8. Die Cauchysche Integralformel

Satz (8.1) (Cauchysche Integralformel)

Ist $f : D \to \mathbb{C}$ holomorph auf einem Gebiet D und ist $c : [a, b] \to D \setminus \{z_0\}$ ein geschlossener, zum Punkt $z_0 \in D$ homotoper stkw. C^1-Weg, der z_0 einmal in positivem Sinn umläuft, so gilt

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\mathbf{c}} \frac{f(z)}{z - z_0} \, dz. \tag{8.2}$$

Beweis: Der Weg $\mathbf{c}$ lässt sich innerhalb des Gebietes $D \setminus \{z_0\}$ auf einen Kreis $\mathbf{c}_r(t) = z_0 + r\mathrm{e}^{i\,t}$, $0 \le t \le 2\pi$, um z_0 mit hinreichend kleinem Radius r zusammenziehen,

$\mathbf{c}$ und $\mathbf{c}_r$ sind also in $D \setminus \{z_0\}$ homotop. Damit folgt

$$\begin{aligned}
\oint_{\mathbf{c}} \frac{f(z)}{z - z_0}\, dz &= \oint_{\mathbf{c}_r} \frac{f(z)}{z - z_0}\, dz \\
&= \int_0^{2\pi} \frac{f(z_0 + r\mathrm{e}^{i\,t})}{r\mathrm{e}^{i\,t}}\, ir\mathrm{e}^{i\,t}\, dt \\
&= i \int_0^{2\pi} f(z_0 + r\,\mathrm{e}^{i\,t})\, dt \\
&\to 2\,\pi\, i\, f(z_0), \quad \text{für } r \downarrow 0.
\end{aligned}$$

Da die linke Seite von r unabhängig ist, folgt

$$\oint_{\mathbf{c}} \frac{f(z)}{z - z_0}\, dz = 2\,\pi\, i\, f(z_0). \qquad \square$$

Bemerkungen (8.3)

a) Für einen beliebigen zu z_0 homotopen Weg in $D \setminus \{z_0\}$ gilt

$$\oint_{\mathbf{c}} \frac{f(z)}{z - z_0}\, dz \;=\; 2\,\pi\, i\ \mathrm{Uml}(\mathbf{c}, z_0)\ f(z_0). \tag{8.4}$$

b) Heuristische Herleitung: Mit dem Taylorschen Satz gilt

$$f(z) \;=\; f(z_0) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}\,(z - z_0)^k$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{f(z)}{z - z_0} \;=\; \frac{f(z_0)}{z - z_0} + g(z); \quad g(z) \text{ holomorph auf } D,$$

$$\Rightarrow \oint_{\mathbf{c}} \frac{f(z)}{z - z_0}\, dz \;=\; \oint_{\mathbf{c}} \frac{f(z_0)}{z - z_0}\, dz + \oint_{\mathbf{c}} g(z)\, dz$$

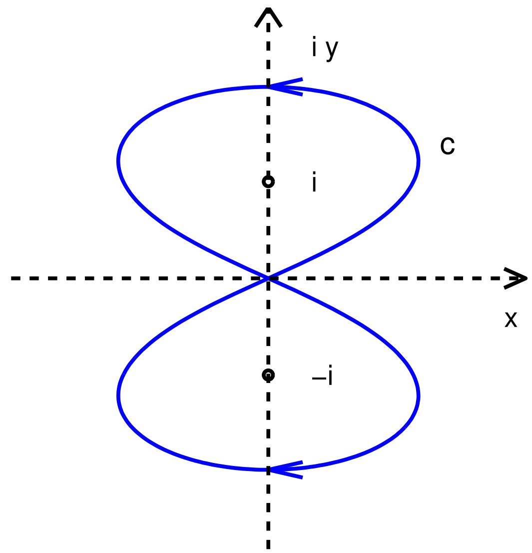
$$= \; 2\,\pi\, i\, f(z_0) \;+\; 0.$$

Beispiel (8.5)

Wir berechnen

$$\oint\limits_{\mathbf{c}} \frac{d\,z}{1+z^2}.$$

für den rechts angegebenen Weg $\mathbf{c}$.



