

5. Die eindimensionale Wellengleichung

Wir suchen Lösungen $u(x, t)$ der eindimensionalen Wellengleichung

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t \geq 0, \quad (5.1)$$

wobei die Wellengeschwindigkeit $c > 0$ vorgegeben ist.

Mit der Transformation $\xi := x - ct$, $\eta := x + ct$ gilt

$$u_t = -cu_\xi + cu_\eta$$

$$u_x = u_\xi + u_\eta$$

$$u_{tt} = c^2 u_{\xi\xi} - 2c^2 u_{\xi\eta} + c^2 u_{\eta\eta}$$

$$u_{xx} = u_{\xi\xi} + 2u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta}.$$

Damit transformiert sich die Wellengleichung in

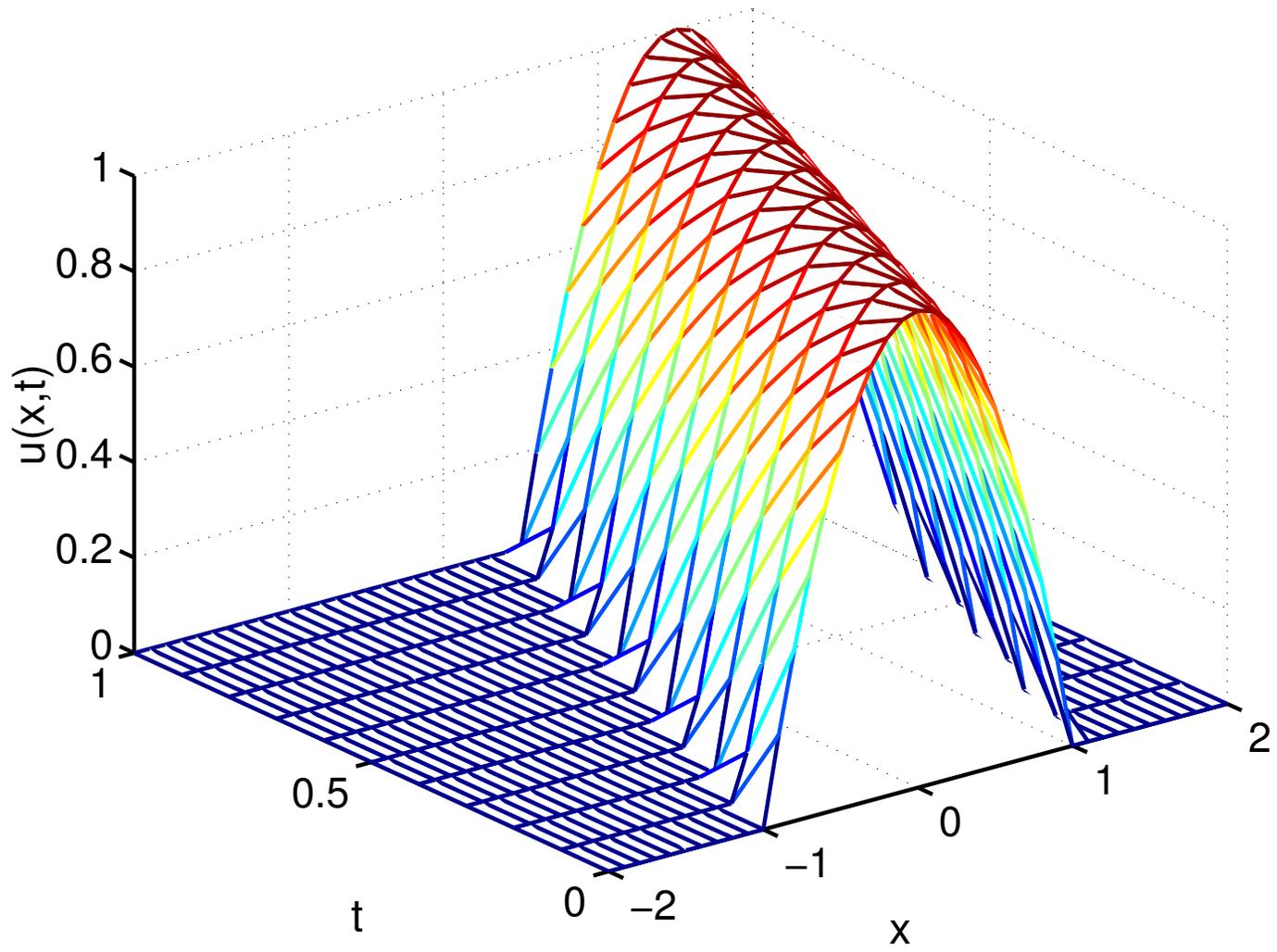
$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = -4c^2 u_{\xi\eta} = 0, \quad \text{also} \quad u_{\xi\eta} = 0.$$

