2. Polynome

2.1 Horner-Schema[1]

Definition (2.1) Eine Funktion $p: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ bzw. $p: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ der Form

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$$

heißt ein Polynom bzw. eine Polynomfunktion.

Die $a_k \in \mathbb{R}$ / $a_k \in \mathbb{C}$ sind die Koeffizienten des Polynoms p.

Ist $a_n \neq 0$, so heißt n der Grad von p.

$\Pi_n(\mathbb{R})$ / $\Pi_n(\mathbb{C})$: Menge aller reellen / komplexen Polynome vom Grad $\leq n$.

Polynome lassen sich günstig mit dem Horner-Schema auswerten. Dazu schreibt man:

$$p(x) = \Big(\ldots \big((a_n x + a_{n-1}) x + a_{n-2} \big) x + \ldots + a_1 \Big) x + a_0$$

---

[1] William George Horner (1786-1837); Bath

Algorithmus (2.2)

$p := a_n$
für $k = n-1, \dots, 0$
$\quad p := px + a_k$

Horner-Schema

$$
\begin{array}{c|ccccc}
 & a_n & a_{n-1} & \cdots & a_1 & a_0 \\
 & & x b_{n-1} & \cdots & x b_1 & x b_0 \\
\hline
x & b_{n-1} & b_{n-2} & \cdots & b_0 & p
\end{array}
$$

Beispiel

$p(x) = 5x^3 - 3x^2 - 6 \,; \quad p(-2) = ?$

$$
\begin{array}{c|cccc}
 & 5 & -3 & 0 & -6 \\
 & & -10 & 26 & -52 \\
\hline
x=-2 & 5 & -13 & 26 & -58
\end{array}
$$

2.2 Rundungsfehler

$$
\begin{aligned}
fl(p) = \Big\{ \cdot\cdot \Big[\big(a_n x (1+\mu_{n-1}) + a_{n-1} \big) & (1+\sigma_{n-1}) \\
* \, x (1+\mu_{n-2}) + a_{n-2} \Big] & (1+\sigma_{n-2}) \\
\vdots \qquad & \\
* \, x (1+\mu_0) + a_0 \Big\} & (1+\sigma_0)
\end{aligned}
$$

μ_k: Multiplikationsfehler, σ_k: Additionsfehler

"Ausmultiplizieren" liefert:

$$fl(p) = \sum_{k=0}^{n} a_k (1+\xi_k)\, x^k ,$$

$$(1+\xi_k) := (1+\sigma_k) \prod_{j=0}^{k-1} (1+\mu_j)(1+\sigma_j)$$

$$(k = 0, 1, \ldots, n \;;\; \sigma_n := 0)$$

Linearisierung u. Abschätzung:

$$|\xi_k| \lessapprox (2k+1) \cdot \text{eps}$$

$\Longrightarrow$

Für nicht zu große Polynomgrade n liefert das Horner-Schema einen stabilen Algorithmus!

Interpretation im Sinn der **Rückwärtsanalyse nach Wilkinson**[1]:

$fl(p)$ ist exakter Polynomwert für ein Polynom mit leicht veränderten Koeffizienten $\tilde{a}_k := a_k (1+\xi_k)$.

---

1) James Hardy Wilkinson (1919 – 1986); London

Warnung: Häufig ist aber die Auswertung von $p(x)$ ein schlecht konditioniertes Problem!

Beispiel (2.3) (nach Wilkinson)

$$p(x) = (x-10)(x-11)(x-12)(x-13)(x-14)$$
$$= x^5 - 60x^4 + 1435x^3 - 17100x^2 + 101524x - 240240$$

$\Longrightarrow$ $p(15) = 120$

Ändert man den Koeffizienten $a_2 = -17100$ zu $\tilde{a}_2 = -17099$ (andere Koeffizienten unverändert), so folgt $\tilde{p}(15) = 345$

$\Longrightarrow$ Fehlerverstärkung $\approx 0.3 \cdot 10^5$

Nullstellen: Das modifizierte Polynom hat die Nullstellen (MATLAB: roots)

$$x_1 = 9.1498$$
$$x_{2,3} = 10.872 \pm 2.0709\,i$$
$$x_{4,5} = 14.554 \pm 1.6016\,i$$

2.3. Nullstellen von Polynomen

Satz (2.4) Fundamentalsatz der Algebra

Jedes Polynom vom Grad ≥ 1 hat in $\mathbb{C}$ wenigstens eine Nullstelle.

Beweis: $\longrightarrow$ Funktionentheorie

Folgerung (2.5)

Jedes Polynom $p(z)$ vom Grad $n \geq 1$ lässt sich (über $\mathbb{C}$) in Linearfaktoren zerlegen:

$$p(z) = a_n (z - z_1) \ldots (z - z_n)$$

Dabei sind die z_k die (nicht notwendig verschiedenen) Nullstellen von $p(z)$.

