

4. Die Laplace Gleichung

Wir beginnen mit einem berühmten Beispiel, das zeigt, dass Anfangswertaufgaben (AWA) bei elliptischen PDG **nicht sachgemäß** gestellt sind.

Beispiel (4.1) (Hadamard)

Wir betrachten die folgende AWA

$$\begin{aligned}\Delta u &= u_{xx} + u_{yy} = 0, \\ u(x, 0) &= u_0(x), \quad u_y(x, 0) = v_0(x).\end{aligned}\tag{4.2}$$

Für $u_0 = v_0 = 0$ ergibt sich offenbar die Lösung $u = 0$.
Nun stören wir die Anfangsdaten gemäß

$$u_0^{(n)}(x) = 0, \quad v_0^{(n)}(x) = \sin(nx)/n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Auch hierfür kann man eine Lösung angeben:

$$u^{(n)}(x, y) = \frac{1}{n^2} \sin(nx) \sinh(ny).$$

Nun gilt zwar

$$u^{(n)}(x, 0) = u_0(x) = 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} u_y^{(n)}(x, 0) = v_0(x) = 0,$$

jedoch für $y > 0$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sinh(ny)}{n^2} = \infty$$

und damit $u^{(n)} \not\rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$).

Folgerung: Kleine Störungen in den Anfangsdaten können zu beliebig großen Fehlern in der Lösung führen!

Wir betrachten nun Randwertaufgaben (RWA) für die Laplace-Gleichung: Gegeben sei ein Gebiet $D \subset \mathbb{R}^n$, wobei $n = 2$ oder $n = 3$ sei. Ferner nehmen wir an, dass der Rand ∂D des Gebietes stückweise glatt sei. Wir unterscheiden folgende Typen von RWA

a) Dirichletsche RWA:

Gesucht ist eine stetige Funktion $u : \bar{D} \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$\begin{aligned} \Delta u(\mathbf{x}) &= 0, & \mathbf{x} \in D, \\ u(\mathbf{x}) &= u_0(\mathbf{x}), & \mathbf{x} \in \partial D. \end{aligned} \tag{4.3}$$

Dabei ist u_0 eine vorgegebene stetige Funktion auf ∂D .

b) Neumannsche RWA:

Anstelle der Randwerte für die gesuchte Funktion u wird die Normalableitung $\partial u / \partial \mathbf{n}$ vorgegeben:

$$\Delta u(\mathbf{x}) = 0 \quad (\mathbf{x} \in D), \quad (\partial u / \partial \mathbf{n})(\mathbf{x}) = v_0(\mathbf{x}) \quad (\mathbf{x} \in \partial D).$$

Natürlich ist es auch möglich, Linearkombinationen von u und u_n vorzuschreiben. Man spricht dann von einer *RWA dritter Art*. Ist D ein beschränktes Gebiet, so spricht man von einer *inneren RWA*, ist dagegen D das Komplement eines beschränkten Bereiches, so spricht man von einer *äußeren RWA*. In diesem Fall sind dann weitere Regularitäts- und Randbedingung an die Lösung für $\|\mathbf{x}\| \rightarrow \infty$ zu stellen.

A. Ebene Dirichletsche RWA auf einem Rechteck.

$$\begin{aligned}
 \Delta u(x, y) &= 0, & x \in]0, a[, y \in]0, b[, \\
 u(x, 0) &= u(x, b) = 0, & 0 \leq x \leq a, \\
 u(0, y) &= f(y), u(a, y) = 0, & 0 \leq y \leq b.
 \end{aligned}
 \tag{4.4}$$

Wir verwenden einen **Separationsansatz** $u(x, y) = X(x)Y(y)$.

Einsetzen in die PDG ergibt $X''Y + XY'' = 0$, oder – wenn man $X, Y \neq 0$ im Innern des Rechtecks annimmt

$$\frac{X''(x)}{X(x)} + \frac{Y''(y)}{Y(y)} = 0.$$

(i) Zunächst folgt hieraus, dass $Y''/Y = \text{const.}$ ist und die Randbedingungen $Y(0) = Y(b) = 0$ erfüllt. Damit ergeben sich die Lösungen

$$Y(y) = Y_k(y) = C_k \sin(\alpha_k y), \quad \alpha_k := k\pi/b, \quad k \in \mathbb{N}.$$

(ii) Es bleibt die AWA $X''_k/X_k = \alpha_k^2$, $X_k(a) = 0$. Lösungen:

$$X(x) = X_k(x) = \tilde{C}_k \sinh(\alpha_k(x - a)), \quad k \in \mathbb{N}.$$

(iii) Superpositionsprinzip:

$$u(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sinh(\alpha_k (x - a)) \sin(\alpha_k y).$$

Dies wird in die letzte Randbedingung eingesetzt

$$f(y) = u(0, y) = \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k \sin(\alpha_k y), \quad \beta_k = -b_k \sinh(\alpha_k a).$$

Hieraus folgt: Die β_k sind die **Fourier-Koeffizienten** der ungerade und $(2b)$ -periodisch fortgesetzten Randfunktion f .