Zweimalige Integration ergibt $u(\xi, \eta) = \Phi(\xi) + \Psi(\eta)$ mit C^2 -Funktionen $\Phi, \Psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Die Rücktransformation liefert schließlich die folgende **allgemeine Lösung der 1-dim. Wellengleichung**

$$u(x, t) = \Phi(x - ct) + \Psi(x + ct). \quad (5.2)$$

$\Phi(x - ct)$ beschreibt eine nach rechts laufende Welle, genauer: der Graph der Anfangsfunktion $\Phi(x)$ (für $t = 0$) wird mit der Geschwindigkeit c nach rechts verschoben. Längst der Charakteristiken $x - ct = \text{const.}$ ist dieser Lösungsteil konstant. Analog beschreibt $\Psi(x + ct)$ eine nach links laufende Welle.

Die allgemeine Lösung ist eine Überlagerung (*Superposition*) dieser beiden Wellen.



A. Anfangswertaufgabe. Wir schreiben den Anfangszustand $u(x,0)$ und die Anfangsgeschwindigkeit $u_t(x,0)$ auf einem bestimmten Intervall $[a,b]$ vor, d.h. wir suchen eine Lösung der Anfangswertaufgabe

$$\begin{aligned} u_{tt} - c^2 u_{xx} &= 0, & x \in [a,b], & t \in \mathbb{R}, \\ u(x,0) &= u_0(x), & u_t(x,0) &= v_0(x), & x \in [a,b]. \end{aligned} \quad (5.3)$$

Setzt man die allgemeine Lösung (5.2) der Wellengleichung in die Anfangsbedingungen ein, so lassen sich die Funktionen Φ und Ψ durch u_0 und v_0 ausdrücken und man erhält die folgende

Lösungsdarstellung nach d'Alembert (5.4)

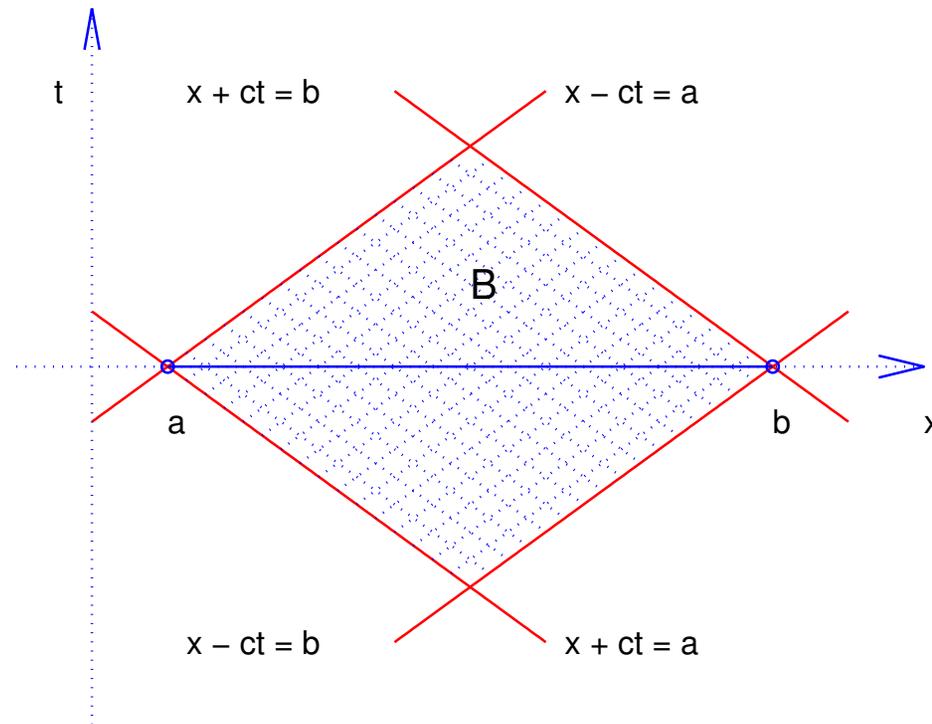
$$u(x,t) = \frac{1}{2} \{u_0(x-ct) + u_0(x+ct)\} + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} v_0(\xi) d\xi,$$

benannt nach Jean Baptiste d'Alembert (1717 – 1783).

