

Hörsaalübungsaufgaben und Lösungen zu Analysis I für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Aufgabe 1:

a) Man gebe für folgende Aussage die Wahrheitstafel an:

- (i) $B \Leftrightarrow \neg C$,
- (ii) $\neg A \Rightarrow (A \vee B)$.

b) Man zeige, dass folgende Aussage eine Tautologie ist:

$$((A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C)) \Rightarrow (A \Rightarrow C).$$

Aufgabe 2:

Man gebe die Zahlen x an, für die die folgenden Aussageformen wahr sind:

- a) $A(x) := x^2 - 9 < 0$ mit $x \in \mathbb{Z}$,
- b) $B(x) := \sqrt{4x + 20} \leq 6$ mit $x \in \mathbb{Z}$,
- c) $C(x) := -3 \leq \ln x < 3$ mit $x \in \mathbb{N}$.

Aufgabe 3:

Man beweise:

Für reelle Zahlen a, b mit $0 < a < b$ gilt die Ungleichung

$$\sqrt{b} - \sqrt{a} < \sqrt{b - a},$$

- a) direkt und
- b) indirekt.

Aufgabe 4:

- a) Man beweise indirekt, dass $\sqrt{14}$ irrational ist.
- b) Man entscheide und begründe ohne Verwendung eines Taschenrechners, welche der beiden Zahlen größer ist: $\sqrt{15} + \sqrt{18}$ oder $\sqrt{14} + \sqrt{19}$.

Aufgabe 5:

- a) Gegeben seien die Mengen

$$A = [-2, 2] \times [0, 1], \quad B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + 4y^2 \leq 4\}.$$

Man stelle folgende Mengen graphisch dar: A , B , $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$.

- b) Eine Funktion heißt *gerade*, wenn $f(x) = f(-x)$ gilt, bzw. *ungerade*, wenn $f(-x) = -f(x)$ gilt. Welche der folgenden Funktionen sind gerade bzw. ungerade (man zeichne die Funktionsgraphen):

(i) $f(x) = x^2 + \sin(\ln |x|)$,

(ii) $g(x) = x^3 + \sin(2x)$.

Aufgabe 6:

- a) Man entscheide, welche der folgenden Funktionen injektiv, surjektiv und bijektiv sind und zeichne die zugehörigen Funktionsgraphen:

(i) $f_1 : [-5, 5] \rightarrow [-2, 2], \quad f_1(x) = 1 - |2 - |x||,$

(ii) $f_2 : [0, 1] \rightarrow [0, 2], \quad f_2(x) = x^4,$

(iii) $f_3 : [0, \pi/2] \rightarrow [0, 1/2], \quad f_3(x) = \sin x \cos x,$

(iv) $f_4 : \mathbb{R} \rightarrow (0, \infty), \quad f_4(x) = e^x.$

- b) Für die Funktion f mit dem Definitionsbereich $D = (-\infty, -2]$ und der Funktionswertzuweisung $f(x) = -x^2 - 4x + 5$ gebe man den Wertebereich W an, berechne, falls dies möglich ist, die Umkehrfunktion f^{-1} und zeichne f und f^{-1} .

Aufgabe 7:

Man beweise durch vollständige Induktion

- a) für $q \neq 1$ und alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt $\sum_{k=0}^n q^k = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$,
- b) $a_n := 11^{n+1} + 12^{2n-1}$ ist für alle $n \in \mathbb{N}$ durch 133 teilbar.

Aufgabe 8:

- a) Man beweise, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ folgende Ungleichung gilt

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdots \frac{2n-1}{2n} \geq \frac{1}{n+1}.$$

- b) Zur Berechnung von $\prod_{k=1}^n \left(2 + \frac{2}{k+1}\right)$ finde man eine Formel (notfalls durch Probieren) und beweise diese (ggf. durch vollständige Induktion).

Aufgabe 9:

- a) Für die Binomialkoeffizienten mit $n, m \in \mathbb{N}$ und $m \leq n$ weise man folgende Beziehungen nach:

$$\binom{n}{m} \cdot \frac{n+1}{m+1} = \binom{n+1}{m+1}.$$

- b) Man bestimme für die Zahlen 96135 und 84854 den ggT und das kgV
- (i) unter Verwendung des Euklidischen Algorithmus,
 - (ii) mit Hilfe der Primfaktorzerlegung.

Aufgabe 10:

- a) Man überprüfe, ob folgende Mengen nach unten bzw. oben beschränkt sind und bestimme gegebenenfalls Infimum und Supremum

(i) $M_1 = [-2, 8] \cap]5, 15]$,

(ii) $M_2 =]-\infty, 2] \cup \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{5n}{2n+1}, n \in \mathbb{N} \right\}$.

- b) Man zeige, dass die rekursiv definierte Folge

$$x_0 = a, \quad x_1 = b, \quad x_{n+1} = x_n + 6x_{n-1}$$

folgende explizite Darstellung besitzt:

$$x_n = \frac{(2 \cdot 3^n + 3 \cdot (-2)^n) a + (3^n - (-2)^n) b}{5}.$$

Hinweis: Für den Beweis eignet sich die vollständige Induktion.

Aufgabe 11:

Man untersuche die nachstehenden Folgen auf Konvergenz und bestimme gegebenenfalls die Grenzwerte

$$a_n = \sqrt{n^2 + 2n} - \sqrt{n^2 - 2n}, \quad b_n = \left(\frac{3n^2 + 1}{2n^2 - n - 7} \right)^3,$$

$$c_n = \frac{\sqrt{n^2 + 2} - \sqrt{4n^2 + 3}}{n}, \quad d_n = \frac{2^{n+1} + 3^n}{3^{n+1} + 2^n},$$

Aufgabe 12:

Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = x(2 - x),$$

sowie die Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, die sich aus dem Newton-Verfahren zur Nullstellenberechnung von f mittels Startwert $x_0 \leq 0$ ergibt.

- a) Man zeige, dass $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gegen eine Nullstelle x^* konvergiert und berechne diese.
- b) Man zeige, dass die Folge (lokal) quadratisch konvergiert, d.h. es gibt eine Konstante $c \in \mathbb{R}$ mit

$$|x_{n+1} - x^*| \leq c|x_n - x^*|^2.$$

Aufgabe 13:

Man untersuche die folgenden rekursiv definierten Folgen auf Konvergenz und bestimme ggf. den Grenzwert:

a) $a_1 = 0$, $a_{n+1} = 1 - \frac{a_n}{3}$,

b) $b_1 = \frac{1}{2}$, $b_{n+1} = \frac{b_n^2 + 3}{4}$,

c) $c_1 = 1$, $c_{n+1} = 2c_n + 1$,

d) $d_1 = 3$, $d_{n+1} = \sqrt{3d_n - 2}$.

Aufgabe 14:

Man untersuche die Konvergenz folgender Folgen

a) $\mathbf{a}_n = \begin{pmatrix} n^2/2^n \\ 1 + 1/n \end{pmatrix}$, $n \in \mathbb{N}$,

b) $\mathbf{a}_{n+1} := \begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (x_n - y_n)/\sqrt{3} \\ (x_n + y_n)/\sqrt{3} \end{pmatrix}$, $n \in \mathbb{N}$ und $\mathbf{a}_1 \in \mathbb{R}^2$

Tipp: Eine geeignete Norm erleichtert das Leben.

Aufgabe 15:

a) Man stelle die reelle Zahl $x = 3.14\overline{15}$ beispielsweise unter Verwendung der Summenformel der geometrischen Reihe als Bruch dar.

b) Man berechne den Wert der folgenden Reihen, falls sie konvergieren:

$$\begin{array}{ll} \text{(i)} & \sum_{n=0}^{\infty} \frac{5}{3^{n+1}}, & \text{(ii)} & \sum_{n=0}^{\infty} \frac{7^n}{2^n}, \\ \text{(iii)} & \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{2}{n-1} - \frac{2}{n} \right), & \text{(iv)} & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5n+1}{2n-1}. \end{array}$$

Aufgabe 16:

a) Man zeige, dass die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2 \cdot (-1)^n}{n} - \frac{1}{n+1} \right)$$

alterniert und dass $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$ für $b_n := \frac{2 \cdot (-1)^n}{n} - \frac{1}{n+1}$ gilt.