Für die Fourier-Koeffizienten gilt dann (vgl. Analysis II)

$$\beta_k = \frac{2}{b} \int_0^b f(y) \sin(\alpha_k y) dy.$$

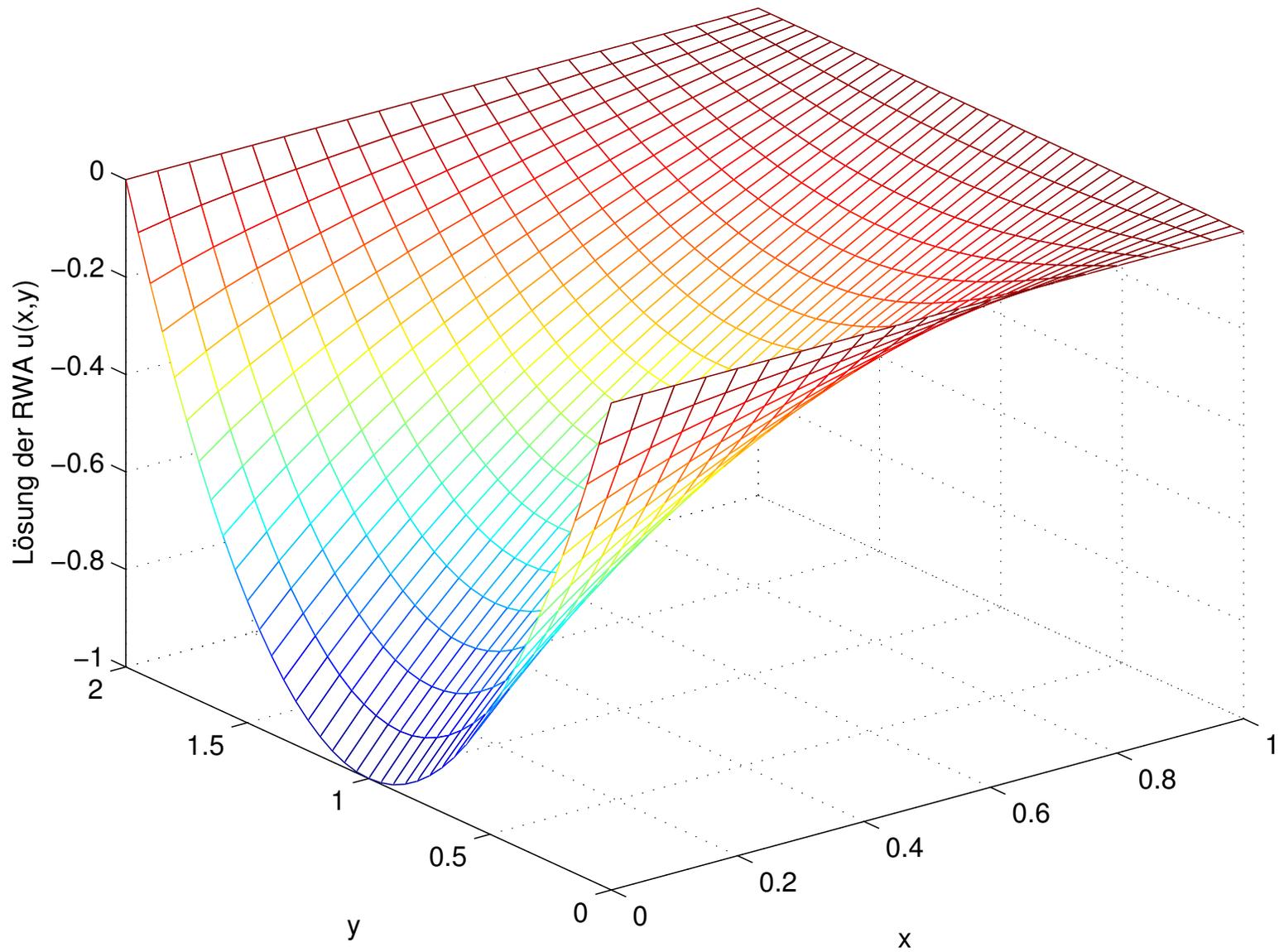
Konkretes Beispiel (4.5) $f(y) := y(y - b)$, $a := 1$, $b := 2$.

Man findet $\alpha_k = k\pi/2$, $\beta_k = \begin{cases} -4/\alpha_k^3, & k \text{ ungerade,} \\ 0, & k \text{ gerade} \end{cases}$

Damit ergibt sich die Lösungsdarstellung

$$u(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{-\beta_k}{\sinh(\alpha_k)} \sinh(\alpha_k(x - 1)) \sin(\alpha_k y).$$

Die Auswertung der ersten zehn nichtverschwindenden Summanden auf einem Gitter (mittels MATLAB) ergibt die folgende graphische Darstellung der Lösung



B. Dirichletsche RWA auf einer Kreisscheibe.

$$\begin{aligned}\Delta u(x, y) &= 0, & x^2 + y^2 < R^2, \\ u(x, y) &= u_0(x, y), & x^2 + y^2 = R^2\end{aligned}\tag{4.6}$$

u_0 sei eine glatte Funktion, die in Polarkoordinaten durch $u_0(R; \varphi)$ beschrieben wird, und bzgl. φ **stetig**, **2π -periodisch** und **stückweise C^1** sei. Es gilt die folgende Lösungsdarstellung

