t \to t_{\text{min}}$ oder $t \to t_{\text{max}}$.

d) $\quad \mathbf{y' \; = \; -\left(\sqrt{1 - y^2}\right)/t^2}, \quad \mathbf{G} = \mathbb{R}^{+} \times [\mathbf{-1, 1}].$

Die Lösung kann wieder mittels Variablentrennung ermittelt werden. Man findet $y(t) = \sin(1/t + C)$ und $t_{\text{min}} = 0, \quad$ sowie $t_{\text{max}} = \infty$.

Häufungspunkte existieren für $t \to 0$ mit den Werten $(0, \lambda)$, $\lambda \in [-1, 1]$.

Man beachte, dass es neben den obigen Lösungen die beiden singulären Lösungen $y(t) = \pm 1$ gibt, und in den Punkten $(t, \pm 1)$ die lokale Eindeutigkeit verletzt ist.

C. Der Satz von Picard und Lindelöf.

Satz (4.10) (Picard, Lindelöf)

Sei $\mathbf{f} : Q \to \mathbb{R}^n$ eine stetige Funktion auf dem Quader (a, $b > 0$)

$$Q = \left\{ (t, \mathbf{y}) \in \mathbb{R}^{n+1} : |t - t_0| \le a \ \wedge \ \|\mathbf{y} - \mathbf{y}_0\|_\infty \le b \right\} .$$

Ferner gebe es Konstante M, $L > 0$, so dass für $(t, \tilde{\mathbf{y}})$, $(t, \mathbf{y}) \in Q$ gilt: $\|\mathbf{f}(t, \mathbf{y})\|_\infty \le M$, $\|\mathbf{f}(t, \tilde{\mathbf{y}}) - \mathbf{f}(t, \mathbf{y})\|_\infty \le L \, \|\tilde{\mathbf{y}} - \mathbf{y}\|_\infty$.

Dann besitzt die Anfangswertaufgabe (4.1) eine eindeutig bestimmte Lösung $\mathbf{y}$*, die mindestens im Intervall* $[t_0 - \delta, t_0 + \delta]$*,* $\delta := \min(a, b/M)$ *definiert ist. Diese lässt sich als gleichmäßiger Limes der folgenden Funktionenfolge erhalten (k = 0,1,...):*

$$\mathbf{y}^{(0)}(t) := \mathbf{y}_0, \quad \mathbf{y}^{(k+1)}(t) := \mathbf{y}_0 + \int_{t_0}^{t} \mathbf{f}(\tau, \mathbf{y}^{(k)}(\tau))\, d\tau. \qquad (4.11)$$

Beweisidee:

Durch komponentenweise Integration lässt sich die AWA in eine äquivalente Integralgleichung umwandeln

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{y}_0 + \int_{t_0}^{t} \mathbf{f}(\tau, \mathbf{y}(\tau))\, \mathrm{d}\tau =: \Phi(\mathbf{y})(t). \qquad (4.12)$$

Dies ist eine Fixpunktgleichung für die gesuchte stetige Funktion $\mathbf{y} : [t_0 - \delta, t_0 + \delta] \to \mathbb{R}^n$.

Die zugehörige Fixpunktiteration ist gerade durch (4.11) gegeben. Der obere Index ist hierbei der Iterationsindex des Verfahrens! Die Iteration (4.11) heißt **Verfahren der sukzessiven Approximation**.

Den Konvergenzbeweis zu (4.11) lässt sich nun analog zum Beweis des Fixpunktsatzes führen, vgl. Lehrbuch Band 1, Satz (10.5.8).

Dabei ist wichtig, dass alle Iterierten $\mathbf{y}^{(k)}$ auf dem gesamten Intervall $|t - t_0| \leq \delta$ erklärt sind und ganz im Quader Q verlaufen (die Norm ist stets die Maximumsnorm im $\mathbb{R}^n$):

$$\begin{aligned} \left\| \mathbf{y}^{(k+1)}(t) - \mathbf{y}_0 \right\| &= \left\| \int_{t_0}^{t} \mathbf{f}(\tau, \mathbf{y}^{(k)}(\tau))\, \mathrm{d}\tau \right\| \leq \int_{t_0}^{t} \|\mathbf{f}(\tau, \mathbf{y}^{(k)}(\tau))\|\, \mathrm{d}\tau \\ &\leq M\, |t - t_0| \leq b. \end{aligned}$$

Bemerkungen (4.13)

a) Erfüllt $\mathbf{f}$ auf dem Streifen $[a, b] \times \mathbb{R}^n$ eine globale Lipschitz–Bedingung, so besitzt die AWA eine eindeutig bestimmte Lösung $\mathbf{y}$, die auf auf dem ganzen Intervall $[a, b]$ definiert ist **(globale Existenz!)**.

b) Eine **lineare AWA**

$$\mathbf{y}'(t) \;=\; \mathbf{A}(t)\,\mathbf{y}(t) + \mathbf{b}(t)\,, \qquad \mathbf{y}(t_0) \;=\; \mathbf{y}_0 \tag{4.14}$$

mit stetigen Funktionen $\mathbf{A} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{(n,n)}$, $\mathbf{b} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ besitzt eine eindeutig bestimmte Lösung $\mathbf{y}$, die auf ganz $\mathbb{R}$ definiert ist!

Beweisidee: $\mathbf{f}$ erfüllt eine globale Lipschitz–Bedingung auf *jedem* Streifen $[a, b] \times \mathbb{R}^n$!

c) Zur Berechnung der Lipschitz-Konstanten ist folgender Sachverhalt hilfreich: Ist $\mathbf{f}$ stetig und bzgl. $\mathbf{y}$ differenzierbar auf Q und sind die partiellen Ableitungen beschränkt:

$$L_i \; := \; \sup \left\{ \sum_{j=1}^{n} \left| \frac{\partial f_i}{\partial y_j}(t, \mathbf{y}) \right| : \; (t, \mathbf{y}) \in Q \right\} \; < \; \infty, \tag{4.15}$$

so ist $\mathbf{f}$ Lipschitz-stetig mit der Lipschitz-Konstanten

$$L \; := \; \max(L_1, \ldots, L_n). \tag{4.16}$$

Beweis: Nach dem Mittelwertsatz gilt für $i = 1, \ldots, n$:

$$f_i(t, \tilde{\mathbf{y}}) - f_i(t, \mathbf{y}) \; = \; \nabla_y f_i(t, \mathbf{y} + \Theta_i(\tilde{\mathbf{y}} - \mathbf{y}))^{\mathsf{T}} (\tilde{\mathbf{y}} - \mathbf{y}), \;\; \Theta_i \in]0, 1[,$$

und damit $|f_i(t, \tilde{\mathbf{y}}) - f_i(t, \mathbf{y})| \leq L_i \, \|\tilde{\mathbf{y}} - \mathbf{y}\|_\infty$. Bildet man hier das Maximum über $i = 1, \ldots, n$, so folgt die Behauptung!