

5. Konforme Abbildungen

Satz (5.1) (über konforme Abbildungen)

a) Ist $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion auf einem Gebiet $D \subset \mathbb{C}$ mit $f'(z) \neq 0, \forall z \in D$, so gelten die folgenden lokalen Eigenschaften bei $z_0 \in D$:

- Der Winkel zwischen zwei sich in z_0 schneidenden Kurven bleibt bei der Transformation $w = f(z)$ erhalten. Ebenso der Umlaufsinn.
- $|f'(z_0)|$ ist die für alle von z_0 ausgehenden Richtungen gemeinsame Längenverzerrung. Insbesondere bleiben Längenverhältnisse im Kleinen erhalten.

Abbildungen mit diesen beiden Eigenschaften heißen *konforme Abbildungen*.

b) Ist $w = f(z)$ eine konforme Abbildung und als Transformation $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ stetig differenzierbar, so ist f auch komplex differenzierbar und es gilt $f'(z) \neq 0$.

Beweis: (nur zu a)) Sind c_1 und c_2 zwei C^1 -Kurven in D mit $c_1(0) = c_2(0) = z_0$ und $c_k'(0) \neq 0$, so gilt für den Winkel zwischen den Geschwindigkeitsvektoren von c_1 und c_2

$$\gamma = \sphericalangle(c_1'(0), c_2'(0)) = \arg(c_2'(0)) - \arg(c_1'(0)).$$

Für die Bildkurven $f \circ c_1$ und $f \circ c_2$ gilt dann mit (4.8) d)

$$\begin{aligned} \tilde{\gamma} &= \sphericalangle(f'(z_0) c_2'(0), f'(z_0) c_1'(0)) \\ &= \arg(f'(z_0) c_2'(0)) - \arg(f'(z_0) c_1'(0)) \\ &= \arg(f'(z_0)) + \arg(c_2'(0)) - \arg(f'(z_0)) - \arg(c_1'(0)) \\ &= \gamma, \end{aligned}$$

$$\left\| \frac{d}{dt} (f \circ \mathbf{c}_1)(0) \right\| = |f'(z_0) \mathbf{c}_1'(0)| = |f'(z_0)| \|\mathbf{c}_1'(0)\| \quad \square$$

Definition (5.2) Es sei $w = f(z)$ eine bijektive und konforme Transformation $f : D \rightarrow W$ zweier Gebiete D und W in \mathbb{C} .

Zu einer vorgegebenen C^2 -Funktion $\Phi : D \rightarrow \mathbb{R}$ setzen wir $\Psi := \Phi \circ f^{-1}$. Ψ heißt die **konforme Transformation** von Φ mittels f .

Anwendung: Gesucht ist eine **Potentialfunktion** Φ (Lösung von $\Delta\Phi = 0$) auf einem **physikalischen Bereich** D . Kennt man nun eine konforme Transformation f des physikalischen Bereichs auf einen **Modellbereich** W und eine Potentialfunktion Ψ auf W , so ist durch $\Phi := \Psi \circ f$ eine gesuchte Potentialfunktion gegeben.

$$\begin{array}{ccc}
 D & \begin{array}{c} \xrightarrow{f} \\ \xleftarrow{f^{-1}} \end{array} & W \\
 \Phi \downarrow & & \downarrow \Psi \\
 \mathbb{R} & & \mathbb{R}
 \end{array}$$

$\Phi(z)$: gesuchte Potentialfunktion, D : physikalischer Bereich, W : Modellbereich, $\Psi(w)$: bekannte Potentialfunktion

Definition (5.3) Zu einer C^1 -Funktion $\Phi : D \rightarrow \mathbb{R}$ heißt

$$\text{grad } \Phi(z) := \frac{\partial \Phi}{\partial x} + i \frac{\partial \Phi}{\partial y}$$

der **komplexe Gradient** von Φ .