Satz (4.7) (Poissonsche Integralformel)

Die RWA (4.6) besitzt eine eindeutig bestimmte Lösung u .

a) Reihendarstellung in Polarkoordinaten: ($0 \leq r \leq R, \varphi \in \mathbb{R}$)

$$u(r, \varphi) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\alpha_k \cos(k\varphi) + \beta_k \sin(k\varphi) \right) \left(\frac{r}{R} \right)^k \tag{4.8}$$

α_k, β_k : Fourier-Koeffizienten der Randfunktion $u_0(\varphi)$.

b) Integraldarstellung in Polarkoordinaten: ($0 \leq r < R, \varphi \in \mathbb{R}$)

$$u(r, \varphi) = \frac{R^2 - r^2}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{u_0(R, \alpha)}{R^2 + r^2 - 2rR \cos(\varphi - \alpha)} d\alpha, \quad (4.9)$$

c) Integraldarstellung in cartesischen Koordinaten: ($\|\mathbf{x}\| < R$)

$$u(\mathbf{x}) = \frac{R^2 - \|\mathbf{x}\|^2}{R\omega_2} \oint_{\|\mathbf{y}\|=R} \frac{u_0(\mathbf{y})}{\|\mathbf{y} - \mathbf{x}\|^2} d\sigma. \quad (4.10)$$

Hierbei ist $d\sigma := R d\alpha$ das Bogenelement und $\omega_2 := 2\pi$ der Umfang des Einheitskreises.

Beweis: Sei u eine harmonische Funktion auf einem Gebiet D mit $\overline{K_R(0)} \subset D$. Auf D gilt dann in Polarkoordinaten (vgl. (17.2.26))

$$r^2 \Delta u = r^2 u_{rr} + r u_r + u_{\varphi\varphi} = 0. \quad (4.11)$$

Für $r \in]0, R]$ ist die Abbildung $\varphi \mapsto u(r, \varphi)$ eine glatte, 2π -periodische Funktion. Daher konvergiert die Fourier-Entwicklung (absolut und gleichmäßig) und es gelten

$$u(r, \varphi) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} [a_k \cos(k\varphi) + b_k \sin(k\varphi)], \quad (4.12)$$

$$a_k = a_k(r) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} u(r, \alpha) \cos(k\alpha) d\alpha, \quad (4.13)$$

$$b_k = b_k(r) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} u(r, \alpha) \sin(k\alpha) d\alpha.$$

Wegen der gleichmäßigen Konvergenz der Fourier-Reihe darf unter der Summe differenziert werden! Setzt man also die Reihe (4.12) in (4.11) ein, so ergibt sich

$$\begin{aligned} (r^2 a_0'' + r a_0')/2 + \sum_{k=1}^{\infty} \{ (r^2 a_k'' + r a_k' - k^2 a_k) \cos(k\varphi) + \\ + (r^2 b_k'' + r b_k' - k^2 b_k) \sin(k\varphi) \} = 0 \end{aligned}$$

Hierin müssen alle Koeffizienten verschwinden:

$$\begin{aligned} r^2 a_k'' + r a_k' - k^2 a_k &= 0, & k \geq 0, \\ r^2 b_k'' + r b_k' - k^2 b_k &= 0, & k > 0. \end{aligned} \tag{4.14}$$

Für die allgemeine Lösung dieser linearen, homogenen DGL zweiter Ordnung erhält man $a_0(r) = A_0 + C_0 \ln r$ und für $k > 0$ (Ansatz: $a_k, b_k = r^\mu$)

$$a_k(r) = A_k r^k + C_k r^{-k}, \quad b_k(r) = B_k r^k + D_k r^{-k}.$$

Da die Lösung $u(r, \varphi)$ auch in $r = 0$ glatt sein soll, fallen die singulären Terme $\ln r$ und r^{-k} weg, also $C_k = D_k = 0$. Somit bleibt $a_k(r) = A_k r^k$, $b_k(r) = B_k r^k$, $0 \leq r \leq R$, – oder

$$a_k(r) = \left(\frac{r}{R}\right)^k \alpha_k, \quad b_k(r) = \left(\frac{r}{R}\right)^k \beta_k, \quad (4.15)$$

wobei $\alpha_k := a_k(R)$, $\beta_k := b_k(R)$ die Fourier-Koeffizienten der Randfunktion u_0 bezeichnen. Setzt man (4.15) nun in die Reihe (4.12) ein, so erhält man die Lösungsdarstellung (4.8):

$$u(r, \varphi) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\alpha_k \cos(k\varphi) + \beta_k \sin(k\varphi) \right) \left(\frac{r}{R}\right)^k.$$

Zum Nachweis von b) setzt man hierin die Fourier-Koeffizienten der Randfunktion gemäß (4.13) ein:

$$\alpha_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} u(R, \alpha) \cos(k\alpha) d\alpha, \quad \beta_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} u(R, \alpha) \sin(k\alpha) d\alpha.$$

Mittels Additionstheorem erhält man

$$u(r, \varphi) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} u_0(R, \alpha) \left\{ \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \cos[k(\varphi - \alpha)] \left(\frac{r}{R}\right)^k \right\} d\alpha \quad (4.16)$$