Die d'Alembertsche Formel (5.4) lässt sich nur für $x \pm ct \in [a, b]$ auswerten. Die Lösung der AWA ist im **Bestimmtheitsbereich**

$$B := \{(x, t) : x \pm ct \in [a, b]\} \quad (5.5)$$

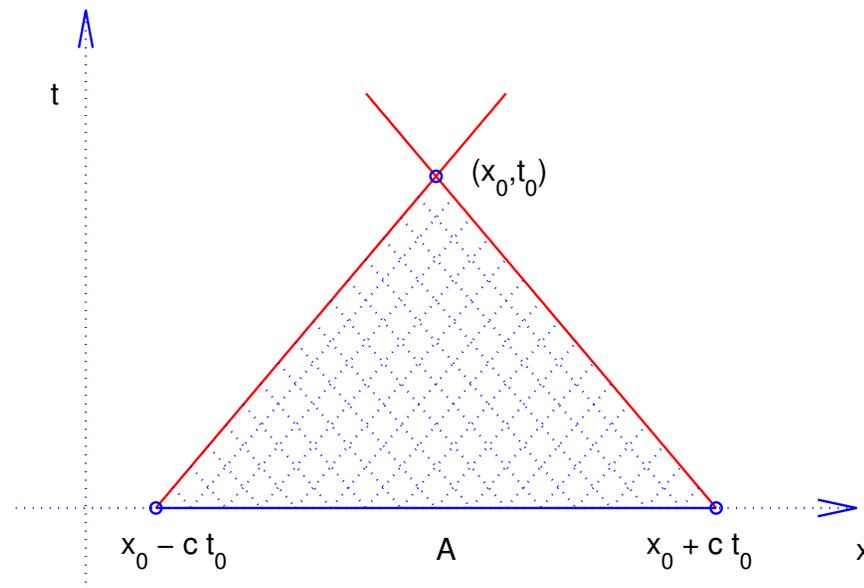
durch die Anfangsdaten eindeutig festgelegt. Man kann zwar die Lösung über B hinaus fortsetzen, dies aber nicht mehr eindeutig.



Umgekehrt hängt die Lösung der Wellengleichung in einem bestimmten Punkt (x_0, t_0) nur von den Anfangsdaten $u_0(x)$, $v_0(x)$ in dem Intervall

$$A(x_0, t_0) := [x_0 - ct_0, x_0 + ct_0] \quad (5.6)$$

ab. A heißt der **Abhängigkeitsbereich** der Lösung in (x_0, t_0) .



Störungen in den Anfangsdaten pflanzen sich längs der Charakteristiken $x \pm ct = \text{const.}$ fort.