Satz (5.4) Unter den obigen Voraussetzungen an Φ , Ψ und f und entsprechenden Differenzierbarkeitsvoraussetzungen gelten

a) $\text{grad } \Phi(z) = \text{grad } \Psi(w) \cdot \overline{f'(z)}, \quad w = f(z)$

b) $\Delta\Phi(z) = \Delta\Psi(w) \cdot |f'(z)|^2$

Beweis: zu a): Aus $\Phi(x, y) = \Psi(u(x, y), v(x, y))$ folgt

$$\Phi_x = \Psi_u u_x + \Psi_v v_x, \quad \Phi_y = \Psi_u u_y + \Psi_v v_y,$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \text{grad } \Phi &= (\Psi_u u_x + \Psi_v v_x) + i(\Psi_u u_y + \Psi_v v_y) \\ &= \Psi_u (u_x + iu_y) + \Psi_v (v_x + iv_y) \\ &= \Psi_u (u_x - iv_x) + i\Psi_v (u_x - iv_x) \\ &= \text{grad } \Psi(w) \cdot \overline{f'(z)}. \end{aligned}$$

zu b): Nochmalige Differentiation liefert

$$\Phi_{xx} = \Psi_{uu} u_x^2 + 2 \Psi_{uv} u_x v_x + \Psi_{vv} v_x^2 + \Psi_u u_{xx} + \Psi_v v_{xx}$$

$$\Phi_{yy} = \Psi_{uu} u_y^2 + 2 \Psi_{uv} u_y v_y + \Psi_{vv} v_y^2 + \Psi_u u_{yy} + \Psi_v v_{yy}$$

\Rightarrow

$$\begin{aligned} \Delta\Phi &= \Psi_{uu} [u_x^2 + u_y^2] + 2 \Psi_{uv} [u_x v_x + u_y v_y] + \Psi_{vv} [v_x^2 + v_y^2] \\ &\quad + \Psi_u \Delta u + \Psi_v \Delta v. \end{aligned}$$

Aufgrund der Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen gelten nun $u_x^2 + u_y^2 = v_x^2 + v_y^2 = |f'(z)|^2$, $u_x v_x + u_y v_y = 0$, sowie $\Delta u = \Delta v = 0$.

Damit folgt aus der obigen Gleichung $\Delta\Phi = \Delta\Psi |f'(z)|^2$. \square

Anwendung I: RWA für die 2-dim. Laplace-Gleichung

Zu lösen sei das Dirichlet-Randwertproblem

$$\Delta\Phi = 0, \quad z \in D, \quad \Phi(z) = \Phi_0(z), \quad z \in \partial D, \quad (5.5)$$

für ein beschränktes, einfach zusammenhängendes Gebiet $D \subset \mathbb{C}$.

Wir nehmen an, dass sich \bar{D} (einschließlich Rand) bijektiv und stetig auf $\bar{K}_1(0)$ abbilden lässt vermöge einer Transformation $f : \bar{D} \rightarrow \bar{K}_1(0)$, die auf D selbst konform ist. Mit $\Psi := \Phi \circ f^{-1}$ geht das **physikalische Problem** dann über in das **Modellproblem**

$$\Delta\Psi(w) = 0, \quad |w| < 1, \quad \Psi(w) = \Psi_0(w), \quad |w| = 1. \quad (5.6)$$

Mit der Fourierschen Methode lässt sich die Lösung des Modellproblems explizit angeben (vgl. Vorlesung Diff.gln. II).

In komplexer Schreibweise (Polarkoordinaten) gilt

$$\Psi(r e^{i\varphi}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \gamma_k r^{|k|} e^{i k \varphi}, \quad (5.7)$$

wobei die γ_k die (komplexen) Fourier-Koeffizienten der transformierten Randfunktion $\Psi_0(e^{i\varphi}) := \Phi_0(f^{-1}(e^{i\varphi}))$ sind.

Die Rücktransformation ergibt

$$\Phi(z) = \Psi(f(z)) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \gamma_k |f(z)|^{|k|} e^{i k \arg(f(z))}. \quad (5.8)$$

Anwendung II: Ebene Potentialströmung

Wir betrachten eine stationäre, wirbel- und quellenfreie, ebene Umströmung eines Zylinders (mit z -Achse als Symmetrieachse und Querschnitt $K \subset \mathbb{C}$). Bezeichnet $\mathbf{u} : \mathbb{R}^2 \setminus K \rightarrow \mathbb{R}^2$ das Geschwindigkeitsfeld der Strömung, so gelten

$$\begin{aligned}
 \text{(a)} \quad \operatorname{rot} \mathbf{u}(x, y) &= \frac{\partial u_2}{\partial x} - \frac{\partial u_1}{\partial y} = 0, \\
 \text{(b)} \quad \operatorname{div} \mathbf{u}(x, y) &= \frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial u_2}{\partial y} = 0.
 \end{aligned} \tag{5.9}$$