1. Weg: Mittels (7.10):

$$\oint\limits_{\mathbf{c}} \frac{d\,z}{1+z^2} = \oint\limits_{\mathbf{c}} \frac{d\,z}{(z+i)\,(z-i)}$$

$$= \frac{i}{2} \oint\limits_{\mathbf{c}} \Big(\frac{1}{z+i} - \frac{1}{z-i} \Big)\, d\,z$$

$$= \frac{i}{2} \oint\limits_{\mathbf{c}} \frac{d\,z}{z+i} - \frac{i}{2} \oint\limits_{\mathbf{c}} \frac{d\,z}{z-i}$$

$$= \frac{i}{2} (-2\,\pi\,i) - \frac{i}{2} (2\,\pi\,i) = 2\,\pi.$$

2. Weg: Mittels Cauchyscher Integralformel: Wir teilen die Kurve auf, $\mathbf{c} = \mathbf{c}_1 + \mathbf{c}_2$, wobei $\mathbf{c}_1$ die Teilkurve in $\operatorname{Im} z \geq 0$, $\mathbf{c}_2$ die in $\operatorname{Im} z \leq 0$ beschreibt.

$$\oint_{\mathbf{c}} \frac{d\,z}{1+z^2} = \oint_{\mathbf{c}_1} \frac{1/(z+i)}{(z-i)}\,d\,z + \oint_{\mathbf{c}_2} \frac{1/(z-i)}{(z+i)}\,d\,z$$

$$= 2\,\pi\,i\left(\frac{1}{i+i}\right) - 2\,\pi\,i\left(\frac{1}{-i-i}\right) = 2\,\pi.$$

Wir notieren einige Folgerungen, die sich aus der Cauchyschen Integralformel ergeben.

Folgerung (8.6) (Mittelwerteigenschaft)

Ist f holomorph auf einem Gebiet D, so gilt für $z_0 \in D$, $\overline{K}_r(z_0) \subset D$:

$$f(z_0) = \frac{1}{2\,\pi} \int_0^{2\,\pi} f(z_0 + r\,\mathrm{e}^{i\,t})\,dt. \tag{8.7}$$

Beweis: Folgt aus dem Beweis von (8.1), Seite 117. □

Folgerung (8.8) (Maximumprinzip)

a) Ist f holomorph auf einem Gebiet D und besitzt $|f(z)|$ ein Maximum in $z_0 \in D$, so ist f konstant.

b) Ist f holomorph auf einem Gebiet D und stetig auf $\overline{D}$, so nimmt die Funktion $|f|$ ihr Maximum auf D in einem Punkt aus ∂D an.

Beweis: Ist $|f|$ in einem Punkt $z_0 \in D$ maximal, so gilt mit $M := |f(z_0)|$ für jeden Kreis mit $\overline{K_r}(z_0) \subset D$ nach (8.7):

$$M = |f(z_0)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(z_0 + r\,\mathrm{e}^{it})|\,dt \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} M\,dt = M.$$

Daher muss durchgehend Gleichheit gelten und damit insbesondere $|f(z)| = M$ für alle z mit $|z - z_0| \leq r$ gelten. Damit ist $|f|$ konstant auf der Kreisscheibe und durch Fortsetzung dieses Verfahrens sieht man, dass $|f|$ auch auf D konstant ist.

Mittels der Cauchy-Riemannschen Differentialgleichung folgt hieraus aber unmittelbar, dass auch $f' = u_x + iv_x$ identisch verschwindet, und somit f konstant ist. (Übungsaufgabe!) $\square$

Folgerung (8.9) (Fundamentalsatz der Algebra)
Ist $p(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k$ ein Polynom vom Grad $n \geq 1$, so besitzt p wenigstens eine Nullstelle in $\mathbb{C}$.

Beweis: Sei also $a_n \neq 0$ und $n \geq 1$. Nehmen wir, dass p keine Nullstelle besitzt, so ist $f := 1/p$ auf ganz $\mathbb{C}$ holomorph. Nun gilt

$$\begin{aligned} |f(z)| &= \left| \frac{1}{a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_0} \right| \\ &= \frac{1}{|z|^n} \frac{1}{|a_n + a_{n-1}/z + \ldots + a_0/z^n|} \\ &\to 0 \quad (z \to \infty) \end{aligned}$$