Umformung der Klammer:

$$\begin{aligned} \{\dots\} &= \operatorname{Re} \left\{ \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} e^{ik(\varphi - \alpha)} \left(\frac{r}{R}\right)^k \right\} \\ &= \operatorname{Re} \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{r e^{i(\varphi - \alpha)}}{R}\right)^k - \frac{1}{2} \right\} \\ &= \operatorname{Re} \left\{ \frac{1}{1 - (r e^{i(\varphi - \alpha)})/R} - \frac{1}{2} \right\} \\ &= \operatorname{Re} \left\{ \frac{R}{R - r \cos(\varphi - \alpha) - i r \sin(\varphi - \alpha)} - \frac{1}{2} \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \{\dots\} &= \frac{R^2 - r R \cos(\varphi - \alpha)}{R^2 + r^2 - 2 r R \cos(\varphi - \alpha)} - \frac{1}{2} \\ &= \frac{0.5(R^2 - r^2)}{R^2 + r^2 - 2 r R \cos(\varphi - \alpha)}. \end{aligned}$$

Damit lautet nun (4.16)

$$u(r, \varphi) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} u_0(R, \alpha) \frac{0.5(R^2 - r^2)}{R^2 + r^2 - 2 r R \cos(\varphi - \alpha)} d\alpha,$$

womit b) gezeigt ist.

Die Aussagen c) folgt direkt aus b) mit Hilfe des cos-Satzes

$$\|\mathbf{y} - \mathbf{x}\|^2 = \|\mathbf{y}\|^2 + \|\mathbf{x}\|^2 - 2 \|\mathbf{x}\| \|\mathbf{y}\| \cos(\varphi - \alpha).$$

□

Beispiel (4.17)

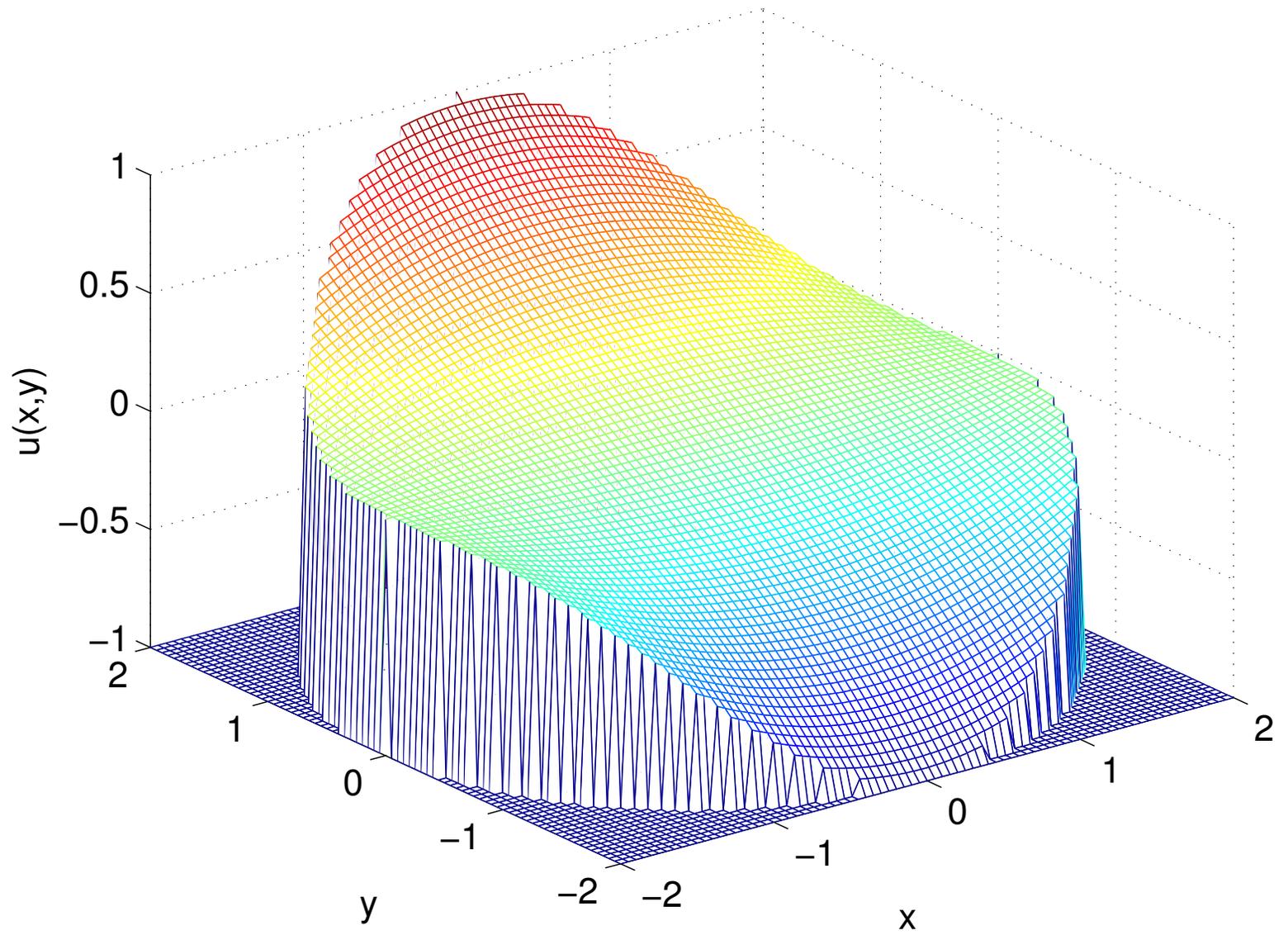
$$\begin{aligned}\Delta u(x, y) &= 0, & x^2 + y^2 < 4, \\ u(x, y) &= u_0(\varphi) = \sin^3 \varphi, & x^2 + y^2 = 4.\end{aligned}$$