Warum ist das Leibniz-Kriterium nicht anwendbar?

b) Gegeben sei die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{(-1)^n}{n+2} \cdot \frac{n+1}{n+3} \right)$.

(i) Man zeige, dass die Reihe konvergiert.

(ii) Ab welchem Index k unterscheiden sich die Partialsummen

$$S_k = \sum_{n=0}^k \left(\frac{(-1)^n}{n+2} \cdot \frac{n+1}{n+3} \right)$$

vom Grenzwert S der Reihe um weniger als 0.001?

(iii) Wie lauten die ersten drei Nachkommastellen des Grenzwertes S ?

Aufgabe 17:

Man untersuche die folgenden Reihen auf Konvergenz:

$$\begin{array}{ll} \text{a)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt{n^2 + n} - n \right)^n, & \text{b)} \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{n!}, \\ \text{c)} \quad \frac{1}{16} + \frac{3}{32} + \frac{9}{64} + \frac{27}{128} + \frac{81}{256} + \cdots, & \text{d)} \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k+1}{k^2+1}. \end{array}$$

Aufgabe 18:

- a) Man bestimme für folgende Mengen die Menge aller Häufungspunkte M' und aller inneren Punkte M^0 , und kläre, ob die Menge abgeschlossen oder offen ist.

$$M_1 = (]-3, 5] \cap]2, 8]) \cup \left\{ a_n \in \mathbb{R} \mid a_n = \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N} \right\},$$

$$M_2 = \{0\} \cup [3, 4] \cup \left\{ a_n \in \mathbb{R} \mid a_n = 1 + \frac{1}{2n}, n \in \mathbb{N} \right\},$$

$$M_3 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < y < |x| < 1 \right\}.$$

- b) Man berechne die folgenden Grenzwerte, falls sie existieren

(i) $\lim_{x \rightarrow \pi/2} \cos x \tan x,$

(ii) $\lim_{x \rightarrow 1+} \frac{x+1}{\sqrt{x-1}}.$

Aufgabe 19:

- a) Man zeichne die durch

$$f(x) = x \cos^2 \left(\frac{1}{x} \right)$$

gegebene Funktion und untersuche mit Hilfe des ε - δ -Kriteriums, ob sie in $x_0 = 0$ durch $f(0) = 0$ stetig ergänzt werden kann.

- b) Man zeichne die durch

$$g(x) = \begin{cases} x^2 & \text{für } x \geq 0 \\ e^x & \text{für } x < 0 \end{cases}$$

gegebene Funktion und überprüfe, ob sie in $x_0 = 0$ stetig ist.

Aufgabe 20:

- a) Man berechne die für alle $x \in \mathbb{R}$ stetige Funktion, für die gilt

$$\begin{aligned} f(0) &= 0, \\ f'(x) &= -2 \quad \text{für } -\infty < x < -1, \\ f'(x) &= 2x \quad \text{für } -1 < x < 2, \\ f'(x) &= 1 \quad \text{für } 2 < x < \infty \end{aligned}$$

und zeichne die Funktion. Ist f auch differenzierbar?

- b) Für die Funktion f mit

$$f(x) = \begin{cases} ax + b, & x < 1 \\ \ln x, & 1 \leq x \end{cases}$$

bestimme man $a, b \in \mathbb{R}$, sodass f in $x_0 = 1$ stetig differenzierbar wird und zeichne f .

- c) Man berechne die Tangentengleichung zu $f(x) = \cos x$ im Punkt $x_0 = \frac{\pi}{2}$ und fertige eine Zeichnung an.

Aufgabe 21:

- a) Man berechne die erste Ableitung der folgenden Funktionen

$$\text{i) } f(x) = (2x + 1)^{\sin x}, \quad \text{ii) } g(x) = \frac{x + \sin x \cos x}{2}.$$

- b) Man berechne die ersten beiden Ableitungen der folgenden Funktionen:

$$\text{i) } h(x) = \frac{x + 2}{x^3 + 8}, \quad \text{ii) } k(x) = \ln(x^2 - 1).$$

- c) Man berechne die ersten drei Ableitungen der folgenden Funktionen:

$$\text{i) } u(x) = 2(1 - 3x)^2 + 4(5x - 2) - 7, \quad \text{ii) } v(x) = \sqrt[3]{(5x + 1)^2}.$$

Aufgabe 22:

Gegeben sei die durch $f(x) = \cos(x^2 - \pi^2)$ definierte Funktion.

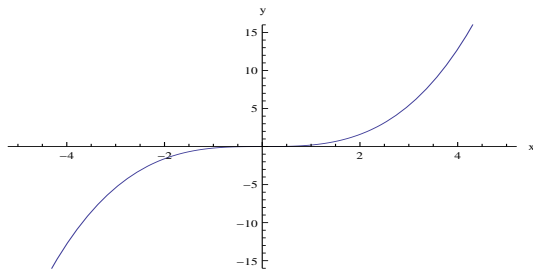
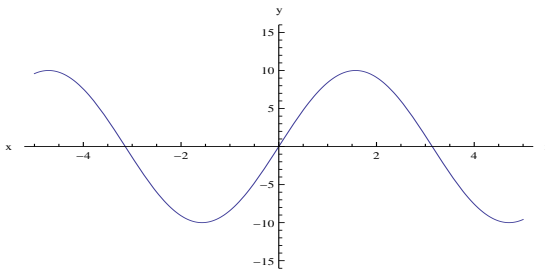
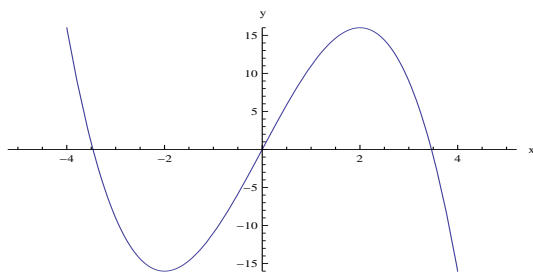
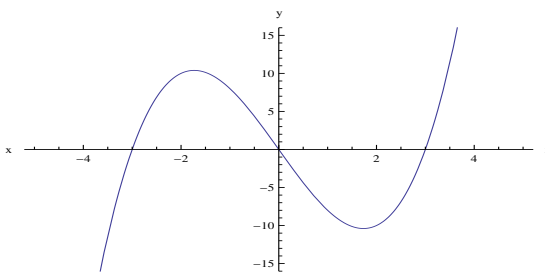
- a) Man berechne für f die Taylor-Polynome vom Grad 1 und 2 zum Entwicklungspunkt $x_0 = \pi$.
- b) Man schätze die Approximationsfehler $|f(3) - T_i(3; \pi)|$, $i = 1, 2$ mit Hilfe der Restgliedformel von Lagrange nach oben ab.

Aufgabe 23:

- a) Man berechne die folgenden Grenzwerte

$$\text{(i) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{(x^2)} - 1}{1 - \cos x}, \quad \text{(ii) } \lim_{x \rightarrow \infty} x \ln \left(\frac{2x + 3}{2x - 1} \right).$$

- b) Nur die Ableitung $g'(x) = 3x^2 - 9$ ist von der reellwertigen Funktion g bekannt. Man gebe die Monotoniebereiche von g an und klassifiziere alle Extremwerte. Anschließend begründe man, welcher der unten angegebenen Funktionsgraphen g_i mit dem von g übereinstimmt.

Funktion g_1 Funktion g_2 Funktion g_3 Funktion g_4

Aufgabe 24:

Man diskutiere die reellwertige Funktion

$$f(x) = \frac{11x - x^3}{x^2 - 9}.$$

Dazu untersuche man im Einzelnen:

- Definitionsbereich,
- Symmetrien,
- Pole,
- Verhalten im Unendlichen und Asymptoten,
- Nullstellen,
- lokale Extrema und Monotonie,
- Wendepunkte und Konvexität.
- Abschließend skizziere man den Graphen von $f(x)$.