Wir können annehmen, dass $D := \mathbb{R}^2 \setminus K$ ein einfach zusammenhängendes Gebiet im \mathbb{R}^2 ist. Dann folgt aus (5.9) die Existenz zweier Potentiale, nämlich

$$\begin{aligned}
 \text{(a)} \quad U : D &\rightarrow \mathbb{R}, \quad \nabla U = -\mathbf{u}(x, y), \quad \text{Geschwindigkeitspotential,} \\
 \text{(b)} \quad V : D &\rightarrow \mathbb{R}, \quad \nabla V = (u_2, -u_1)^\top, \quad \text{Stromfunktion.}
 \end{aligned} \tag{5.10}$$

Die **Stromlinien** sind die Lösungen des Differentialgleichungssystems $x' = u_1$, $y' = u_2$. Damit sind die Stromlinien gegeben durch

$$V(x, y) = \text{const.} \tag{5.11}$$

Denn:
$$\frac{d}{dt}V(x(t), y(t)) = V_x x' + V_y y' = u_2 u_1 - u_1 u_2 = 0.$$

Die Stromlinien sind also die Höhenlinien der Stromfunktion V .

Definition (5.12) Die komplexe Funktion $\Phi := U + iV$ heißt das **komplexe Strömungspotential**.

Φ ist eine auf D holomorphe Funktion, da die Cauchy- Riemannschen Differentialgleichungen erfüllt sind

$$U_x - V_y = -u_1 - (-u_1) = 0, \quad U_y + V_x = -u_2 + u_2 = 0.$$

Man kann das Geschwindigkeitsfeld \mathbf{u} der Strömung auch folgendermaßen aus dem komplexen Strömungspotential zurück erhalten:

$$\mathbf{u} = u_1 + i u_2 = -\overline{\Phi'(z)}, \quad (5.13)$$

denn: $\Phi'(z) = U_x + iV_x = -u_1 + i u_2.$

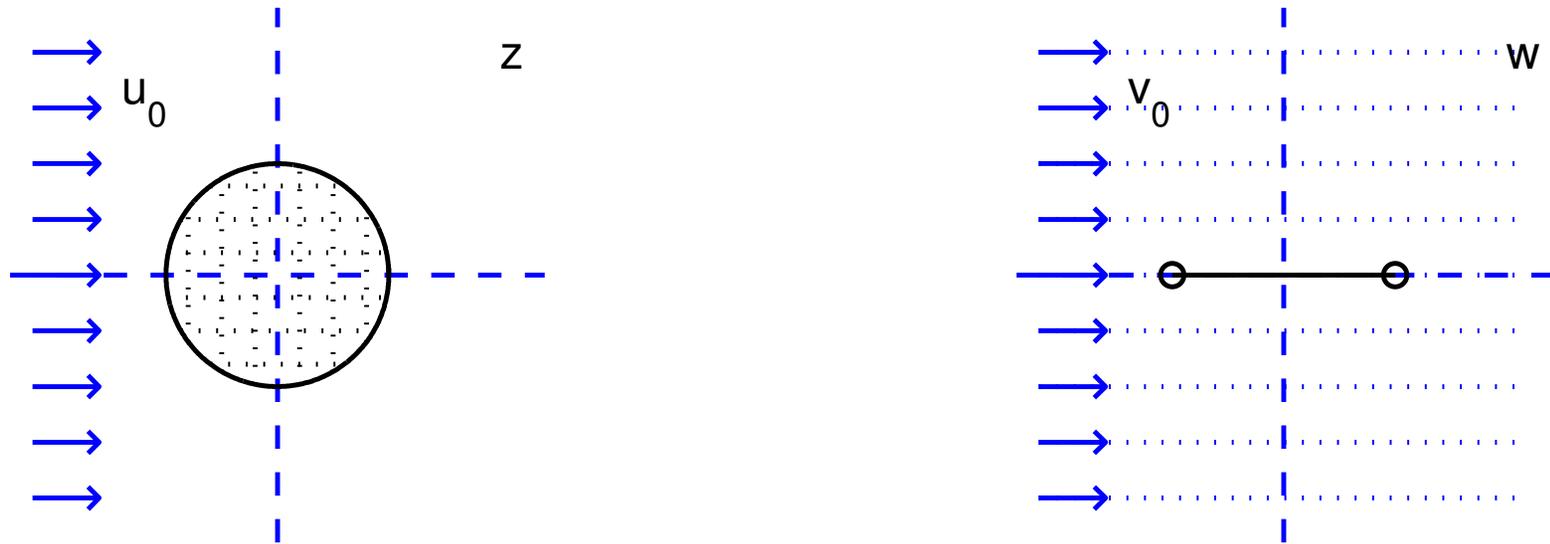
Idee zur Berechnung von Φ : Durch konforme Transformation werde $D = \mathbb{C} \setminus K$ in ein einfacheres Gebiet transformiert, für das man das komplexe Strömungspotential kennt.