Aus der trigonometrischen Beziehung $\sin(3\varphi) = 3 \sin \varphi - 4 \sin^3 \varphi$ lässt sich sofort die Fourier-Entwicklung der Randfunktion ablesen:

$$u_0(\varphi) = \sin^3 \varphi = (3/4) \sin \varphi - (1/4) \sin(3\varphi).$$

Damit ergibt sich aus (4.8) die Lösung

$$\begin{aligned}u(x, y) &= (3/4) \sin \varphi \cdot \left(\frac{r}{2}\right)^1 - (1/4) \sin(3\varphi) \left(\frac{r}{2}\right)^3 \\ &= (3/8) r \sin \varphi - (1/32) r^3 [3 \sin \varphi - 4 \sin^3 \varphi] \\ &= [(3/8) - (3/32)r^2] r \sin \varphi + (1/8) r^3 \sin^3 \varphi \\ &= (3/8) [1 - (1/4)(x^2 + y^2)] y + (1/8) y^3 \\ &= (3/8) y - (3/32) x^2 y + (1/32) y^3.\end{aligned}$$



C. Lösungsweg nach Fourier.

Wir betrachten die RWA (4.6), wobei wir wieder Polarkoordinaten verwenden. Ein **Separationsansatz**: $u(r, \varphi) = X(r) \Phi(\varphi)$, liefert, eingesetzt in die PDG (4.8) $r^2 X'' \Phi + r X' \Phi + X \Phi'' = 0$, oder

$$\left(r^2 \frac{X''(r)}{X(r)} + r \frac{X'(r)}{X(r)} \right) + \frac{\Phi''(\varphi)}{\Phi(\varphi)} = 0.$$

(i) Zunächst folgt hieraus, dass $\Phi''/\Phi = \lambda = \text{const.}$ ist. Da Φ aber 2π -periodisch sein muss, ergeben sich die Lösungen

$$\Phi = \Phi_k(\varphi) = a_k \cos(k\varphi) + b_k \sin(k\varphi), \quad k \in \mathbb{N}_0.$$

(ii) Damit bleibt die gewöhnliche DGL $r^2 X''/X + r X'/X = k^2$, oder

$$r^2 X'' + r X' - k^2 X = 0.$$

Die Lösungen sind

$$X_0(r) = c_0 + d_0 \ln r, \quad X_k(r) = c_k r^k + d_k r^{-k} \quad (k > 0).$$

Für das (innere) Dirichlet-Problem auf $D = K_R(\mathbf{0})$ fallen alle Lösunganteile weg, die in $r = 0$ singular sind: $d_k = 0, \forall k \geq 0$.

(iii) Superpositionsprinzip

$$u(r, \varphi) = \frac{a_0 c_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} r^k (a_k c_k \cos(k\varphi) + b_k c_k \sin(k\varphi)).$$

Vergleicht man diese Lösungsdarstellung nun mit der **Fourier-Entwicklung** der Randfunktion $u_0(\varphi)$

$$u(R, \varphi) = u_0(\varphi) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \cos(k\varphi) + \beta_k \sin(k\varphi),$$

so findet man $\alpha_k = a_k c_k R^k$ und $\beta_k = b_k c_k R^k$ und damit die uns schon bekannte Lösungsdarstellung (4.8).

D. Die Außenraumaufgabe.

$$\begin{aligned}\Delta u(x, y) &= 0, & x^2 + y^2 &> R^2, \\ u(x, y) &= u_0(\varphi), & x^2 + y^2 &= R^2 \\ u &\text{ beschränkt für } x^2 + y^2 \rightarrow \infty.\end{aligned}\tag{4.18}$$

Zur Bestimmung einer Lösung gehen wir analog zur Fourier-Methode vor. Für den Lösungsanteil X können jedoch wegen der Beschränktheit von u für $r \rightarrow \infty$ nur die Anteile c_0 und $d_k r^{-k}$ auftreten.