Lösung 1:

a) (i)

B	C	$\neg C$	$B \Leftrightarrow \neg C$
1	1	0	0
1	0	1	1
0	1	0	1
0	0	1	0

(ii)

A	B	$\neg A$	$A \vee B$	$\neg A \Rightarrow (A \vee B)$
1	1	0	1	1
1	0	0	1	1
0	1	1	1	1
0	0	1	0	0

b)

A	B	C	$A \Rightarrow B$	$B \Rightarrow C$	$(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C)$	$A \Rightarrow C$	$\frac{(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C)}{\Rightarrow (A \Rightarrow C)}$
1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	0	0	0	1
1	0	1	0	1	0	1	1
1	0	0	0	1	0	0	1
0	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	1	0	0	1	1
0	0	1	1	1	1	1	1
0	0	0	1	1	1	1	1

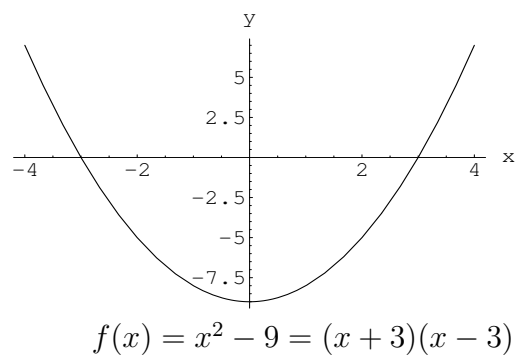
Lösung 2:

a)

$$x^2 - 9 = (x + 3)(x - 3) = 0$$

$$\Rightarrow \text{Nullstellen } x_1 = -3, x_2 = 3$$

$$\text{Lösungsmenge } \{-2, -1, 0, 1, 2\}$$



b)

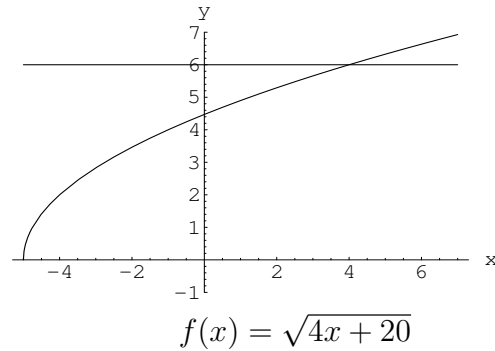
$$4x + 20 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -5 \text{ und}$$

$$\sqrt{4x + 20} \leq 6 \Rightarrow 4x + 20 \leq 36$$

$$\Rightarrow x \leq 4 \Rightarrow$$

Lösungsmenge

$$\{-5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$$



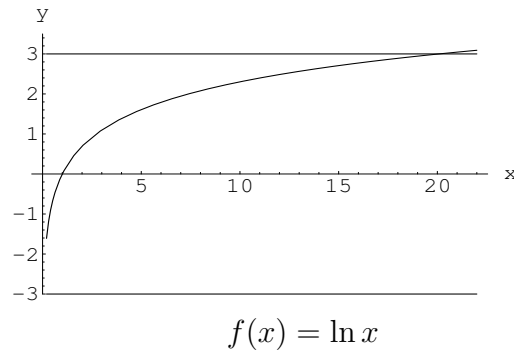
c)

Da der $\ln$ streng monoton wächst, erhält man

$$\ln 20 \approx 2.9958 < 3 < \ln 21 \approx 3.045 \Rightarrow$$

Lösungsmenge

$$\{1, 2, 3, 4, 5, 6, \dots, 19, 20\}.$$



Lösung 3:

Voraussetzung Aussage A: Gegeben seien $a, b > 0$ mit $a < b$.

Behauptung Aussage B:

$$\forall a, b, \text{ mit A, gilt } \sqrt{b} - \sqrt{a} < \sqrt{b - a}.$$

a) direkter Beweis:

$$A: 0 < a < b$$

$$\Rightarrow \sqrt{a} < \sqrt{b}$$

$$\Rightarrow \sqrt{a}\sqrt{a} < \sqrt{a}\sqrt{b}$$

$$\Rightarrow 2a < 2\sqrt{ab}$$

$$\Rightarrow b + a - 2\sqrt{ab} < b - a$$

$$\Rightarrow \underbrace{(\sqrt{b} - \sqrt{a})^2}_{>0} < \underbrace{b - a}_{>0}$$

$$\Rightarrow \sqrt{b} - \sqrt{a} < \sqrt{b - a} : B.$$

b) indirekter Beweis:

$$\begin{aligned}
\neg B : \exists a, b \text{ mit } A : \sqrt{b} - \sqrt{a} &\geq \sqrt{b-a} \\
\Rightarrow \exists a, b \text{ mit } A : b + a - 2\sqrt{ab} &\geq b - a \\
\Rightarrow \exists a, b \text{ mit } A : a &\geq \sqrt{ab} \\
\Rightarrow \exists a, b \text{ mit } A : a^2 &\geq ab \\
\Rightarrow \exists a, b \text{ mit } A : a \geq b : \neg A
\end{aligned}$$

Lösung 4:

a) Voraussetzung: A: Es gelten die Rechenregeln.

Behauptung: B: $\sqrt{14}$ ist irrational.

$A \wedge \neg B$: $\sqrt{14}$ ist rational

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \exists m, n \in \mathbb{N} \text{ teilerfremd (man beachte: } \sqrt{14} > 0): \sqrt{14} &= \frac{m}{n} \\
\Rightarrow 2 \cdot 7 = 14 = \frac{m^2}{n^2} \quad (\text{quadrieren}) \\
\Rightarrow 2 \cdot 7 \cdot n^2 = m^2 \\
\Rightarrow m^2 \text{ ist gerade und damit auch } m, \text{ also } m = 2k \\
\Rightarrow 2 \cdot 7 \cdot n^2 = m^2 = (2k)^2 \Rightarrow 7 \cdot n^2 = 2k^2 \\
\Rightarrow n^2 \text{ ist gerade und damit auch } n \\
&\text{Widerspruch zur Teilerfremdheit von } n, m \\
\Rightarrow \neg B \text{ ist falsch} \\
\Rightarrow B \text{ ist richtig}
\end{aligned}$$

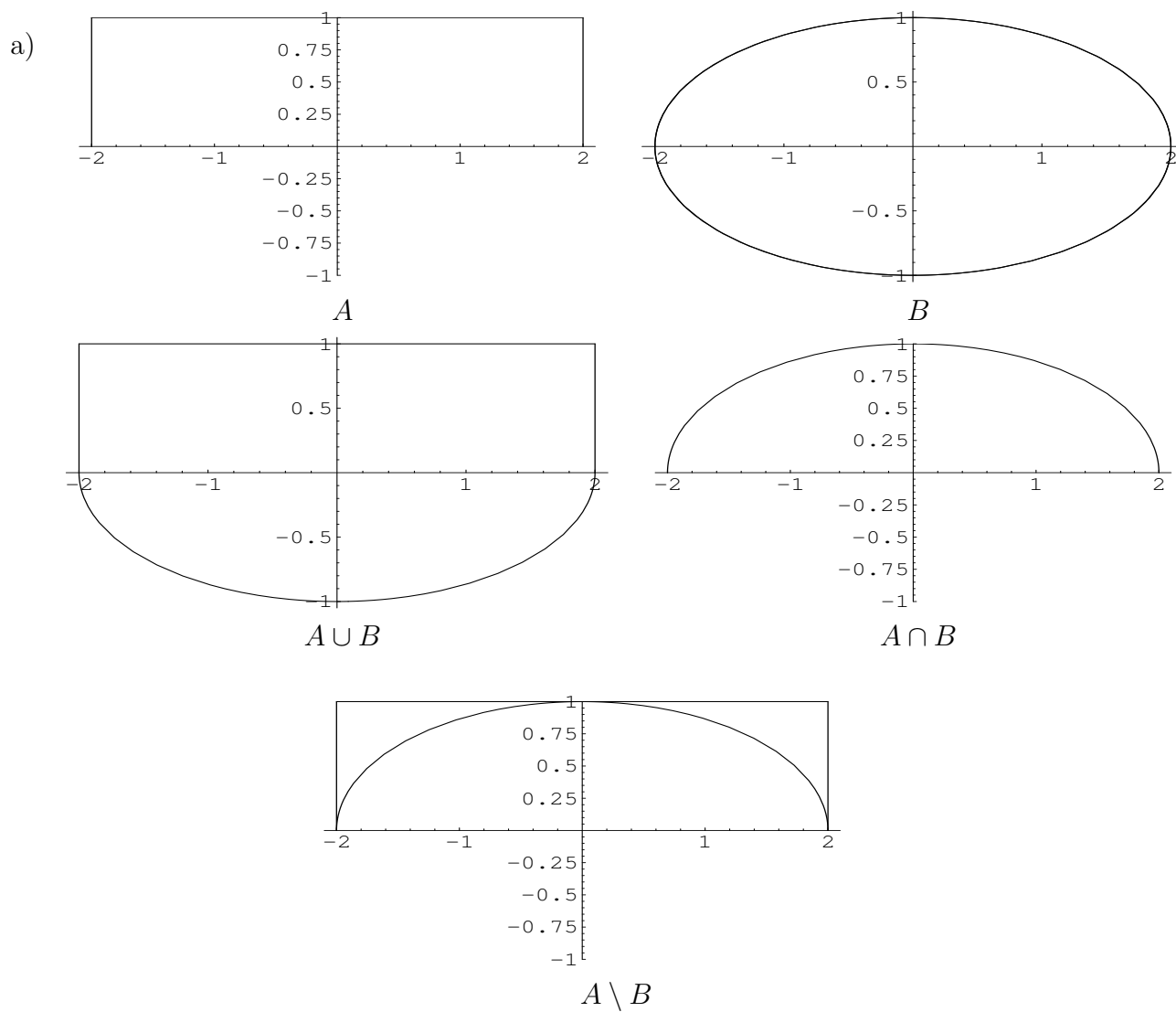
b) Mit Hilfe eines indirekten Beweises zeigen wir,