Beispiel (5.14) Umströmung eines Kreiszylinders.

Wir untersuchen die ebene Umströmung eines Kreiszylinders mit der Querschnittsfläche $\overline{K}_R(0)$, $R > 0$. Das Geschwindigkeitsfeld im Unendlichen sei $\mathbf{u}(\infty) = u_0 > 0$. Als konforme Transformation wählen wir die Joukowski-Funktion, vgl. (2.8)

$$w = \xi + i\eta = f(z) = \frac{1}{2} \left(\frac{z}{R} + \frac{R}{z} \right)$$

Hierdurch wird $|z| = R$ auf die (doppelt durchlaufene) Strecke $[-1, 1]$ abgebildet und das Gebiet $D = \mathbb{C} \setminus \overline{K}_R(0)$ wird konform auf $\widetilde{D} = \mathbb{C} \setminus [-1, 1]$ transformiert. Die Strömung wird im Modellbereich also durch das Hindernis nicht beeinflusst!



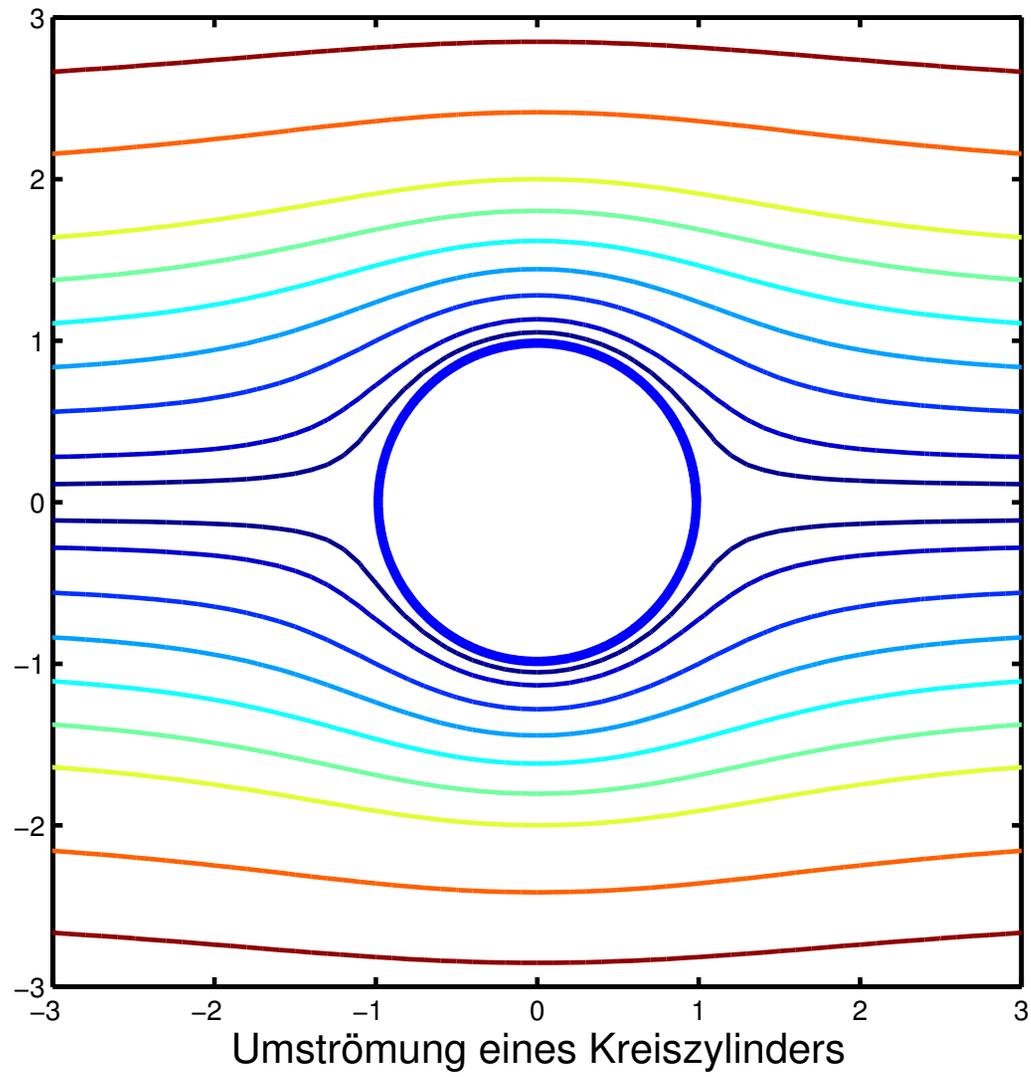
Wegen (5.10) lautet das komplexe Strömungspotential im Bildraum $\tilde{\Phi}(w) = -v_0 w$, $w \in \mathbb{C}$, wobei $v_0 > 0$ die (konstante) Strömungsgeschwindigkeit im Unendlichen ist. Die Rücktransformation ergibt das Strömungspotential des Ausgangsproblems