Beweis:

(i) Polynome lassen "durchdividieren", d.h.

p, q Polynome, $\operatorname{grad} p = n \geq \operatorname{grad} q = m$

$\Longrightarrow$ Es gibt eind. bestimmte Polynome $s(z), r(z)$ mit

$$p(z) = s(z) \cdot q(z) + r(z), \quad \operatorname{grad} r < \operatorname{grad} q$$

Beispiel:

$$p(z) = 5z^3 - 3z^2 - 6$$
$$q(z) = z^2 + z - 2$$

$$\begin{array}{l}
(5z^3 - 3z^2 + 0z - 6) : (z^2 + z - 2) = 5z - 8 \\
\underline{5z^3 + 5z^2 - 10z} \\
\quad -8z^2 + 10z - 6 \\
\quad \underline{-8z^2 - 8z + 16} \\
\qquad 18z - 22
\end{array}$$

$$\Longrightarrow \quad p(z) = \underbrace{(5z-8)}_{s(z)} \cdot q(z) + \underbrace{(18z - 22)}_{r(z)}$$

(ii) Spezialfall: $q(z) = z - z_0$ lineares Polynom

$\Longrightarrow$
$$p(z) = \tilde{p}(z)(z - z_0) + c,$$
c: Konstante

Setzt man $z = z_0$ ein, so folgt:
$$p(z) = \tilde{p}(z)(z - z_0) + p(z_0)$$

Ist nun z_0 eine Nullstelle von p (existiert nach Fundamentalsatz), so folgt:
$$p(z) = \tilde{p}(z) \cdot (z - z_0), \quad \text{grad}\, \tilde{p} = n - 1$$
gleicher Weg nun für $\tilde{p}(z)$ ... usw.

Def. (2.6)

$z_0 \in \mathbb{C}$ heißt k-fache Nullstelle von $p(z)$, falls p durch $(z-z_0)^k$ teilbar ist, jedoch nicht durch $(z-z_0)^{k+1}$.

Folgerungen:

- Jedes Polynom n-ten Grades besitzt genau n Nullstellen, die ihrer Viel= fachheit nach gezählt werden.
- Kein Polynom n-ten Grades besitzt mehr als n Nullstellen, d.h. hat $p(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k$ wenigstens $(n+1)$ Nullstellen, so folgt $\forall k: a_k = 0$

Identitätssatz (2.7) (Koeffizientenvergleich)

Stimmen zwei Polynome $p(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k$ und $q(z) = \sum_{k=0}^{n} b_k z^k$ an $(n+1)$ Stellen überein, so sind die Polynome gleich, d.h. $\forall k: a_k = b_k$.

Beweis: $d(z) := p(z) - q(z) = \sum_{k=0}^{n} (a_k - b_k) z^k$ hat $(n+1)$ Nullstellen $\Longrightarrow \forall k: (a_k - b_k) = 0$ ▲

2.4 Nochmals Horner-Schema

Wir gehen nochmals auf die Zerlegung

$$p(z) = \tilde{p}(z)(z - z_0) + p(z_0) \qquad \underline{(2.8)}$$

ein und setzen $p(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k$, $\tilde{p}(z) = \sum_{k=0}^{n-1} b_k z^k$

ein:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} a_k z^k &= (z - z_0) \sum_{k=0}^{n-1} b_k z^k + p(z_0) \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} b_k z^{k+1} - \sum_{k=0}^{n-1} (b_k z_0) z^k + p(z_0) \\
&= b_{n-1} z^n + \sum_{k=1}^{n-1} (b_{k-1} - b_k z_0) z^k \\
&\qquad + p(z_0) - b_0 z_0
\end{aligned}$$

Koeffizientenvergleich ergibt:

$$b_{n-1} = a_n, \quad b_{k-1} = a_k + z_0 b_k, \; k = 1, \dots, n-1,$$

$$p(z_0) = a_0 + z_0 b_0$$

Dies entspricht gerade der Rekursion des Horner-Schemas (vgl. (2.2))

$\Longrightarrow$ Das Horner-Schema liefert (neben $p(z_0)$) zugleich die Koeffizienten von $\tilde{p}(z)$.

Beispiel

$$p(x) = x^3 + x^2 - x - 2\,, \qquad x_0 = 1$$

	1	1	-1	-2
		1	2	1
$x_0 = 1$	1	2	1	-1

$$\Longrightarrow \quad p(x) = (x^2 + 2x + 1)(x-1) - 1$$

Iteration der Zerlegung (2.8)

$$p(z) = c_0 + (z-z_0)\Big[c_1 + (z-z_0)\cdot\Big(c_2 + (z-z_0)\cdot\big(\ldots (z-z_0)\,c_n \ldots\big)\Big)\Big]$$

$$= \sum_{k=0}^{n} c_k (z-z_0)^k$$

D.h. Man erhält eine „Umsortierung" des Polynoms $p(z)$ nach Potenzen von $(z-z_0)$.