dass aus der (wahren) Aussage

$A : 133 < 135$ die Behauptung $B : \sqrt{14} + \sqrt{19} < \sqrt{15} + \sqrt{18}$ folgt:

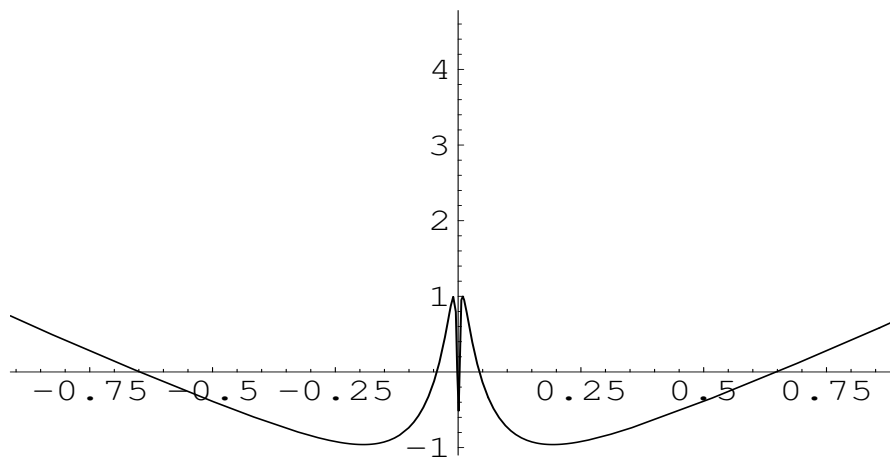
$$\begin{aligned}
\neg B : \sqrt{14} + \sqrt{19} &\geq \sqrt{15} + \sqrt{18} \\
\Rightarrow (\sqrt{14} + \sqrt{19})^2 &\geq (\sqrt{15} + \sqrt{18})^2 \\
\Rightarrow 14 + 2\sqrt{14}\sqrt{19} + 19 &\geq 15 + 2\sqrt{15}\sqrt{18} + 18 \\
\Rightarrow \sqrt{14 \cdot 19} &\geq \sqrt{15 \cdot 18} \\
\Rightarrow 14 \cdot 19 &\geq 15 \cdot 18 \\
\Rightarrow 7 \cdot 19 = 133 &\geq 15 \cdot 9 = 135 : \neg A
\end{aligned}$$

Damit gilt $B : \sqrt{14} + \sqrt{19} < \sqrt{15} + \sqrt{18}$.

Lösung 5:**Bild 5.a**

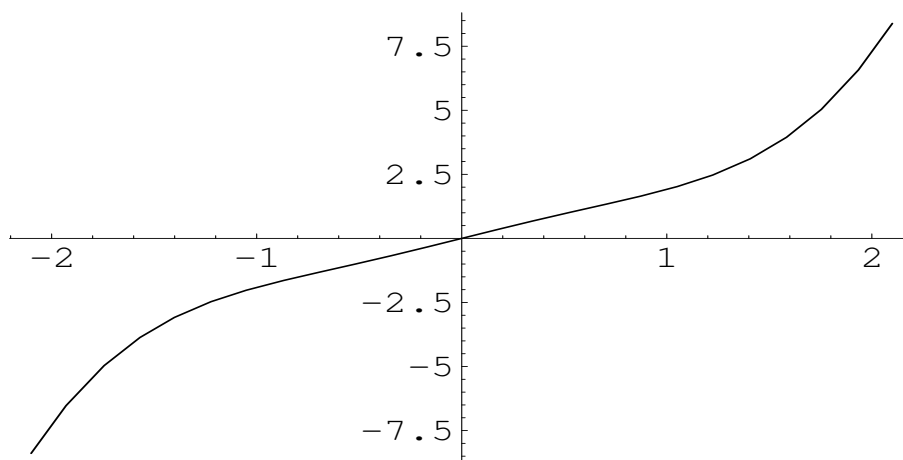
b) (i) f ist gerade, denn es gilt

$$f(-x) = (-x)^2 + \sin(\ln | -x|) = x^2 + \sin(\ln |x|) = f(x)$$

Bild 5.b.1 $f(x) = x^2 + \sin(\ln|x|)$

(ii) g ist ungerade, denn es gilt

$$g(-x) = (-x)^3 + \sin(2(-x)) = -x^3 - \sin(2x) = -g(x)$$

Bild 5.b.2: $g(x) = x^3 + \sin(2x)$

Lösung 6:

a) (i) f_1 ist weder injektiv noch surjektiv

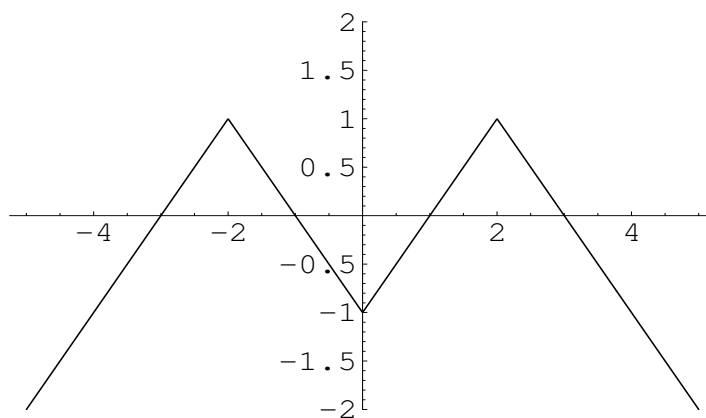


Bild 6.a.1 $f_1(x) = 1 - |2 - |x||$

(ii) f_2 ist injektiv aber nicht surjektiv

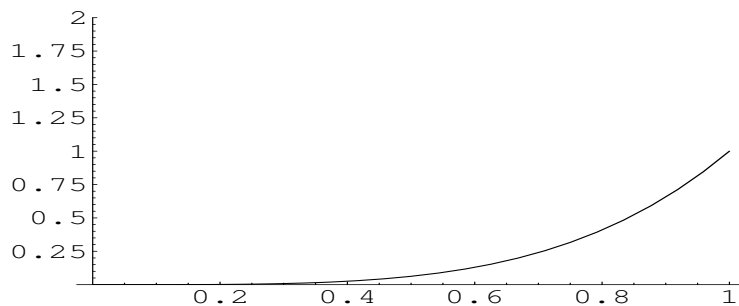


Bild 6.a.2 $f_2(x) = x^4$

(iii) f_3 ist surjektiv aber nicht injektiv

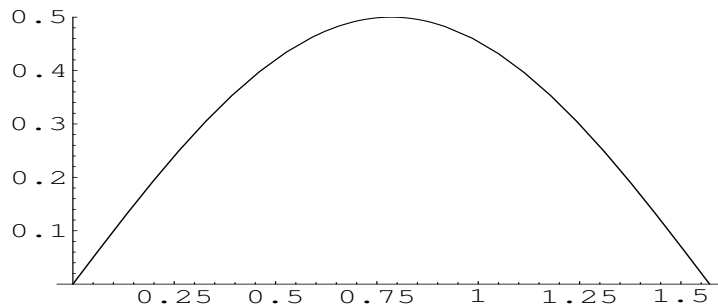


Bild 6.a.3 $f_3(x) = \sin x \cos x = \frac{1}{2} \sin 2x$

(iv) f_4 ist bijektiv

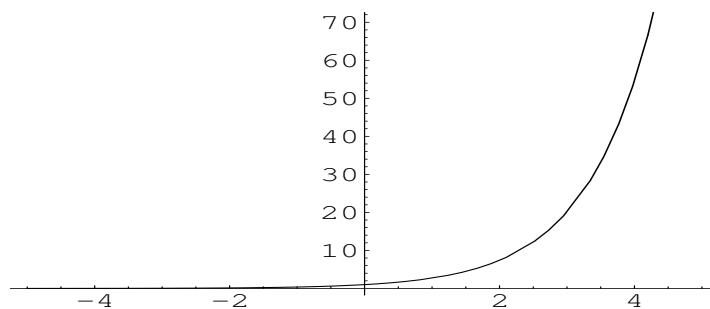


Bild 6.a.4 $f_4(x) = e^x$

b) Die Scheitelpunktform des quadratischen Polynoms:

$$y = f(x) = -x^2 - 4x + 5 = -(x + 2)^2 + 9 \Rightarrow y \in W = (-\infty, 9].$$

f ist in $(-\infty, -2]$ bijektiv und damit invertierbar.

Berechnung der Umkehrfunktion:

$$y = -(x + 2)^2 + 9 \Rightarrow (x + 2)^2 = 9 - y \Rightarrow x + 2 = \pm \sqrt{9 - y} \Rightarrow x = -2 \pm \sqrt{9 - y}$$

Wegen $x \in (-\infty, -2]$ folgt $f^{-1}(y) = -2 - \sqrt{9 - y}$.

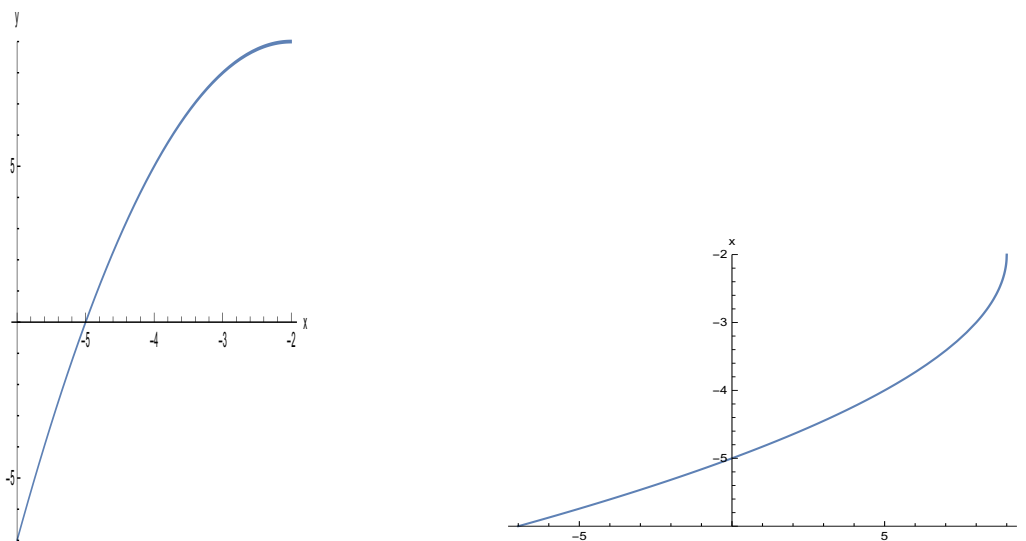


Bild 6.b $f(x) = -x^2 - 4x + 5$ und $f^{-1}(y) = -2 - \sqrt{9 - y}$

Lösung 7:

a) Beweis über vollständige Induktion:

$$n = 0 : \sum_{k=0}^0 q^k = q^0 = 1 = \frac{1-q}{1-q},$$

$$\begin{aligned} n \rightarrow n+1 : \sum_{k=0}^{n+1} q^k &= \left(\sum_{k=0}^n q^k \right) + q^{n+1} \\ &= \frac{1-q^{n+1}}{1-q} + q^{n+1} \\ &= \frac{1-q^{n+1} + (1-q)q^{n+1}}{1-q} \\ &= \frac{1-q^{n+2}}{1-q}, \end{aligned}$$

b) Mit $a_n := 11^{n+1} + 12^{2n-1}$ gilt $11^{n+1} = a_n - 12^{2n-1}$.

Beweis über vollständige Induktion:

$$n = 1 : \quad a_1 = 11^2 + 12 = 133 \quad \text{ist durch 133 teilbar,}$$

$$\begin{aligned} n \rightarrow n+1 : \quad a_{n+1} &= 11^{n+2} + 12^{2n+1} \\ &= 11 \cdot 11^{n+1} + 12^{2n+1} \\ &= 11(a_n - 12^{2n-1}) + 12^2 \cdot 12^{2n-1} \\ &= 11a_n + 12^{2n-1}(12^2 - 11) \\ &= 11a_n + 133 \cdot 12^{2n-1} \quad \text{ist durch 133 teilbar.} \end{aligned}$$

Lösung 8:

a) Beweis über vollständige Induktion:

$$\begin{aligned} n = 1 : \quad \frac{1}{2} &\geq \frac{1}{1+1} \\ n \rightarrow n+1 : \quad \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \dots \cdot \frac{2n-1}{2n} \cdot \frac{2(n+1)-1}{2(n+1)} \\ &\geq \frac{n+2}{n+2} \cdot \frac{1}{n+1} \cdot \frac{2n+1}{2n+2} \\ &= \frac{1}{n+2} \cdot \frac{2n^2+5n+2}{2n^2+4n+2} \\ &> \frac{1}{n+2} \end{aligned}$$

b) direkter Beweis

$$\begin{aligned} \prod_{k=1}^n \left(2 + \frac{2}{k+1} \right) &= \prod_{k=1}^n \frac{2(k+1)+2}{k+1} = \prod_{k=1}^n 2 \cdot \frac{k+2}{k+1} \\ &= 2^n \cdot \frac{3 \cdot 4 \cdot 5 \cdots n \cdot (n+1) \cdot (n+2)}{2 \cdot 3 \cdots n(n+1)} = 2^{n-1}(n+2) \end{aligned}$$

Alternativer Beweis von $\prod_{k=1}^n \left(2 + \frac{2}{k+1} \right) = 2^{n-1}(n+2)$

durch vollständige Induktion:

$$\begin{aligned}
n = 1 : \quad \prod_{k=1}^1 \left(2 + \frac{2}{k+1} \right) &= 2 + \frac{2}{1+1} = 3 = 2^{1-1}(1+2) \\
n \rightarrow n+1 : \quad \prod_{k=1}^{n+1} \left(2 + \frac{2}{k+1} \right) &= \left(\prod_{k=1}^n \left(2 + \frac{2}{k+1} \right) \right) \cdot \left(2 + \frac{2}{n+2} \right) \\
&= 2^{n-1}(n+2) \cdot 2 \cdot \left(1 + \frac{1}{n+2} \right) \\
&= 2^n(n+3)
\end{aligned}$$