$$\Phi(z) = \tilde{\Phi}(f(z)) = -\frac{v_0}{2} \left(\frac{z}{R} + \frac{R}{z} \right)$$

und somit nach (5.13) $\mathbf{u}(z) = -\overline{\Phi'(z)} = \frac{v_0}{2} \left(\frac{1}{R} - \frac{R}{\bar{z}^2} \right)$.

Zu Skalierung: Für $z \rightarrow \infty$ ergibt sich $\mathbf{u}(\infty) = v_0/(2R) = u_0$ und somit $v_0 = 2Ru_0$. Insgesamt erhalten wir also

- Kompl. Strömungspotential: $\Phi(z) = -u_0 \left(z + \frac{R^2}{z} \right)$
- Geschwindigkeitspotential: $U(z) = -u_0 \left(x + \frac{R^2 x}{x^2 + y^2} \right)$
- Stromfunktion: $V(z) = -u_0 \left(y - \frac{R^2 y}{x^2 + y^2} \right)$
- Geschwindigkeitsfeld: $\mathbf{u}(z) = u_0 \left(1 - \frac{R^2}{\bar{z}^2} \right)$



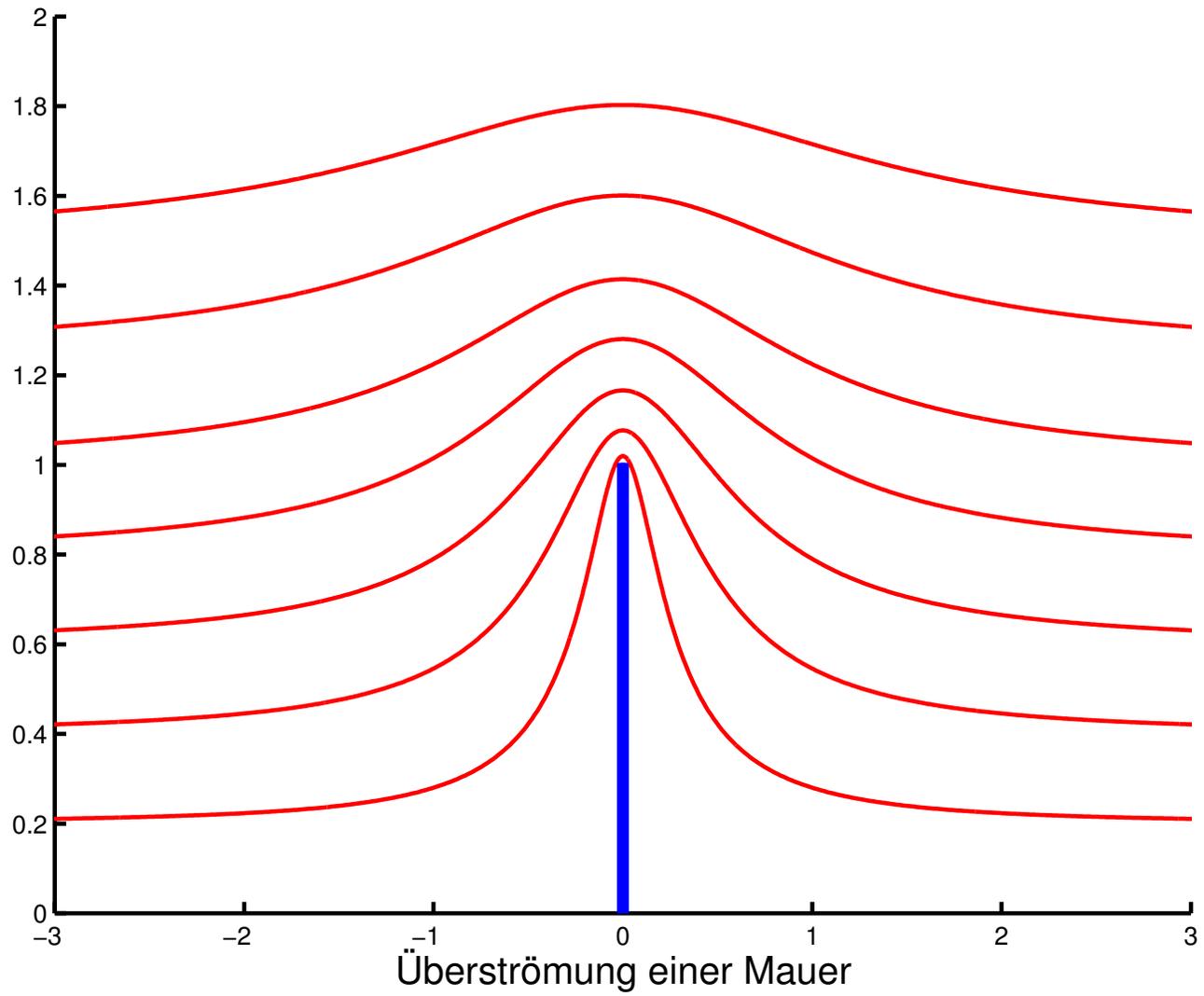
Beispiel (5.15) Überströmung einer Mauer.