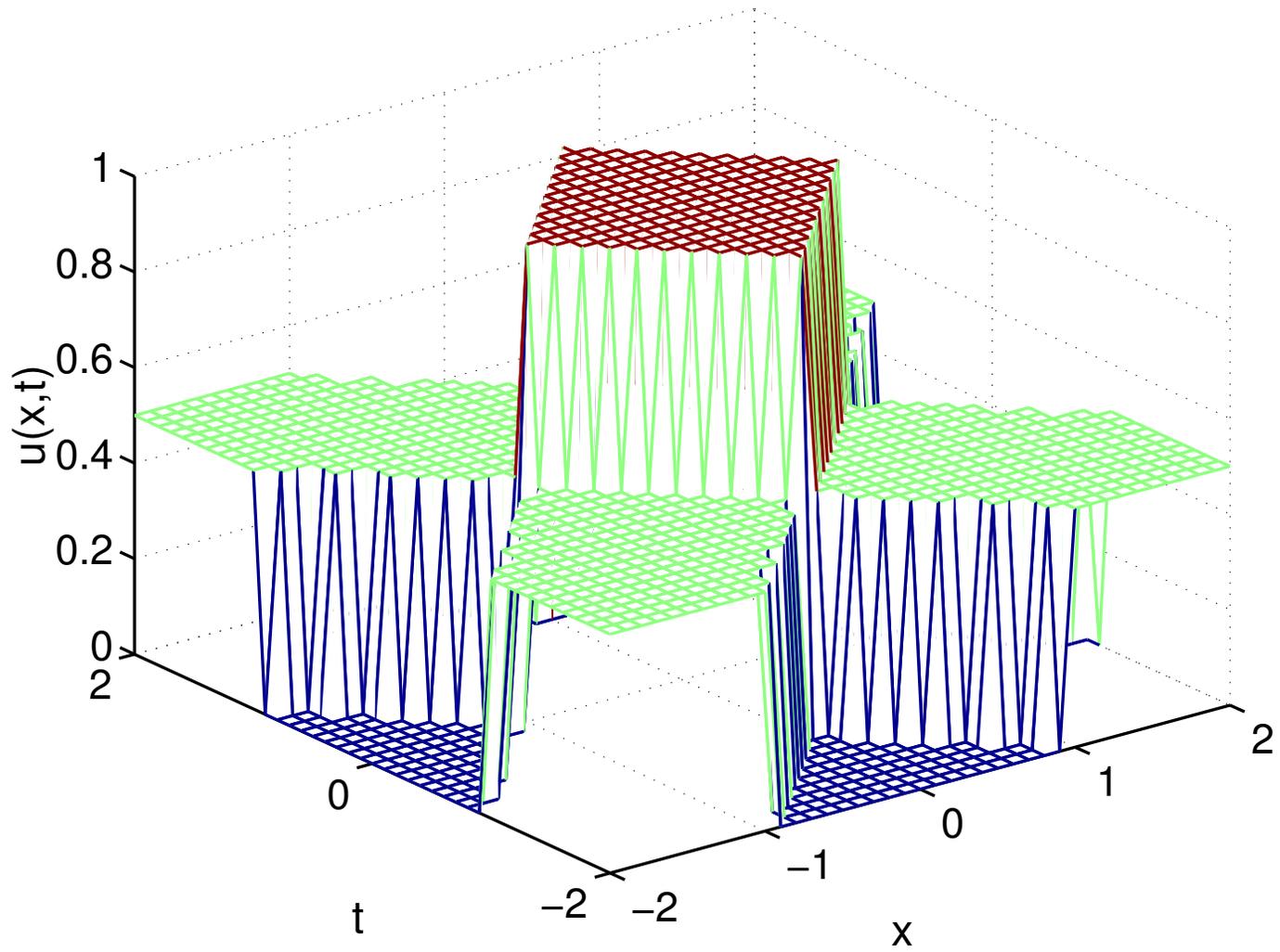
Beispiel (5.7) $u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0,$

$$u(x, 0) = u_0(x) = \begin{cases} 1, & -1 \leq x \leq 1 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}, \quad u_t(x, 0) = 0$$

Aus der d'Alembertschen Lösungsformel erhalten wir für die Lösung:

$$u(x, t) = \frac{1}{2} \{u_0(x - ct) + u_0(x + ct)\}.$$

Die Störungen wirken sich also nicht nur lokal auf das Lösungsverhalten aus, sondern sie strahlen längs der Charakteristiken aus. Allerdings bleiben die Störungen beschränkt.



B. Stabilität. Die Frage, wie sich die Lösung der AWA (5.3) bei Störung der Anfangsdaten u_0 und v_0 ändert, lässt sich direkt mit Hilfe der d'Alembertschen Formel (5.4) beantworten.