Lösung 9:

$$a) \quad \binom{n}{m} \cdot \frac{n+1}{m+1} = \frac{n!}{m!(n-m)!} \cdot \frac{n+1}{m+1} = \frac{(n+1)!}{(m+1)!(n+1-(m+1))!} = \binom{n+1}{m+1}$$

b) (i) Euklidischer Algorithmus

$$96135 = 1 \cdot 84854 + 11281$$

$$84854 = 7 \cdot 11281 + 5887$$

$$11281 = 1 \cdot 5887 + 5394$$

$$5887 = 1 \cdot 5394 + 493$$

$$5394 = 10 \cdot 493 + 464$$

$$493 = 1 \cdot 464 + 29$$

$$464 = 16 \cdot 29 + 0$$

$$\implies \text{ggT}(96135, 84854) = 29$$

Damit erhält man

$$\text{kgV}(96135, 84854) = \frac{96135 \cdot 84854}{\text{ggT}(96135, 84854)} = \frac{96135 \cdot 84854}{29} = 281291010.$$

(ii) Primfaktorzerlegung

$$96135 = 3 \cdot 5 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 29, \quad 84854 = 2 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 19 \cdot 29$$

$$\text{ggT}(96135, 84854) = 29,$$

$$\text{kgV}(96135, 84854) = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 29 = 281291010.$$

Lösung 10:

- a) (i) $M_1 = [-2, 8] \cap]5, 15] =]5, 8]$ ist
nach unten beschränkt durch $\inf M_1 = 5$ und
nach oben beschränkt durch $\sup M_1 = 8$.

- (ii) $M_2 =] - \infty, 2] \cup \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{5n}{2n+1}, n \in \mathbb{N} \right\}$ ist
nach unten unbeschränkt und
nach oben beschränkt, denn $\frac{5n}{2n+1} = \frac{5}{2+1/n} < \frac{5}{2} = \sup M_2$.

b) Induktionsanfang:

$$n = 0 : \quad \frac{(2 \cdot 3^0 + 3 \cdot (-2)^0) a + (3^0 - (-2)^0) b}{5} = \frac{(2+3)a}{5} = a = x_0$$

$$n = 1 : \quad \frac{(2 \cdot 3^1 + 3 \cdot (-2)^1) a + (3^1 - (-2)^1) b}{5} = \frac{(3 - (-2))b}{5} = b = x_1$$

Induktionsschritt: $n-1, n \rightarrow n+1$

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n + 6x_{n-1} \\ &= \frac{(2 \cdot 3^n + 3 \cdot (-2)^n) a + (3^n - (-2)^n) b}{5} \\ &\quad + 6 \cdot \frac{(2 \cdot 3^{n-1} + 3 \cdot (-2)^{n-1}) a + (3^{n-1} - (-2)^{n-1}) b}{5} \\ &= \frac{(2 \cdot 3^n + 3 \cdot (-2)^n + 6(2 \cdot 3^{n-1} + 3 \cdot (-2)^{n-1})) a}{5} \\ &\quad + \frac{(3^n - (-2)^n + 6(3^{n-1} - (-2)^{n-1})) b}{5} \\ &= \frac{((2+2^2) \cdot 3^n + (3-3^2) \cdot (-2)^n) a + ((1+2)3^n - (1-3)(-2)^n) b}{5} \\ &= \frac{(2 \cdot 3^{n+1} + 3 \cdot (-2)^{n+1}) a + (3^{n+1} - (-2)^{n+1}) b}{5} \end{aligned}$$

Lösung 11:

$$\begin{aligned} \text{a) } \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n^2 + 2n} - \sqrt{n^2 - 2n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + 2n - (n^2 - 2n)}{\sqrt{n^2 + 2n} + \sqrt{n^2 - 2n}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4}{\sqrt{1 + 2/n} + \sqrt{1 - 2/n}} = \frac{4}{2} = 2 \end{aligned}$$

$$\text{b) } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3n^2 + 1}{2n^2 - n - 7} \right)^3 = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3 + 1/n^2}{2 - 1/n - 7/n^2} \right)^3 = \left(\frac{3}{2} \right)^3 = \frac{27}{8}$$

$$\text{c) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^2 + 2} - \sqrt{4n^2 + 3}}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{1 + 2/n^2} - \sqrt{4 + 3/n^2} = -1$$

$$\text{d) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{n+1} + 3^n}{3^{n+1} + 2^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n}{3^n} \cdot \frac{2(2/3)^n + 1}{3 + (2/3)^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2(2/3)^n + 1}{3 + (2/3)^n} = \frac{1}{3}$$

Lösung 12:

Die Funktion $f(x) = x(2 - x)$ besitzt genau die Nullstellen $x^* = 0$ und $x^{**} = 2$.

Die durch f gegebene Newton-Folge lautet:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{x_n(2 - x_n)}{2(1 - x_n)} = -\frac{x_n^2}{2(1 - x_n)}.$$

a)

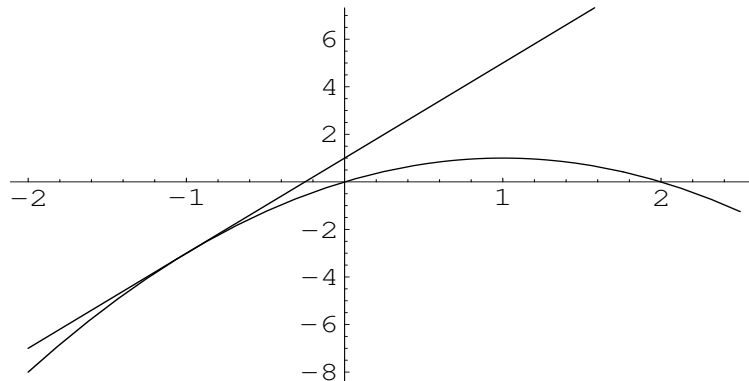


Bild 12: $f(x) = x(2 - x)$ mit Tangente für $x_0 < 0$

Da $x_0 \leq 0$ vorausgesetzt ist, liegt aufgrund der Anschauung die Vermutung nahe, dass die Newton-Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ monoton wachsend gegen die Nullstelle $x^* = 0$ konvergiert.

Die Newton-Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist nach oben beschränkt durch Null.

Beweis über Induktion:

$$n = 0 : \quad x_0 \leq 0$$

$$n \rightarrow n + 1 : \quad x_{n+1} = -\frac{x_n^2}{2(1 - x_n)} \leq 0 \quad \text{wegen} \quad x_n \leq 0$$

Die Newton-Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ wächst monoton.

Beweis direkt: für $x_n \leq 0$ gilt

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n(2 - x_n)}{2(1 - x_n)} \Rightarrow x_{n+1} - x_n = -\frac{x_n(2 - x_n)}{2(1 - x_n)} \geq 0$$

Damit konvergiert die Newton-Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gegen eine Nullstelle.

Wegen $x_n \leq 0$ gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x^* = 0.$$

$$\text{b) } |x_{n+1} - x^*| = |x_{n+1}| = \left| -\frac{x_n^2}{2(1-x_n)} \right| = \frac{|x_n - x^*|^2}{|2(1-x_n)|} \leq \frac{1}{2} |x_n - x^*|^2$$

Für den Startwert $x_0 = -1$ erhält man:

$$\begin{aligned} x_0 &= -1 \\ x_1 &= -0.25 \\ x_2 &= -0.025 \\ x_3 &= -0.0003048... \\ x_4 &= -0.00000004646... \\ x_5 &= -0.000000000000001079... \end{aligned}$$

Lösung 13:

a) Die ersten Folgenglieder lauten

$$a_1 = 0, a_2 = 1, a_3 = \frac{2}{3} = 0.666..., a_4 = \frac{7}{9} = 0.777..., a_5 = \frac{20}{27} = 0.740..., a_6 = \frac{61}{81} = 0.753...$$

Falls $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert, so sei $a := \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ der Grenzwert.

