6. Komplexe Integration

Bisher haben wir u.a. die folgenden Integrale kennengelernt

A. Reelles Riemann-Integral einer reellen Veränderlichen:

$$\int_a^b f(t)\,dt \;=\; \lim_{\|Z\|\to 0} \sum_{i=0}^{n-1} f(\tau_i)(t_{i+1}-t_i) \tag{6.1}$$

Für vektorwertige Funktionen wird das obige Integral komponentenweise berechnet, somit haben wir die Definition:

Eine Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ ist *(Riemann) integrierbar*, falls $\mathrm{Re}\, f$ und $\mathrm{Im}\, f$ integrierbar sind und es gilt

$$\int_a^b f(t)\,dt \;:=\; \int_a^b \mathrm{Re}\,(f(t))\,dt \;+\; i \int_a^b \mathrm{Im}\,(f(t))\,dt. \tag{6.2}$$

Eigenschaften (6.3)

- $\int\limits_a^b \alpha\, f(t)\, dt \;=\; \alpha \int\limits_a^b f(t)\, dt, \quad \alpha \in \mathbb{C},$

- $\int\limits_a^b f_1(t) \,+\, f_2(t)\, dt \;=\; \int\limits_a^b f_1(t)\, dt \;+\; \int\limits_a^b f_2(t)\, dt,$

- $\int\limits_a^b f(t)\, dt \;=\; \int\limits_a^c f(t)\, dt \;+\; \int\limits_c^b f(t)\, dt,$

- $\int\limits_a^b f(t)\, dt \;=\; -\int\limits_b^a f(t)\, dt,$

- $\left| \int\limits_a^b f(t)\, dt \right| \;\leq\; \int\limits_a^b |f(t)|\, dt.$

Beweis der letzten Eigenschaft: Man stelle das Integral in Polarkoordinaten dar: $\int_a^b f(t)dt = R\,\mathrm{e}^{i\,\phi}$. Damit gilt

$$\begin{aligned}
\Big| \int\limits_a^b f(t)\,dt \Big| &= R = \mathrm{e}^{-i\,\phi} \int\limits_a^b f(t)\,dt \\
&= \int\limits_a^b \mathrm{e}^{-i\,\phi} f(t)\,dt = \int\limits_a^b \mathrm{Re}\,(\mathrm{e}^{-i\,\phi} f(t))\,dt \\
&\leq \int\limits_a^b |\mathrm{e}^{-i\,\phi} f(t)|\,dt = \int\limits_a^b |f(t)|\,dt.
\end{aligned}$$

$\square$

B. Kurvenintegrale:

Ist $\mathbf{c} : [a,b] \to D \subset \mathbb{R}^n$ ein stetiger, stückweiser C^1-Weg, $f : D \to \mathbb{R}$ bzw. $\mathbf{F} : D \to \mathbb{R}^n$ stetig, so wurde definiert

$$\int_{\mathbf{c}} f(\mathbf{x})\,ds \;:=\; \int_a^b f(\mathbf{c}(t))\,\|\mathbf{c}'(t)\|\,dt,$$

$$\int_{\mathbf{c}} \mathbf{F}(\mathbf{x})\,d\mathbf{x} \;:=\; \int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{c}(t))^{\mathsf{T}}\mathbf{c}'(t)\,dt$$

In Analogie hierzu werden nun komplexe Kurvenintegrale wie folgt definiert

Definition (6.4) Ist $D \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet, $f : D \to \mathbb{C}$ stetig und $\mathbf{c} : [a,b] \to D$ ein (stetiger) stückweiser C^1-Weg, so heißt

$$\int_{\mathbf{c}} f(z)\,dz \;:=\; \int_a^b f(\mathbf{c}(t))\,\mathbf{c}'(t)\,dt \tag{6.5}$$

das *komplexe Kurvenintegral von f längs der Kurve $\mathbf{c}$*.

Man beachte, dass in der rechten Seite von (6.5) die komplexe Multiplikation steht, so dass (6.5) gemäß (6.2) auszuwerten ist.

Bei geschlossenen Wegen schreibt man auch $\oint\limits_{\mathbf{c}} f(z)\,dz$.

Beispiele (6.6)

a) $\oint\limits_{\mathbf{c}} z\,dz, \quad \mathbf{c}(t) = r\,\mathrm{e}^{i\,t}, \quad 0 \le t \le 2\,\pi.$

$$\oint\limits_{\mathbf{c}} z dz \;=\; \int_0^{2\pi} r\,\mathrm{e}^{it}\,(ri\mathrm{e}^{it})\,dt \;=\; ir^2 \int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{2it}\,dt \;=\; \frac{r^2}{2}[\mathrm{e}^{2it}]\Big|_0^{2\pi} \;=\; 0.$$

b) $\oint\limits_{\mathbf{c}} \overline{z}\,dz, \quad \mathbf{c}(t) = r\,\mathrm{e}^{i\,t}, \quad 0 \le t \le 2\,\pi.$