Ist u die Lösung von (5.3) und \tilde{u} die Lösung zu gestörten Anfangsfunktionen \tilde{u}_0 und \tilde{v}_0 , so gilt nach d'Alembert

$$\begin{aligned} \tilde{u}(x, t) - u(x, t) &= \frac{1}{2} \{ \tilde{u}_0(x - ct) - u_0(x - ct) \} \\ &+ \frac{1}{2} \{ \tilde{u}_0(x + ct) - u_0(x + ct) \} \\ &+ \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} (\tilde{v}_0(\xi) - v_0(\xi)) d\xi \end{aligned}$$

Betragsmäßige Abschätzung mit Hilfe der Maximumsnorm liefert

$$|\tilde{u}(x, t) - u(x, t)| \leq \|\tilde{u}_0 - u_0\|_\infty + \frac{b-a}{2c} \|\tilde{v}_0 - v_0\|_\infty. \quad (5.8)$$

Konvergieren \tilde{u}_0 gegen u_0 und \tilde{v}_0 gegen v_0 (bzgl. $\|\cdot\|_\infty$), so folgt aus obiger Abschätzung, dass auch die Lösung \tilde{u} der gestörten AWA gegen u konvergiert (bzgl. der Norm $\|\cdot\|_\infty$ auf B). Mit anderen Worten: Die Lösung der AWA hängt stetig von den Anfangsfunktionen ab.

Insgesamt ist damit die **Existenz, Eindeutigkeit und Stabilität** der AWA (5.3) gezeigt. **Die AWA (5.3) ist also sachgemäß gestellt!**

C. Charakteristische Anfangswertaufgabe. Schreibt man Anfangswerte längs einer Charakteristik $x - ct = d = \text{const.}$ vor, fordert man also beispielsweise für eine Lösung der Wellengleichung $u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0$

$$u(x, (x - d)/c) = u_0(x), \quad u_t(x, (x - d)/c) = v_0(x),$$

so liefert die Lösungsdarstellung (5.2)

$$\Phi(d) + \Psi(2x - d) = u_0(x), \quad -c\Phi'(d) + c\Psi'(2x - d) = v_0(x).$$

Auflösung nach den Ψ -Termen ergibt

$$\Psi(2x - d) = u_0(x) - \Phi(d), \quad \Psi'(2x - d) = v_0(x)/c + \Phi'(d).$$

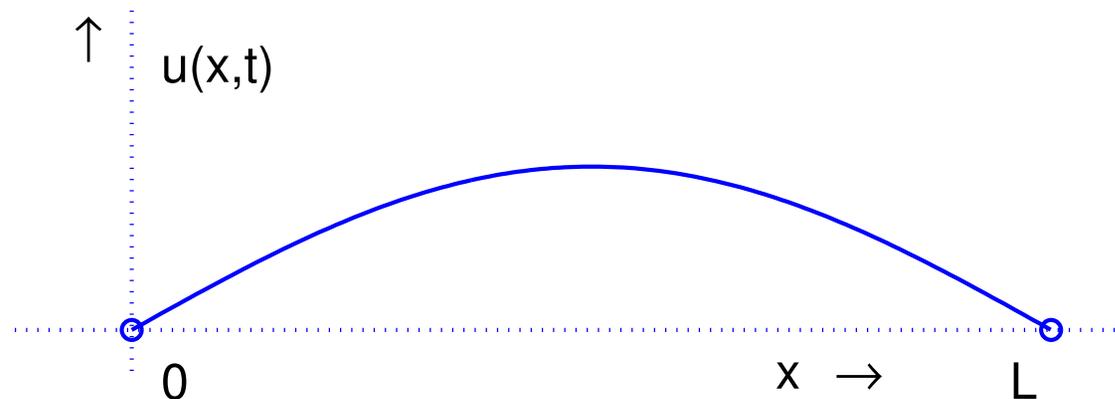
Man erkennt, dass die Anfangsfunktionen u_0 und v_0 nicht mehr beliebig vorgegeben werden können. Die obigen Gleichungen haben in der Regel keine Lösung Φ und Ψ . Und selbst wenn dies aufgrund geeigneter Vorgaben für u_0 und v_0 doch der Fall ist, so ist die Lösung dann nicht eindeutig bestimmt.

Folgerung: Die charakteristische AWA ist nicht sachgemäß gestellt!

D. Cauchysche Anfangswertaufgabe. Dies ist eine natürliche Verallgemeinerung der klassischen AWA (5.3). Es werden die Anfangsdaten u und die Normalableitung $\partial u / \partial n$ längs einer **nicht-charakteristischen** Kurve $c(s) = (x(s), t(s))^T$ vorgeschrieben.