Aus der Rekursion erhält man:

$$a = \lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{a_n}{3} \right) = 1 - \frac{a}{3} \Rightarrow a = \frac{3}{4}.$$

Zum Nachweis der Konvergenz von $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gegen $a = \frac{3}{4}$ wird auf die Definition der Konvergenz gegen a zurückgegriffen

$$\begin{aligned} \left| a_{n+1} - \frac{3}{4} \right| &= \left| 1 - \frac{a_n}{3} - \frac{3}{4} \right| = \left| -\frac{a_n}{3} + \frac{1}{4} \right| = \left| -\frac{1}{3} \left(a_n - \frac{3}{4} \right) \right| = \frac{1}{3} \left| a_n - \frac{3}{4} \right| \\ &= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \left| a_{n-1} - \frac{3}{4} \right| = \dots = \left(\frac{1}{3} \right)^n \left| a_1 - \frac{3}{4} \right| = \left(\frac{1}{3} \right)^n \cdot \frac{3}{4} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0. \end{aligned}$$

b) Falls $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert, so sei $b := \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$ der Grenzwert.

Aus der Rekursion erhält man

$$b = \lim_{n \rightarrow \infty} b_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n^2 + 3}{4} = \frac{b^2 + 3}{4},$$

$$\Rightarrow 0 = b^2 - 4b + 3 = (b-1)(b-3) \Rightarrow b = 1 \vee b = 3.$$

Es gilt $b_{n+1} = \frac{b_n^2 + 3}{4} \geq 0$. Die ersten Folgenglieder lauten

$$b_1 = \frac{1}{2}, b_2 = \frac{13}{16} = 0.8125, b_3 = \frac{937}{1024} = 0.9150..., b_4 = \frac{4023697}{4194304} = 0.9593...$$

Man zeigt durch vollständige Induktion die Beschränktheit der Folge nach oben, hier $b_n \leq 1$:

Induktionsanfang: $b_1 = \frac{1}{2} \leq 1$

Induktionsschritt: $b_{n+1} = \frac{b_n^2 + 3}{4} \leq \frac{1 + 3}{4} = 1$

Man zeigt durch vollständige Induktion, dass die Folge monoton wächst, d.h. $b_n \leq b_{n+1}$:

Induktionsanfang: $b_1 = \frac{1}{2} \leq \frac{13}{16} = b_2$

Induktionsschritt: $b_n \leq b_{n+1} \Rightarrow b_n^2 \leq b_{n+1}^2 \Rightarrow b_{n+1} = \frac{b_n^2 + 3}{4} \leq \frac{b_{n+1}^2 + 3}{4} = b_{n+2}$

Also wächst b_n monoton und ist beschränkt nach oben durch 1, konvergiert also nach dem Monotoniekriterium und zwar gegen $b = 1$.

c) Wenn c_n gegen c konvergiert, so erhält man aus der Rekursion

$$c = 2c + 1 \Rightarrow c = -1.$$

Aus $c_1 = 1$ und $c_{n+1} = 2c_n + 1$ folgt jedoch durch Induktion $c_n \geq 0$.

Damit kann c_n nicht konvergieren.

d) Falls $(d_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert mit $d := \lim_{n \rightarrow \infty} d_n$, so ergibt die Rekursion:

$$d = \sqrt{3d - 2} \Rightarrow d^2 = 3d - 2 \Rightarrow (d-1)(d-2) = 0 \Rightarrow d = 1 \vee d = 2.$$

$(d_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert (gegen $d = 2$), denn es gilt $d_n \geq 2$ und $d_{n-1} \geq d_n$,

mit vollständiger Induktion:

$$d_1 = 3 \geq 2 \text{ und } d_{n+1} = \sqrt{3d_n - 2} \geq \sqrt{3 \cdot 2 - 2} = 2$$

$$d_2 = \sqrt{3^2 - 2} = \sqrt{7} \leq 3 = d_1 \text{ und } d_{n+1} = \sqrt{3d_n - 2} \leq \sqrt{3d_{n-1} - 2} = d_n.$$

Lösung 14:

a) Eine Folge im $\mathbb{R}^m$ konvergiert genau dann, wenn die Koordinatenfolgen konvergieren. Der Grenzwert lässt sich dann koordinatenweise berechnen.

Wir untersuchen daher die Konvergenz der Koordinatenfolgen von

$$\mathbf{a}_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n^2/2^n \\ 1 + 1/n \end{pmatrix}.$$

Zur Konvergenz der Koordinatenfolge $x_n = n^2/2^n$:

$$x_1 = \frac{1}{2}, x_2 = \frac{4}{4} = 1, x_3 = \frac{9}{8}, x_4 = \frac{16}{16} = 1, x_5 = \frac{25}{32}, x_6 = \frac{36}{64}, \dots$$

Zunächst halten wir fest, dass $x_n \geq 0$ gilt.

Aufgrund der Entwicklung der ersten Folgenglieder vermuten wir, dass die Folge ab $n = 3$ monoton fällt, d.h. es gilt $x_n \geq x_{n+1}$, und beweisen dies direkt.

Für $n \geq 3$ gilt

$$2 \leq (n-1)^2 = n^2 - 2n + 1 \Rightarrow 2n + 1 \leq n^2.$$

Damit ergibt sich

$$x_{n+1} = \frac{(n+1)^2}{2^{n+1}} = \frac{n^2 + 2n + 1}{2 \cdot 2^n} \leq \frac{n^2 + n^2}{2 \cdot 2^n} = \frac{n^2}{2^n} = x_n.$$

Also konvergiert $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Dass der Grenzwert Null ist, kann einfach über l'Hospital berechnet werden, soll hier jedoch nicht ausgeführt werden.

Für die zweite Koordinatenfolge gilt: $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + 1/n) = 1$.

Da beide Koordinatenfolgen konvergieren, konvergiert $(\mathbf{a}_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

- b) Die Konvergenz einer Folge ist in endlichdimensionalen Vektorräumen (hier $\mathbb{R}^n$) unabhängig von der Norm (z.B. $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ und $\|\cdot\|_\infty$). Es reicht daher aus, die Konvergenz in einer geeigneten Norm nachzuweisen.

Für die gegebene Folge vermuten wir, dass

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{a}_{n+1} := \lim_{n \rightarrow \infty} \begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = \lim_{n \rightarrow \infty} \begin{pmatrix} (x_n - y_n)/\sqrt{3} \\ (x_n + y_n)/\sqrt{3} \end{pmatrix} = \mathbf{0} =: \mathbf{a}$$

gilt, dass also der Nullvektor der Grenzwert ist und versuchen die Konvergenz über die Definition, also

$$\|\mathbf{a}_{n+1} - \mathbf{a}\| = \|\mathbf{a}_{n+1}\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

nachzuweisen. Für die obigen Normen ergibt sich

$$\begin{aligned} \|\mathbf{a}_{n+1}\|_1 &= \frac{|x_n - y_n|}{\sqrt{3}} + \frac{|x_n + y_n|}{\sqrt{3}} \leq \frac{1}{\sqrt{3}}(|x_n| + |y_n| + |x_n| + |y_n|) \\ &= \frac{2}{\sqrt{3}} \|\mathbf{a}_n\|_1 = \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2 \|\mathbf{a}_{n-1}\|_1 \cdots = \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^n \|\mathbf{a}_1\|_1 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \|\mathbf{a}_{n+1}\|_\infty &= \max\left\{\frac{|x_n - y_n|}{\sqrt{3}}, \frac{|x_n + y_n|}{\sqrt{3}}\right\} \leq \max\left\{\frac{|x_n| + |y_n|}{\sqrt{3}}\right\} \\ &\leq \frac{2}{\sqrt{3}} \max\{|x_n|, |y_n|\} = \frac{2}{\sqrt{3}} \|\mathbf{a}_n\|_\infty \quad (\text{siehe oben}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{a}_{n+1}\|_2 &= \sqrt{\left(\frac{x_n - y_n}{\sqrt{3}}\right)^2 + \left(\frac{x_n + y_n}{\sqrt{3}}\right)^2} = \frac{1}{\sqrt{3}} \sqrt{2x_n^2 + 2y_n^2} \\
&= \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \|\mathbf{a}_n\|_2 = \left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right)^2 \|\mathbf{a}_{n-1}\|_2 \\
&\vdots \\
&= \left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right)^n \|\mathbf{a}_1\|_2 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0
\end{aligned}$$

Also konvergiert $(\mathbf{a}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in der $\|\cdot\|_2$ Norm und damit in $\mathbb{R}^2$.