Daher muss $|f|$ in einem Punkt $z_0 \in \mathbb{C}$ maximal werden. Nach dem Maximumprinzip ist f somit konstant auf $\mathbb{C}$ und daher ist auch das Ausgangspolynom p konstant auf $\mathbb{C}$. Sei also $p(z) = \alpha$, $\forall\, z \in \mathbb{C}$, dann folgt für $z \neq 0$:

$$a_n + a_{n-1}/z + \ldots + a_0/z^n = \alpha/z^n.$$

Grenzwertbildung $z \to \infty$ ergibt $a_n = 0$, im Widerspruch zur Annahme! $\square$

Satz (8.10) (Taylor–Entwicklung)

a) Ist f auf einem Gebiet $D \subset \mathbb{C}$ holomorph, $z_0 \in G$ und $\overline{K}_r(z_0) \subset D$, so ist f in $K_r(z_0)$ in eine Potenzreihe entwickelbar

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k\,(z-z_0)^k, \qquad |z-z_0| < r. \tag{8.11}$$

Insbesondere ist f auf D beliebig oft komplex differenzierbar.

b) $$a_k = \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}, \qquad k \geq 0, \tag{8.12}$$

c) Für den Konvergenzradius R der obigen Taylor-Reihe gilt

$$R \geq \sup\{r > 0: \ K_r(z_0) \subset D\}.$$

d) Verallgemeinerte Cauchysche Integralformel:

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \oint\limits_{|z-z_0|=r} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\, dz \tag{8.13}$$

Beweis:

Aufgrund der Cauchyschen Integralformel gilt für $|z - z_0| < r$

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{|w-z_0|=r} \frac{f(w)}{w-z}\, dw,$$

wobei der Kreis $|w-z_0| = r$ einmal im positiven Sinn durchlaufen wird. Wir formen den Integranden um:

$$\begin{aligned}\frac{1}{w-z} &= \frac{1}{w-z_0}\ \frac{w-z_0}{(w-z_0)-(z-z_0)}\\ &= \frac{1}{w-z_0}\ \frac{1}{1-(z-z_0)/(w-z_0)}\\ &= \frac{1}{w-z_0}\ \sum_{k=0}^{\infty}\Big(\frac{z-z_0}{w-z_0}\Big)^k\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{f(w)}{w-z} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{f(w)}{(w-z_0)^{k+1}}\ (z-z_0)^k.$$

Da die obige Reihe auf den Kreis $|w-z_0| = r$ absolut und gleichmäßig konvergiert, kann Summation und Integration vertauscht werden, vgl. Satz (6.9). Wir erhalten somit

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty}\Big[\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{|w-z_o|=r}\frac{f(w)}{(w-z_0)^{k+1}}\ d\,w\Big]\ (z-z_0)^k. \qquad \square$$

Satz (8.14) (Cauchysche Ungleichung)

Sei f holomorph auf einem Gebiet $D \subset \mathbb{C}$, $z_0 \in D$ und $r > 0$, so dass $\overline{K}_r(z_0) \subset D$. Für die Koeffizienten der Taylor-Entwicklung von f um z_0 gilt dann die Abschätzung

$$\Big| \frac{1}{n!} f^{(n)}(z_0) \Big| \leq \frac{M(r)}{r^n}; \qquad M(r) := \max_{|z-z_0|=r} |f(z)|.$$

Beweis: Dies ist eine unmittelbare Folgerung aus der verallgemeinerten Cauchyschen Integralformel:

$$\frac{1}{n!} f^{(n)}(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{|z-z_0|=r} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\, dz$$

$$\Rightarrow \Big| \frac{1}{n!} f^{(n)}(z_0) \Big| \leq \frac{1}{2\pi} \max_{|z-z_0|=r} \Big(\frac{|f(z)|}{|z-z_0|^{n+1}} \Big)\, 2\pi r = \frac{M(r)}{r^n}. \qquad \square$$

Satz (8.15) (Liouville)

Ist $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorph auf $\mathbb{C}$ und beschränkt, so ist f konstant.

Beweis: Da f beschränkt ist, ist auch $M(r)$ beschränkt für $r \in]0, \infty[$. Aus der Cauchyschen Ungleichung folgt damit für $n = 1$

$$|f'(z_0)| \leq \frac{M(r)}{r} \to 0, \quad \text{für} \quad r \to \infty.$$

Da $z_0 \in \mathbb{C}$ beliebig ist, verschwindet f' auf ganz $\mathbb{C}$. Somit ist f konstant. $\square$