Die Koeffizienten c_k lassen sich über ein vollständiges Horner-Schema bestimmen!

28 a

$$p(x) = x^3 + x^2 - x - 2, \quad x_0 = 1$$

	1	1	-1	-2
$x_0=1$		1	2	1
	1	2	1	-1
$x_0=1$		1	3	
	1	3	4	
$x_0=1$		1		
	1	4		
$x_0=1$				
	1			

$$p(x) = (x^2 + 2x + 1)(x-1) \underline{-1}$$

$$= [(x+3)(x-1) + \underline{4}](x-1) \underline{-1}$$

$$= [(1 \cdot (x-1) + \underline{4})(x-1) + \underline{4}](x-1) \underline{-1}$$

$$= \underline{1} \cdot (x-1)^3 + \underline{4} \cdot (x-1)^2 + \underline{4}(x-1) \underline{-1}$$

Beispiel (2.9)

$$p(x) = 30x^3 + 10x^2 - 2x + 5, \quad x_0 = 1$$

	30	10	-2	5
		30	40	38
$x_0=1$	30	40	38	**43**
		30	70	
$x_0=1$	30	70	**108**	
		30		
$x_0=1$	30	**100**		
$x_0=1$	**30**			

$$\Rightarrow \quad \underline{p(x) = 30(x-1)^3 + 100(x-1)^2 + 108(x-1) + 43}$$

Welche Bedeutung haben die Koeff. c_k ?

$k=0$: $\quad p(z) = \sum_{k=0}^{n} c_k (z-z_0)^k \quad \Rightarrow \quad c_0 = p(z_0)$

$k=1$: $\quad p'(z) = \sum_{k=1}^{n} c_k\, k\, (z-z_0)^{k-1} \quad \Rightarrow \quad c_1 = \frac{1}{1!} p'(z_0)$

$k=2$: $\quad p''(z) = \sum_{k=2}^{n} c_k\, k(k-1)\, (z-z_0)^{k-2}$

$$\Rightarrow \quad c_2 = \frac{1}{2!} p''(z_0)$$

$\vdots$ u.s.w.

Allgemein gilt (vollst. Induktion):

$$\forall k: \quad c_k = \frac{1}{k!}\, p^{(k)}(z_0) \qquad \underline{(2.10)}$$

Da man alle c_k mit dem vollständigen Horner-Schema berechnen kann, erhält man somit auch <u>alle Ableitungen</u> von p in z_0.

Setzt man (2.10) in $p(z) = \sum_{k=0}^{n} c_k (z-z_0)^k$ ein, so erhält man die <u>Taylor-Entwicklung</u> des Polynoms p zum Entwicklungspunkt z_0:

$$\boxed{p(z) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\, p^{(k)}(z_0)\,(z-z_0)^k} \qquad \underline{(2.11)}$$

Für das Beispiel (2.9) erhält man also

$$p(1) = 43\,,$$

$$p'(1) = 1! \cdot 108 = 108$$

$$p''(1) = 2! \cdot 100 = 200$$

$$p'''(1) = 3! \cdot 30 = 180\,.$$

2.5 Nullstellenbestimmung

Wir beschreiben zwei gängige Verfahren zur Nullstellenbestimmung – die sich nicht nur auf Polynome anwenden lassen.

Nochmals die **Warnung**: Die Nullstellenbestimmung (insbesondere von Polynomen) ist häufig **schlecht konditioniert**!

Bisektion

Methode der Intervallhalbierung zur Einschließung einer Nullstelle von $p(x)$.

Sei $p : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion und gelte $p(a) \cdot p(b) < 0$

Algorithmus (2.12)