Damit ergibt sich die Lösungsdarstellung

$$u(r, \varphi) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (\alpha_k \cos(k\varphi) + \beta_k \sin(k\varphi)) \left(\frac{R}{r}\right)^k. \tag{4.19}$$

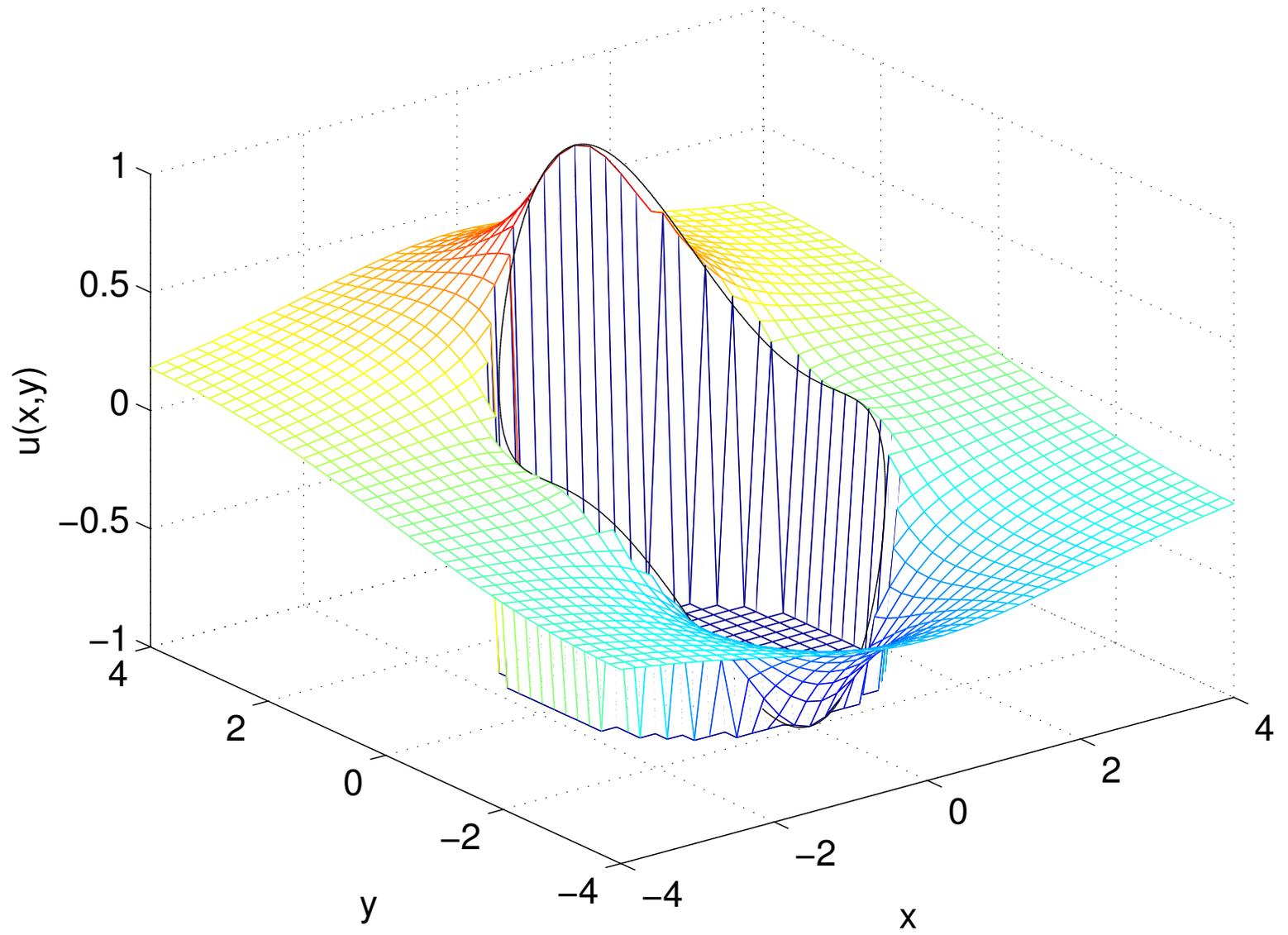
Die α_k , β_k sind wiederum die Fourier-Koeffizienten der Randfunktion $u_0(\varphi)$.

Beispiel (4.20)

$$\begin{aligned}\Delta u(x, y) &= 0, & x^2 + y^2 > 4, \\ u(x, y) &= u_0(\varphi) = \sin^3 \varphi, & x^2 + y^2 = 4. \\ u &\text{ beschränkt für } x^2 + y^2 \rightarrow \infty.\end{aligned}$$

Mit $\alpha_k = 0, \forall k$, und $\beta_1 = 3/4, \beta_3 = -1/4, \beta_k = 0$ für $k \neq 1, 3$ erhält man aus (4.19)

$$\begin{aligned}u(x, y) &= (3/4) \sin(\varphi) \left(\frac{2}{r}\right)^1 - (1/4) \sin(3\varphi) \left(\frac{2}{r}\right)^3 \\ &= (3/2) \frac{r \sin \varphi}{r^2} - 2 \frac{3 \sin \varphi - 4 \sin^3 \varphi}{r^3} \\ &= (3/2) \frac{y}{(x^2 + y^2)} - 6 \frac{y}{(x^2 + y^2)^2} + 8 \frac{y^3}{(x^2 + y^2)^3}.\end{aligned}$$



E. Theorie der harmonischen Funktionen.

Zunächst sei bemerkt, dass die Poissonsche Integralformel (4.9-10) ganz analog für die 3D-Laplace-Gleichung gilt

$$u(\mathbf{x}) = \frac{R^2 - \|\mathbf{x}\|^2}{R\omega_3} \oint_{\|\mathbf{y}\|=R} \frac{u_0(\mathbf{y})}{\|\mathbf{y} - \mathbf{x}\|^3} d\sigma, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3.$$

Dabei ist $d\sigma$ das Oberflächenelement der Kugel, vgl. (19.3.14), und $\omega_3 = 4\pi$ die Oberfläche der Einheitskugel.