Zur Berechnung der Stromlinien für die nichtturbulente Überströmung einer Mauer lässt sich die folgende konforme Gebiets-
transformation verwenden $w = f(z) = \sqrt{z^2 + 1}$. f bildet (bei
geeigneter Wahl der Wurzel) die zwischen $z = 0$ und $z = i$ ge-
schlitzte obere Halbebene

$$D = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im}(z) > 0, z \notin [0, 1]i\}$$

in die obere Halbebene $\operatorname{Im}(w) > 0$ (ohne Hindernis) ab.

Mit Hilfe der Umkehrabbildung $z = f^{-1}(w) = i\sqrt{1 - w^2}$ lassen
sich dann unmittelbar die Urbilder der Stromlinien des Modell-
problems $\operatorname{Im}(w) = \text{const.}$ zeichnen.



Anwendung III: Probleme der Elektrostatik

Zu berechnen sei die elektrische Feldstärke $\mathbf{E}(x, y)$ in einem ladungsfreien Gebiet $D \subset \mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$, wobei das Potential $U(x, y)$ mit $\mathbf{E} = -\nabla U$ am Rand des Gebietes D vorgegeben ist. Da \mathbf{E} auf D divergenzfrei ist, folgt insbesondere $\Delta U = 0$, d.h. U ist Lösung eines Dirichlet-Problems

$$\Delta U = 0, \quad z = (x, y) \in D, \quad U(z) = U_0(z), \quad z \in \partial D. \quad (5.16)$$

Nach Früherem ist U damit Realteil einer auf D holomorphen Funktion $\Phi(z) = U(z) + iV(z)$, dem so genannten **komplexen Potential**.

Wieder heißt V die **Stromfunktion**, $U(x, y) = \text{const.}$ beschreibt die **Äquipotentiallinien**, $V(x, y) = \text{const.}$ die **Feldlinien**.

Ebenfalls kann man das elektrische Feld wieder direkt aus dem komplexen Potential gewinnen vermöge

$$\mathbf{E} = -(U_x + iU_y) = -(U_x - iV_x) = -\overline{\Phi'(z)}. \quad (5.17)$$