$$\oint\limits_{\mathbf{c}} \overline{z} dz \;=\; \int_0^{2\pi} r\,\mathrm{e}^{-it}\,(ri\mathrm{e}^{it})\,dt \;=\; ir^2 \int_0^{2\pi} dt \;=\; 2\,\pi\,i\,r^2.$$

c) $\oint\limits_{\mathbf{c}} (1/z)\,dz, \quad \mathbf{c}(t) = r\,\mathrm{e}^{i\,t}, \quad 0 \le t \le 2\,\pi.$

$$\oint\limits_{\mathbf{c}} (1/z) dz \;=\; \oint\limits_{\mathbf{c}} (\overline{z}/|z|^2) dz \;=\; (1/r^2) \oint\limits_{\mathbf{c}} \overline{z} dz \;=\; 2\,\pi\,i.$$

d) $\oint_{\mathbf{c}} (z - z_0)^n \, dz, \quad \mathbf{c}(t) = z_0 + r\, e^{i\, t}, \quad 0 \le t \le 2\,\pi.$

$$\oint_{\mathbf{c}} (z - z_0)^n dz \; = \; \int_0^{2\pi} (r\, e^{it})^n \, (rie^{it})\, dt \; = \; i\, r^{n+1} \int_0^{2\pi} e^{i(n+1)t}\, dt.$$

Damit gilt

$$\oint_{|z-z_0|=r} (z - z_0)^n dz \; = \; \begin{cases} 2\,\pi\, i, & \text{für } n = -1, \\ 0, & \text{für } n \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\}. \end{cases} \tag{6.7}$$

e) $\int_{\mathbf{c}} z\, dz, \quad \mathbf{c}(t) = e^{(1+i)\, t}, \quad 0 \le t \le 2\,\pi.$

$$\int_{\mathbf{c}} z dz \; = \; (1 + i) \int_0^{2\pi} e^{2\,(1+i)t}\, dt \; = \; \frac{1}{2}\, e^{2(i+1)t} \Big|_0^{2\pi} \; = \; \frac{1}{2}[e^{4\pi} - 1].$$

Elementare Eigenschaften (6.8)

a) Das komplexe Kurvenintegral $\int_{\mathbf{c}} f(z)dz$ ist *parametrisierungs-invariant*, d.h. für eine bijektive C^1-Transformation $h : [\alpha, \beta] \to [a, b]$ mit $h'(\tau) > 0$ gilt

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbf{c}\circ h} f(z)\,dz &= \int_{\alpha}^{\beta} f(\mathbf{c}(h(\tau)))\,\frac{d}{d\,\tau}\Big(\mathbf{c}\circ h\Big)(\tau)\,d\tau \\
&= \int_{\alpha}^{\beta} f(\mathbf{c}(h(\tau)))\,\mathbf{c}'(h(\tau))\,h'(\tau)\,d\tau \\
&= \int_{a}^{b} f(\mathbf{c}(t))\,\mathbf{c}'(t)\,dt \;=\; \int_{\mathbf{c}} f(z)\,dz.
\end{aligned}$$

b) Änderung der Durchlaufrichtung:

$$\int_{-\mathbf{c}} f(z)\,dz \;=\; -\int_{\mathbf{c}} f(z)\,dz$$

dabei ist $(-\mathbf{c})(t) := \mathbf{c}(b + t(a-b)), \quad 0 \leq t \leq 1.$

c) Darstellung als Riemann-Summe:

$$\int\limits_{\mathbf{c}} f(z)\,dz \;=\; \lim_{\|Z\|\to 0} \sum_{j=0}^{n-1} f(\mathbf{c}(\tau_j))\,(\mathbf{c}(t_{j+1}) - \mathbf{c}(t_j)).$$

d) Linearität:

$$\begin{aligned} \int\limits_{\mathbf{c}} \Big(f(z) + g(z)\Big)\,dz &= \int\limits_{\mathbf{c}} f(z)\,dz + \int\limits_{\mathbf{c}} g(z)\,dz \\ \int\limits_{\mathbf{c}} \alpha\, f(z)\,dz &= \alpha \int\limits_{\mathbf{c}} f(z)\,dz; \quad \alpha \in \mathbb{C}. \end{aligned}$$

e) Additivität bzgl. des Integrationsweges:

$$\int\limits_{\mathbf{c}_1+\mathbf{c}_2} f(z)\,dz \;=\; \int\limits_{\mathbf{c}_1} f(z)\,dz + \int\limits_{\mathbf{c}_2} f(z)\,dz,$$

wobei $\mathbf{c}_j : [0,1] \to \mathbb{C}$, $\mathbf{c}_2(0) = \mathbf{c}_1(1)$, $(\mathbf{c}_1 + \mathbf{c}_2)(t) := \mathbf{c}_1(2\,t)$, $0 \le t \le 0.5$, und $(\mathbf{c}_1 + \mathbf{c}_2)(t) := \mathbf{c}_2(2\,t - 1)$, $0.5 \le t \le 1$.

f) Abschätzung:

$$\left|\int_{\mathbf{c}} f(z)\,dz\right| \;\le\; \Big(\sup_{z\in\mathbf{c}[a,b]} |f(z)|\Big) \int_a^b |\mathbf{c}'(t)|\,dt.$$