Satz (4.21) (Mittelwerteigenschaft)

Ist u auf $D \subset \mathbb{R}^n$, $n = 2, 3$, harmonisch und ist $\overline{K}_R(\mathbf{x}_0) \subset D$, so gilt die Mittelwerteigenschaft

$$u(\mathbf{x}_0) = \frac{1}{R^{n-1}\omega_n} \oint_{\|\mathbf{y}-\mathbf{x}_0\|=R} u(\mathbf{y}) d\sigma.$$

Beweis: Für $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$ folgt dies unmittelbar aus der Poissonschen Integralformel. Für $\mathbf{x}_0 \neq \mathbf{0}$ zeigt man dies durch Verschiebung von \mathbf{x}_0 in den Ursprung, also durch Anwendung der Mittelwert-eigenschaft für $\mathbf{0}$ auf $v(\mathbf{x}) := u(\mathbf{x} + \mathbf{x}_0)$. □

Satz (4.22) (Stabilität)

Sind u bzw. \tilde{u} die (eindeutig bestimmten) Lösungen der RWA (4.6) zu den Randfunktionen u_0 bzw. \tilde{u}_0 , so gilt die Fehlerabschätzung

$$|\tilde{u}(\mathbf{x}) - u(\mathbf{x})| \leq \|\tilde{u}_0 - u_0\|_\infty, \quad \|\mathbf{x}\|_2 \leq R.$$

Insbesondere hängt damit die Lösung der RWA (4.6) stetig von den Randdaten u_0 ab, die Randwertaufgabe ist sachgemäß gestellt!

Beweis: Aus der Poissonschen Integralformel ergibt sich

$$\begin{aligned}
 |\tilde{u}(\mathbf{x}) - u(\mathbf{x})| &\leq \frac{R^2 - \|\mathbf{x}\|^2}{R\omega_n} \int_{\|\mathbf{y}\|=R} \frac{|\tilde{u}_0(\mathbf{y}) - u_0(\mathbf{y})|}{\|\mathbf{y} - \mathbf{x}\|^n} d\sigma \\
 &\leq \left(\frac{R^2 - \|\mathbf{x}\|^2}{R\omega_n} \int_{\|\mathbf{y}\|=R} \frac{d\sigma}{\|\mathbf{y} - \mathbf{x}\|^n} \right) \|\tilde{u}_0 - u_0\|_\infty
 \end{aligned}$$

Nun hat die Randwertaufgabe $\Delta u = 0$ (für $\|\mathbf{x}\| < R$) und $u(\mathbf{x}) = 1$ (für $\|\mathbf{x}\| = R$), die Lösung $u = 1$. Die Poissonsche Integralformel besagt hierfür

$$1 = \frac{R^2 - \|\mathbf{x}\|^2}{R\omega_n} \int_{\|\mathbf{y}\|=R} \frac{d\sigma}{\|\mathbf{y} - \mathbf{x}\|^n}$$

Setzt man dies in die obige Abschätzung ein, so folgt die Behauptung des Satzes. □

Satz (4.23) (Glattheit)

Jede harmonische Funktion (Lösung der Laplace-Gleichung) auf einem Gebiet $D \subset \mathbb{R}^n$, $n = 2, 3$, ist dort eine C^∞ -Funktion.

Beweis: Für $\mathbf{x}_0 \in D$ und $R > 0$ mit $\overline{K}_R(\mathbf{x}_0) \subset D$ gilt die Poissonsche Integralformel

$$u(\mathbf{x}) = \frac{R^2 - \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|^2}{R\omega_n} \oint_{\|\mathbf{y} - \mathbf{x}_0\|=R} \frac{u(\mathbf{y})}{\|\mathbf{y} - \mathbf{x}\|^n} d\sigma.$$

Die rechte Seite ist aber offensichtlich im Bereich $\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| < R$ beliebig oft nach den x_1, \dots, x_n differenzierbar. \square

Satz (4.24) (Maximum-Minimum Prinzip)

Ist u auf einem beschränkten Gebiet $D \subset \mathbb{C}$ harmonisch und auf \overline{D} stetig, so liegen die Maxima und Minima von u auf \overline{D} (auch) auf dem Rand ∂D .