Start: $x_0 := a, \quad x_1 := b$

Iteration: Für $k = 1, 2, \ldots$

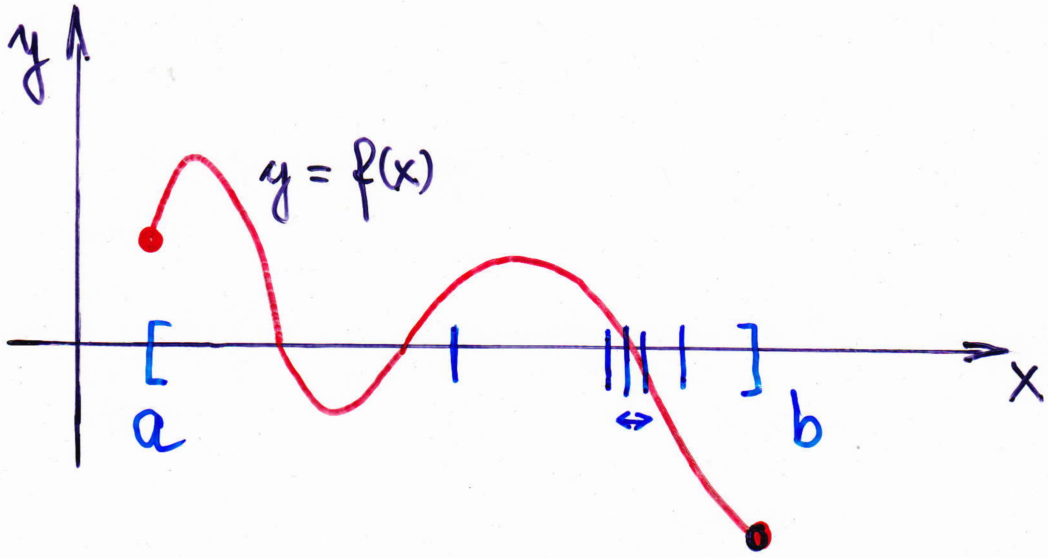
$y := (x_0 + x_1)/2$

Falls $[p(x_0) \cdot p(y) > 0]$ $x_0 := y$

Sonst $x_1 := y$

Abbruch, falls $|x_1 - x_0|$ klein!

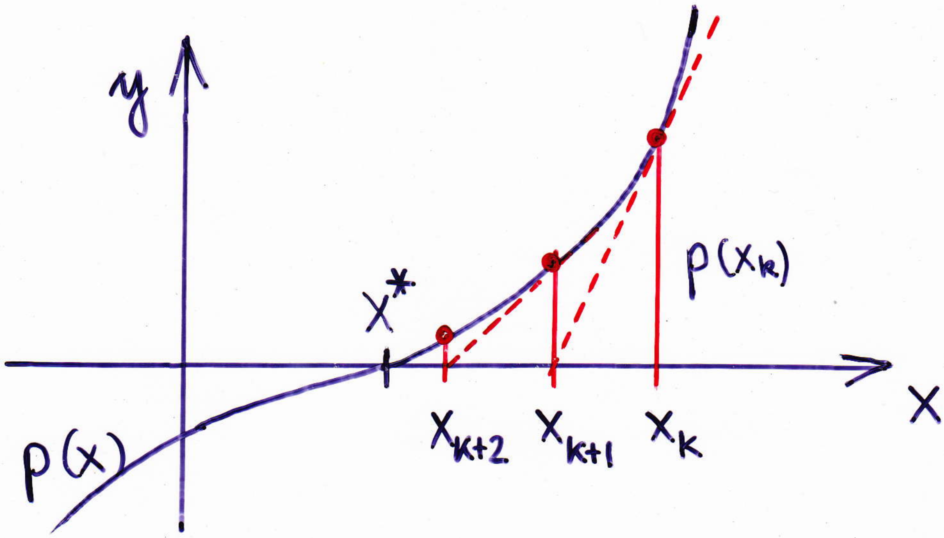
end.



Beispiel: $p(x) = -x^5 + 10x^4 - 36x^3 + 56x^2 - 35x + 6$

Iter	x_0	x_1
0	3.7	3.8
1	3.7	3.75
2	3.725	3.75
3	3.725	3.7375
4	3.73125	3.7375
5	3.73125	3.734375
⋮		
10	3.73203125	3.732226563
⋮		
20	3.732050705	3.732050896
⋮		
28	3.732050807	3.732050808

Newton - Verfahren



Tangentengleichung : $\dfrac{y - p(x_k)}{x - x_k} = p'(x_k)$

Nullstelle : $x_{k+1} = x_k - \dfrac{p(x_k)}{p'(x_k)}$

Algorithmus (2.13)

Start : x_0 Näherung für x^*

Iteration : Für $k = 0, 1, 2, \ldots$

$x_{k+1} = x_k - \dfrac{p(x_k)}{p'(x_k)}$

Abbruch, falls $|x_{k+1} - x_k|$ klein!

end.

Beispiel: $p(x) = -x^5 + 10x^4 - 36x^3 + 56x^2 - 35x + 6$

k	x_k
0	3.7
1	3.7350 60761
2	3.7320 74098
3	3.7320 50809
4	3.7320 50808

k	x_k
0	3.8
1	3.7417 34104
2	3.7322 86376
3	3.7320 50952
4	3.7320 50808

aber:

k	x_k
0	3.4
1	2.3346 34146
2	1.8353 66859
3	2.0131 47300
4	1.9999 93936
5	2.0

k	x_k
0	3.3
1	2.9082 44707
2	3.0071 70183
3	3.0000 24421
4	3.0

MATLAB-Befehle:

$p = [a_n \; a_{n-1} \; \ldots \; a_0]$: Koeffizienten von p

polyval(p, x) : Auswertung von p(x)

polyder(p) : Ableitung des Polynoms p