Beweis:

$$\left|\int_{\mathbf{c}} f(z)\,dz\right| \;=\; \left|\int_a^b f(\mathbf{c}(t))\,\mathbf{c}'(t)\,dt\right| \;\le\; \int_a^b |f(\mathbf{c}(t))|\,|\mathbf{c}'(t)|\,dt$$

$$\le\; \Big(\sup_{z\in\mathbf{c}[a,b]} |f(z)|\Big) \int_a^b |\mathbf{c}'(t)|\,dt. \qquad \square$$

Satz (6.9)

Ist $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k(z)$ eine Reihe stetiger Funktionen $f_k : D \to \mathbb{C}$, die auf einem Gebiet $D \subset \mathbb{C}$ *gleichmäßig* konvergiert und ist $\mathbf{c} : [a,b] \to D$ ein (stetiger) stkw. C^1-Weg, so gilt

$$\int_{\mathbf{c}} f(z)\,dz \;=\; \sum_{k=0}^{\infty} \int_{\mathbf{c}} f_k(z)\,dz.$$

Beweis:

Als gleichmäßiger Grenzwert stetiger Funktionen ist f stetig (vgl. Lehrbuch, Satz (11.1.3)) und somit auch integrierbar. Es folgt

$$\int\limits_{\mathbf{c}} f(z)\,dz \;-\; \sum_{k=0}^{n} \int\limits_{\mathbf{c}} f_k(z)\,dz \;=\; \int\limits_{\mathbf{c}} R_n(z)\,dz,$$

wobei aufgrund der gleichmäßigen Konvergenz gilt

$$\forall\, \varepsilon > 0 : \;\exists\, N(\varepsilon) : \;\forall\, n \geq N,\; z \in D : \;|R_n(z)| \;<\; \varepsilon.$$

Mit (6.8 f) folgt für $n \geq N(\varepsilon)$:

$$\Big|\int\limits_{\mathbf{c}} R_n(z)\,dz\Big| \;\leq\; \varepsilon\, L(\mathbf{c}),$$

wobei $L(\mathbf{c}) = \int_a^b |\mathbf{c}'(t)|dt$ die Länge des Weges $\mathbf{c}$ bezeichnet. Somit folgt $\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbf{c}} R_n(z)\,dz \;=\; 0.$ □

Beispiel (6.10): Sei $|z_0| > r > 0$ und $\mathbf{c}(t) := r\,\mathrm{e}^{i\,t}$, $0 \le t \le 2\,\pi$. Dann folgt

$$\oint\limits_{|z|=r} \frac{d\,z}{z - z_0} = -\frac{1}{z_0} \oint\limits_{|z|=r} \frac{d\,z}{1 - (z/z_0)}$$

$$= -\frac{1}{z_0} \oint\limits_{|z|=r} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{z_0^k}\, z^k\, d\,z$$

$$= -\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{z_0^{k+1}} \oint\limits_{|z|=r} z^k\, d\,z = 0.$$

Erläuterung: 1. Gln.: Linearität, 2. Gln.: Geometrische Reihe, 3. Gln.: Satz (6.9), 4.Gln. (6.7).

Definition (6.11) Eine Reihe der Form

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k\,(z-z_0)^k := \sum_{k=0}^{\infty} a_k(z-z_0)^k + \sum_{k=1}^{\infty} a_{-k}(z-z_0)^{-k}$$

heißt *Laurent-Reihe* zum Entwicklungspunkt z_0, benannt nach *Pierre Alphonse Laurent (1813-1854)*.

Eine Laurent-Reihe ist lokal gleichmäßig und absolut konvergent in einem *Kreisring*

$$K_{r_1,r_2}(z_0) \;:=\; \{z \in \mathbb{C} :\; 0 \le r_1 < |z-z_0| < r_2 \le \infty\}. \qquad (6.12)$$

Die *Konvergenzradien* r_1 und r_2 ergeben sich aus den Konvergenzradien der beteiligten Potenzreihen zu

$$r_2 = \left[\limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|}\,\right]^{-1}, \quad r_1 = \limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_{-k}|}, \qquad (6.13)$$

vgl. Lehrbuch, Satz (11.2.3).

Satz (6.14)
Ist die Funktion f auf einem Kreisring $K_{r_1,r_2}(z_0)$ durch eine Laurent-Reihe gegeben,

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k\,(z - z_0)^k, \quad r_1 < |z - z_0| < r_2,$$

so gilt für $r_1 < r < r_2$ und $\mathbf{c}(t) : z_0 + r\,\mathrm{e}^{i\,t},\ 0 \le t \le 2\pi$

$$\oint\limits_{|z-z_0|=r} f(z)\,dz = 2\pi\,i\,a_{-1}.$$

Beweis: Wir verwenden (6.7). Wegen der gleichmäßigen Konvergenz lassen sich Integration und Summation vertauschen

$$\oint\limits_{|z-z_0|=r} f(z)\,dz = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \oint\limits_{|z-z_0|=r} (z - z_0)^k\,dz = 2\pi\,i\,a_{-1}. \quad \square$$