Beweis: Da \bar{D} kompakt ist, nimmt die stetige Funktion u dort ein Maximum an. Ist u konstant, so wird das Maximum (auch) auf dem Rand ∂D angenommen. Sei u nun nicht konstant und sei $q \in \bar{D}$ mit

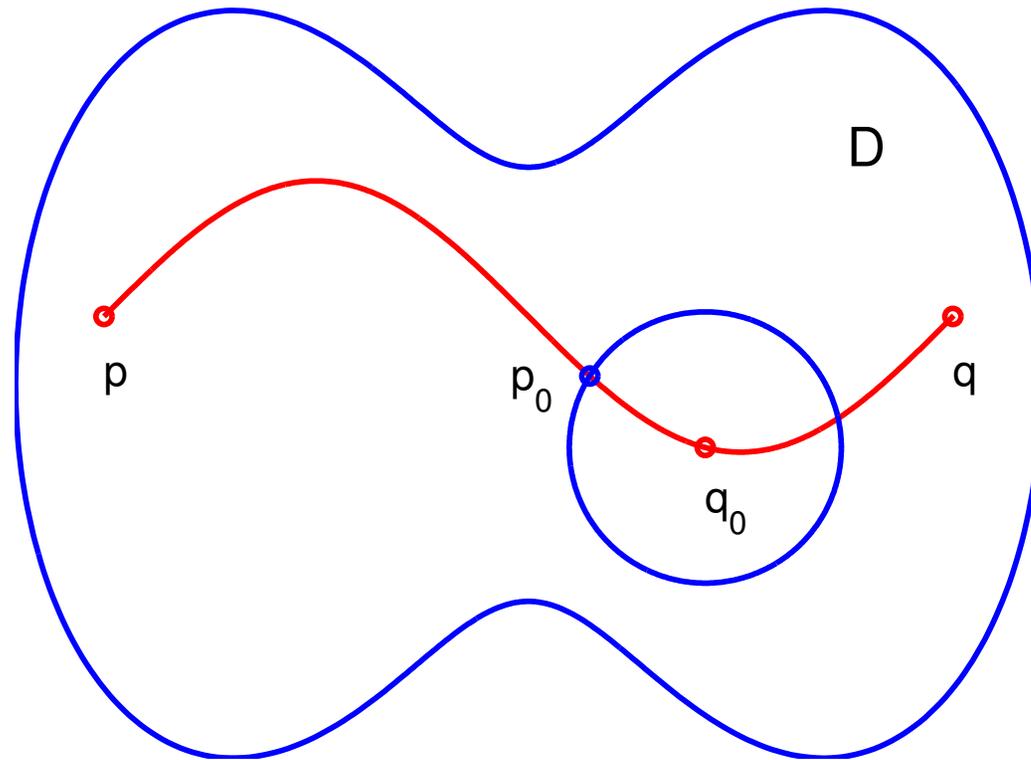
$$u(q) = \max\{u(\mathbf{x}) : \mathbf{x} \in \bar{D}\} =: M.$$

Wir führen den Beweis indirekt und nehmen dazu an, dass q nicht auf dem Rand ∂D liegt, also $q \in D$. Da u nicht konstant ist, gibt es einen zweiten Punkt $p \in D$ mit $u(p) < M$. Wir verbinden p und q nun durch eine C^1 -Kurve

$$c : [0, 1] \rightarrow D, \quad c(0) = p, \quad c(1) = q.$$

Längs der Kurve c ist dann $u(c(0)) < M$, $u(c(1)) = M$ und $u(c(t)) \leq M$, für alle $0 < t < 1$. Sei $t_0 \in]0, 1]$ nun der kleinste t -Wert mit $u(c(t_0)) = M$ und sei weiter $q_0 := c(t_0)$.

Ist $r > 0$ nun hinreichend klein, so dass $\overline{K}_r(\mathbf{q}_0) \subset D$ und $\mathbf{p} \notin K_r(\mathbf{q}_0)$, so gibt es einen Punkt $\mathbf{p}_0 \in D$ mit $\|\mathbf{p}_0 - \mathbf{q}_0\| = r$ und $u(\mathbf{p}_0) < M$.



Aus der Mittelwerteigenschaft (4.21) folgt nun

$$u(\mathbf{q}_0) = \frac{1}{R^{n-1}\omega_n} \oint_{\|\mathbf{y}-\mathbf{q}_0\|=r} u(\mathbf{y}) \, d\sigma.$$

Wegen $u(\mathbf{y}) \leq M$ und $u(\mathbf{p}_0) < M$ ergibt sich aber

$$M = u(\mathbf{q}_0) < \frac{1}{R^{n-1}\omega_n} \oint_{\|\mathbf{y}-\mathbf{q}_0\|=r} M \, d\sigma = M.$$

Widerspruch!

□

Bemerkung:

Ist u auf einem beschränkten Gebiet $D \subset \mathbb{C}$ harmonisch, auf \overline{D} stetig und nicht konstant, so werden Maximum und Minimum von u *nicht im Innern* angenommen.

Folgerung (4.25)

Die Dirichletsche RWA für die Poisson-Gleichung

$$\Delta u(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) \quad (\mathbf{x} \in D), \quad u(\mathbf{x}) = u_0(\mathbf{x}) \quad (\mathbf{x} \in \partial D),$$

besitzt höchstens eine auf \overline{D} stetige Lösung.

Beweis:

Sind u_1 und u_2 Lösungen der obigen Randwertaufgabe, so ist $v(\mathbf{x}) := u_2(\mathbf{x}) - u_1(\mathbf{x})$ eine harmonische Funktion mit $v(\mathbf{x}) = 0$ für $\mathbf{x} \in \partial D$. Nach dem Maximum-Minimum Prinzip muss daher v auf \overline{D} identisch verschwinden, also $u_1 = u_2$ sein. □

Pierre-Simon Marquis de Laplace (1749 - 1827); Paris

Siméon-Denis Poisson (1781 - 1840); Paris