Auch für diese Aufgabenstellung lässt sich (lokale) Existenz, Eindeutigkeit und Stabilität zeigen. Die Cauchysche Anfangswertaufgabe ist also sachgemäß gestellt.

E. Anfangs–Randwertaufgabe (ARWA). Wir kommen zurück zum Schwingungsverhalten einer eingespannten Saite.



Die zugehörige ARWA lautet

$$\begin{aligned}u_{tt}(x, t) &= c^2 u_{xx}(x, t), \quad c > 0, \\u(x, 0) &= u_0(x), \quad u_t(x, 0) = v_0(x), \quad 0 \leq x \leq L \quad (5.9) \\u(0, t) &= u(L, t) = 0, \quad t \geq 0.\end{aligned}$$

Dabei sind u_0 und v_0 beliebige Anfangsfunktionen, $u_0 \in C^2$, $v_0 \in C^1$, die zudem die **Kompatibilitätsbedingung** $u_0(0) = u_0(L) = 0$ erfüllen müssen. Wir beschreiben zwei Lösungswege.

E1. Lösungsweg nach d'Alembert. (i) Der Einfachheit halber betrachten wir die ARWA (5.9) zunächst für $v_0(x) = 0$. Nach d'Alembert haben wir dann die Lösungsdarstellung, vgl. (4.4),

$$u(x, t) = 0.5 (u_0(x - ct) + u_0(x + ct)), \quad (5.10)$$

die allerdings nur im Bestimmtheitsbereich B gilt; vgl. (5.5).

Wir fragen, wie wir die Anfangsfunktion u_0 fortsetzen müssen, damit die obige Lösungsdarstellung im ganzen Bereich $[0, L] \times \mathbb{R}_+$ gilt.

Dazu setzen wir (5.10) in die Randbedingungen ein:

$$u(0, t) = 0.5 (u_0(-ct) + u_0(ct)) = 0 \quad \Rightarrow \quad u_0 \text{ ungerade!}$$

$$\begin{aligned} u(L, t) &= 0.5 (u_0(L - ct) + u_0(L + ct)) \\ &= 0.5 (-u_0(-L + ct) + u_0(L + ct)) \\ &= 0.5 (-u_0(-L + ct) + u_0(2L + (-L + ct))) = 0 \\ &\Rightarrow u_0 \text{ muss } 2L\text{-periodisch sein!} \end{aligned}$$

Ergebnis: Durch (5.10) ist die (eindeutig bestimmte) Lösung der ARWA (5.9) mit $v_0 = 0$ gegeben, wenn die Anfangsfunktion u_0 auf \mathbb{R} ungerade und $2L$ -periodisch fortgesetzt wird.

(ii) Wir gehen genauso für den Fall $u_0(x) = 0$ und beliebigem v_0 vor. Nach d'Alembert gilt die Lösungsdarstellung

$$u(x, t) = \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} v_0(\xi) d\xi = \frac{1}{2c} (V_0(x + ct) - V_0(x - ct)), \quad (5.11)$$

wobei V_0 eine (beliebige) Stammfunktion von v_0 ist. Wir fragen wieder, wie V_0 fortzusetzen ist, damit durch (5.11) eine Lösung der ARWA gegeben ist. Eine analoge Rechnung zeigt: V_0 muss gerade und $2L$ -periodisch fortgesetzt werde.

Für die Ableitung v_0 bedeutet dies: v_0 ist ungerade und $2L$ -periodisch fortzusetzen.

(iii) Der allgemeine Fall einer ARWA mit $u_0 \neq 0$ und $v_0 \neq 0$ lässt sich nun aus den Lösungen von (i) und (ii) durch **Superposition** zusammensetzen. Wir fassen das Ergebnis im folgenden Satz zusammen.