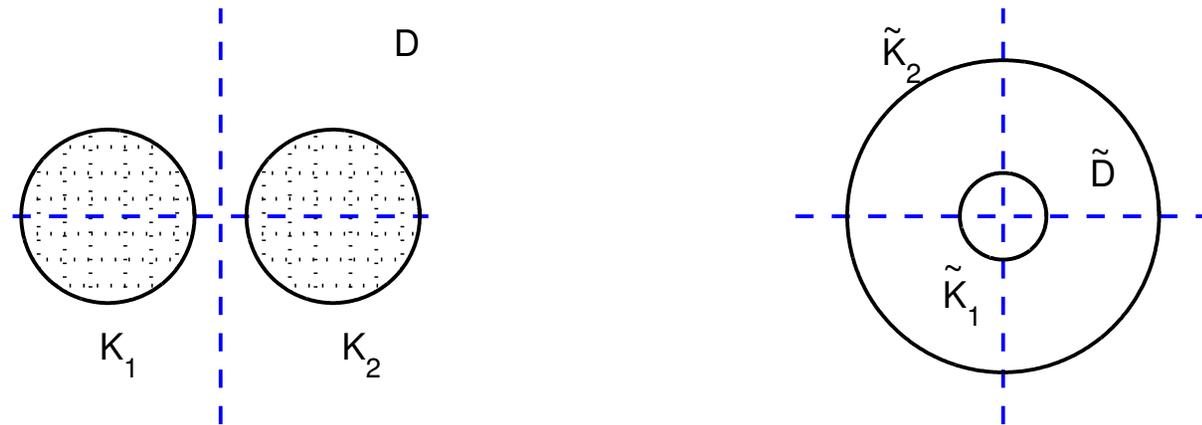
Die Grundidee lässt sich übertragen: Man transformiere das Gebiet D vermöge einer konformen Abbildung (bijektiv) in ein einfacheres Gebiet \tilde{D} und löse das Modellproblem

$$\Delta \tilde{U}(w) = 0, \quad w \in \tilde{D}, \quad \tilde{U}(w) = \tilde{U}_0(w), \quad w \in \partial \tilde{D}.$$

Dabei ist $\tilde{U}_0 := U_0 \circ f^{-1}$ die transformierte Randfunktion.

Anschließend transformiere man die Lösung zurück: $U := \tilde{U} \circ f$.

Beispiel (5.18) Wir bestimmen die Feldlinien in Außenraum von zwei stromdurchflossenen Leitern mit Querschnitten K_1 und K_2 .



Sind a, b mit $0 < a < b$ bzw. $-a$ und $-b$ die Schnittpunkte der Querschnittskreise mit der x -Achse, so wird durch

$$w = f(z) = \frac{p + z}{p - z}, \quad p := \sqrt{ab},$$

eine Möbius-Transformation beschrieben, die D konform auf den Kreisring $\tilde{D} := \{w : 1/\rho < |w| < \rho\}$, $\rho := (\sqrt{a} + \sqrt{b})/(\sqrt{b} - \sqrt{a})$, abbildet, vgl. Beispiel (3.12).

Nehmen wir an, dass die Randfunktionen im physikalischen Problem konstant sind

$$U(z) = -U_0, \quad z \in K_1, \quad U(z) = U_0, \quad z \in K_2,$$

so erhalten wir das folgende Modellproblem

$$\begin{aligned} \Delta \tilde{U} &= 0, \quad w \in \tilde{D}, \\ \tilde{U}(w) &= -U_0, \quad w \in \tilde{K}_1, \quad \tilde{U}(w) = U_0, \quad w \in \tilde{K}_2. \end{aligned}$$

Aufgrund der Ursprungssymmetrie des Modellproblems kann man annehmen, dass $\tilde{U} = \tilde{U}(r)$ nur vom Abstand r zum Ursprung abhängt. Damit erhalten wir eine gewöhnliche Randwertaufgabe

$$\begin{aligned} \tilde{U}''(r) + \frac{1}{r} \tilde{U}'(r) &= 0, \\ \tilde{U}(1/\rho) &= -U_0, \quad \tilde{U}(\rho) = U_0. \end{aligned}$$

Die Lösung lautet $\tilde{U}(r) = \frac{U_0}{\ln \rho} \ln r, \quad 1/\rho \leq r \leq \rho.$

Die Rücktransformation ergibt schließlich

$$U(z) = \frac{U_0}{\ln \rho} \ln |f(z)|, \quad f(z) = \frac{p+z}{p-z},$$
$$p = \sqrt{ab}, \quad \rho = \frac{\sqrt{a} + \sqrt{b}}{\sqrt{b} - \sqrt{a}}.$$

Zur Darstellung die Feldlinien genügt es, die Feldlinien des Modellproblems $w = r e^{i\phi}$, $1/\rho \leq r \leq \rho$, vermöge $z = f^{-1}(w)$ zurück zu transformieren.