Satz (5.12)

Die eindeutig bestimmte Lösung der Anfangs-Randwertaufgabe (5.9) ist gegeben durch die d'Alembertsche Formel

$$u(x, t) = \frac{1}{2} \{u_0(x - ct) + u_0(x + ct)\} + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} v_0(\xi) d\xi,$$

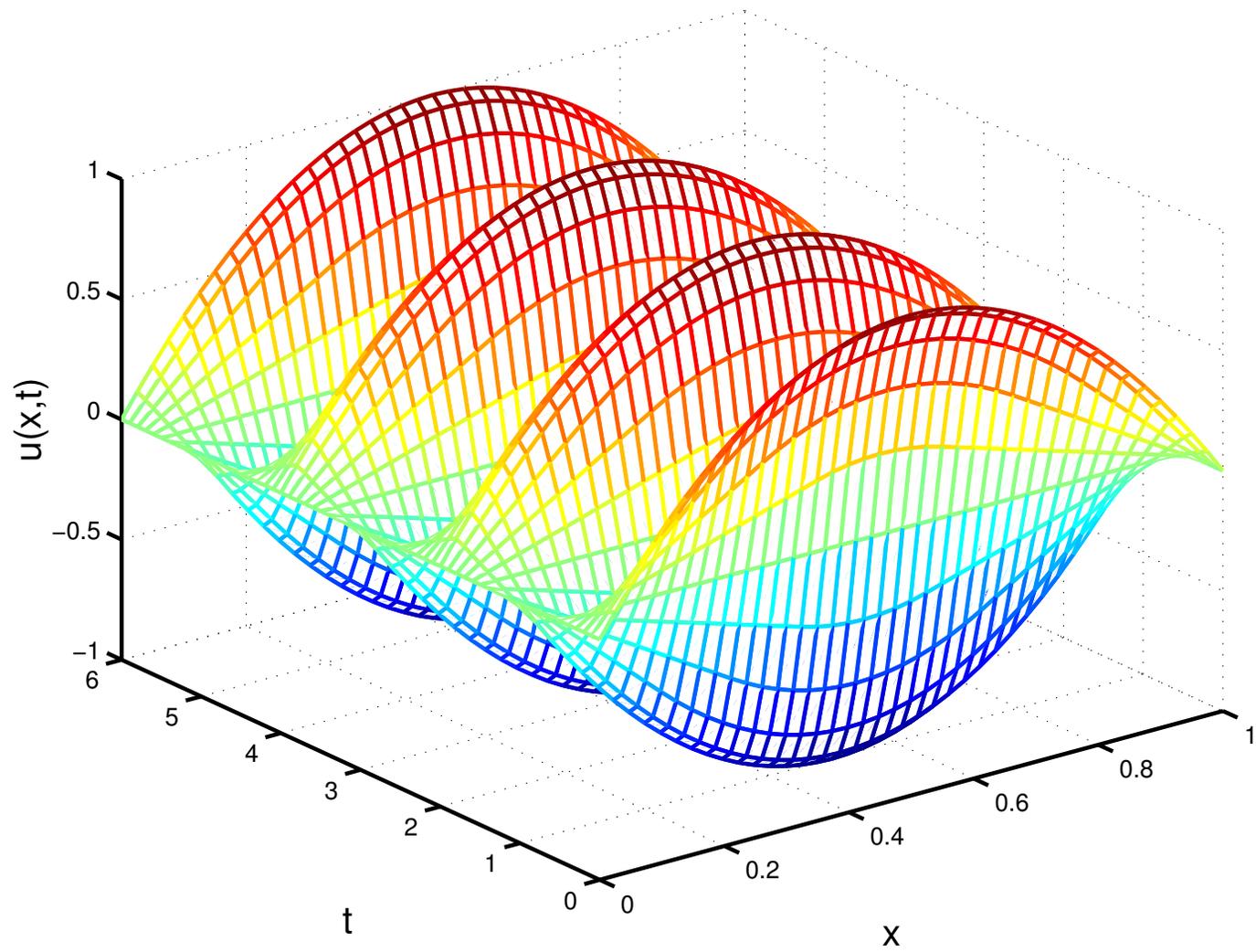
wobei u_0 und v_0 ungerade und $2L$ -periodisch auf \mathbb{R} vorge setzt werden.

Beispiel (5.13) Die Lösung der folgende ARWA lässt sich mit Hilfe der d'Alembertschen Formel darstellen. Wir zeichnen die Lösung im Bereich $0 \leq t \leq 6$, wobei wir die entsprechenden Fortsetzungen für u_0 und v_0 verwenden:

$$u_{tt}(x, t) = u_{xx}(x, t),$$

$$u(x, 0) = 4x(1 - x), \quad u_t(x, 0) = 0, \quad 0 \leq x \leq 1,$$

$$u(0, t) = u(L, t) = 0, \quad t \geq 0.$$



Darstellung mittels Fourier-Reihen. Man setzt für die ungerade und $2L$ -periodisch fortgesetzten Anfangsfunktionen u_0 und v_0 die zugehörigen Fourier-Reihen ein. Aufgrund der Differenzierbarkeitsvoraussetzungen ist die absolute und lokal gleichmäßige Konvergenz gesichert. Nach Analysis II gilt

$$\begin{aligned} u_0(x) &= \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin(k\omega x), & a_k &= \frac{2}{L} \int_0^L u_0(\xi) \sin(k\omega \xi) d\xi \\ v_0(x) &= \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin(k\omega x), & b_k &= \frac{2}{L} \int_0^L v_0(\xi) \sin(k\omega \xi) d\xi \end{aligned} \tag{5.14}$$

mit $\omega := \pi/L$. Setzt man (5.14) in die d'Alembertsche Formel (5.12) ein, so folgt

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin(k\omega x) \cos(k\omega ct) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{b_k}{k\omega c} \sin(k\omega x) \sin(k\omega ct). \tag{5.15}$$

Die Darstellung (5.15) stellt die Lösung $u(x, t)$ als Überlagerung von Grundschwingung ($k = 1$) und Oberschwingungen ($k > 1$) dar.

E2. Lösungsweg nach Fourier. (i) Wir berechnen partiikuläre Lösungen der Wellengleichung mittels Separationsansatz $u(x, t) = X(x)T(t)$. Einsetzen in die PDG liefert

$$X(x)T''(t) - c^2 X''(x)T(t) = 0,$$

und damit für $u(x, t) \neq 0$:

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{T''(t)}{c^2 T(t)} = \lambda = \text{const.}$$

Wir erhalten also zwei gewöhnliche DGLen $X''(x) - \lambda X(x) = 0$ und $T''(t) - \lambda c^2 T(t) = 0$.

(ii) Anpassung an die Randbedingungen liefert die Eigenwertaufgabe $X'' - \lambda X = 0$, $X(0) = X(L) = 0$.

Lösungen: $X_k(x) = C_k \sin(\omega_k x)$, $\lambda_k = -\omega_k^2$ mit

$$\omega_k := k\pi/L, \quad k \in \mathbb{N}. \quad (5.16)$$

Für den Zeitanteil $T(t)$ ergibt sich die allgemeine Lösung $T_k(t) = A_k \cos(c\omega_k t) + B_k \sin(c\omega_k t)$ und hieraus durch Superposition der Reihenansatz (Konstante zusammengefasst)

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} (A_k \cos(c\omega_k t) + B_k \sin(c\omega_k t)) \sin(\omega_k x). \quad (5.17)$$

Hierbei wird natürlich implizit die absolute und lokal gleichmäßige Konvergenz angenommen.

(iii) Anpassung von (5.17) an die Anfangsbedingungen liefert

$$u_0(x) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \sin(\omega_k x), \quad v_0(x) = \sum_{k=1}^{\infty} c\omega_k B_k \sin(\omega_k x).$$

und damit mittels der Fourier-Reihen-Theorie die Koeffizienten

$$A_k = \frac{2}{L} \int_0^L u_0(\xi) \sin(\omega_k \xi) d\xi, \quad B_k = \frac{2}{c \omega_k L} \int_0^L v_0(\xi) \sin(\omega_k \xi) d\xi \quad (5.18)$$

Die gefundene Lösungsdarstellung (5.17), (5.18) stimmt nun natürlich mit der früheren Darstellung (5.15) überein. Man beachte jedoch, dass wir bei dem Fourierschen Weg die Konvergenz der Reihe (5.17) im nachhinein überprüfen müssen, während diese beim d'Alembertschen Weg aufgrund der vorausgesetzten Glätte von u_0 , v_0 gesichert ist.

**Jean-Baptiste le Rond, genannt d'Alembert (1717 - 1783);
Paris**

Jean Baptiste Joseph Fourier (1768 - 1830); Paris