Lösung 15:

a) Unter Verwendung der Summenformel der geometrischen Reihe ergibt sich

$$\begin{aligned}
x &= 3.\overline{1415} = \frac{31}{10} + \frac{415}{10^4} + \frac{415}{10^7} + \cdots = \frac{31}{10} + \frac{415}{10^4} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{1000^j} \\
&= \frac{31}{10} + \frac{415}{10^4} \cdot \frac{1}{1 - 1/1000} = \frac{31 \cdot 999 + 415}{9990} = \frac{31384}{9990} = \frac{15692}{4995}.
\end{aligned}$$

Einen alternativen kurzen, jedoch durch die Aufgabenstellung nicht verlangten Lösungsweg, erhält man durch Verschiebung des Dezimalpunktes:

$$1000x - x = 3141.\overline{5415} - 3.\overline{1415} = 3138.4 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{3138.4}{999} = \frac{31384}{9990}.$$

$$\text{b) (i) } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{5}{3^{n+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{5}{3} \left(\frac{1}{3}\right)^n = \frac{5}{3} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n = \frac{5}{3} \cdot \frac{1}{1 - 1/3} = \frac{5}{2}$$

$$\text{(ii) } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{7^n}{2^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\left(\frac{7}{2}\right)^n}_{=a_n} \text{ divergiert, denn die notwendige Konvergenzbedingung}$$

$$\begin{aligned}
\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0 \text{ ist nicht erfüllt. Für die geometrische Folge mit } q = \frac{7}{2} \text{ gilt nämlich} \\
\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{7}{2}\right)^n = \infty.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{(iii) } \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{2}{n-1} - \frac{2}{n}\right) &= \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{n=2}^k \left(\frac{2}{n-1} - \frac{2}{n}\right) \\
&= \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{1} + \frac{2}{2} + \frac{2}{3} + \cdots + \frac{2}{k-1} - \frac{2}{2} - \frac{2}{3} - \cdots - \frac{2}{k-1} - \frac{2}{k}\right) \\
&= \lim_{k \rightarrow \infty} \left(2 - \frac{2}{k}\right) = 2
\end{aligned}$$

(iv) $\sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\frac{5n+1}{2n-1}}_{=a_n}$ divergiert, denn die notwendige Konvergenzbedingung ist nicht erfüllt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5n+1}{2n-1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5 + 1/n}{2 - 1/n} = \frac{5}{2} \neq 0.$$

Lösung 16:

a) Es gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2 \cdot (-1)^n}{n} - \frac{1}{n+1} \right) = 2 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^n}{n} - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} = 0.$$

Die Reihe umgeschrieben lautet:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2 \cdot (-1)^n}{n} - \frac{1}{n+1} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{2}{n} - \frac{1}{n+1} \right).$$

Da $a_n = \frac{2}{n} - \frac{(-1)^n}{n+1} > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt, alterniert die Reihe.

Damit das Leibniz-Kriterium angewendet werden kann, muss a_n noch monoton fallen. Es müsste also $a_n \geq a_{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gelten. Man erhält jedoch mit

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{n} - \frac{(-1)^n}{n+1} \geq \frac{2}{n+1} - \frac{(-1)^{n+1}}{n+2} = a_{n+1} \\ \Rightarrow 2(n+1)(n+2) - (-1)^n n(n+2) &\geq 2n(n+2) - (-1)^{n+1} n(n+1) \\ \Rightarrow 2n+4 &\geq (-1)^n (n(n+2) + n(n+1)) = (-1)^n (2n^2 + 3n) \end{aligned}$$

einen Widerspruch für alle geraden n .

b) (i) Es handelt sich um eine alternierende Reihe, die nach dem Leibniz-Kriterium konvergiert, denn es gilt:

$$\begin{aligned} \text{i. } a_n &:= \frac{n+1}{(n+2)(n+3)} \geq 0 \\ \text{ii. } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{(n+2)(n+3)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1/n + 1/n^2}{1 + 5/n + 6/n^2} = 0 \\ \text{iii. } a_n &\text{ fällt monoton, denn} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 0 &\leq n \\ \Rightarrow (n+2)^2 = n^2 + 4n + 4 &\leq n^2 + 5n + 4 = (n+1)(n+4) \\ \Rightarrow \frac{n+2}{n+4} &\leq \frac{n+1}{n+2} \\ \Rightarrow a_{n+1} = \frac{n+2}{(n+3)(n+4)} &\leq \frac{n+1}{(n+2)(n+3)} = a_n. \end{aligned}$$

- (ii) Man verlangt für die Abschätzung des Wertes S der Reihe durch die Partialsummen S_k

$$|S - S_k| \leq a_{k+1} = \frac{k+2}{(k+3)(k+4)} \stackrel{!}{<} 0.001.$$

Aus $a_{995} = 0.001001$ und $a_{996} = 0.000999998$ erhält man $k \geq N = 995$. Die Partialsummenwerte lauten $S_{995} = 0.0789413$ und $S_{996} = 0.0799413$.

- (iii) Mit dem Mathematica-Befehl

$$\text{NSum}[(-1)^n \cdot (n+1)/(n^2 + 5n + 6), \{n, 0, k\}]$$

berechnet man die Partialsummen und erhält

$$S_{1129} = 0.0790004 \leq S \leq S_{892} = 0.07999930$$

Für den Grenzwert bedeutet dies $S = 0.079 \dots$.

Lösung 17:

- a) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt{n^2 + n} - n \right)^n$ konvergiert absolut nach dem Wurzelkriterium, denn mit $a_n = \left(\sqrt{n^2 + n} - n \right)^n$ erhält man

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n^2 + n} - n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + n - n^2}{\sqrt{n^2 + n} + n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{1 + 1/n} + 1} = \frac{1}{2} < 1$$

- b) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{n!}$ konvergiert absolut nach dem Quotientenkriterium, denn es gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{n+1} \cdot n!}{(n+1)! \cdot 2^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{n+1} = 0 < 1.$$

- c) Die Reihe konvergiert nicht, denn mit der geometrischen Summenformel erhält man

$$\begin{aligned} \frac{1}{16} + \frac{3}{32} + \frac{9}{64} + \frac{27}{128} + \frac{81}{256} + \dots &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \underbrace{\frac{1}{16} \left(\frac{3}{2} \right)^k}_{=a_k} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{16} \sum_{k=0}^n \left(\frac{3}{2} \right)^k \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{16} \cdot \frac{1 - (3/2)^{n+1}}{1 - 3/2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{8} ((3/2)^{n+1} - 1) = \infty \end{aligned}$$

Alternative Begründung:

Die notwendige Konvergenzbedingung für Reihen ist nicht erfüllt

$$\lim_{k \rightarrow \infty} a_k = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{16} \left(\frac{3}{2} \right)^k = \infty \neq 0.$$

d) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k+1}{k^2+1}$ divergiert nach dem Minorantenkriterium, denn es gilt

$$a_k = \frac{k+1}{k^2+1} \geq \frac{k+1}{k^2+k} = \frac{k+1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k+1}{k^2+1} \geq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = \infty.$$

Lösung 18:

a) $] -3, 5] \cap]2, 8] =]2, 5] \Rightarrow M_1 =]2, 5] \cup \left\{ a_n \in \mathbb{R} \mid a_n = \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N} \right\}$

$\Rightarrow M'_1 = \{0\} \cup]2, 5]$ und $M_1^0 =]2, 5[$, M_1 ist weder offen noch abgeschlossen

$$M_2 = \{0\} \cup [3, 4] \cup \left\{ a_n \in \mathbb{R} \mid a_n = 1 + \frac{1}{2n}, n \in \mathbb{N} \right\}$$

$\Rightarrow M'_2 = \{1\} \cup [3, 4]$ und $M_2^0 =]3, 4[$, M_2 ist weder offen noch abgeschlossen

$$M'_3 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq y \leq |x| \leq 1 \right\}, \quad M_3^0 = M_3, \quad M_3 \text{ ist offen.}$$

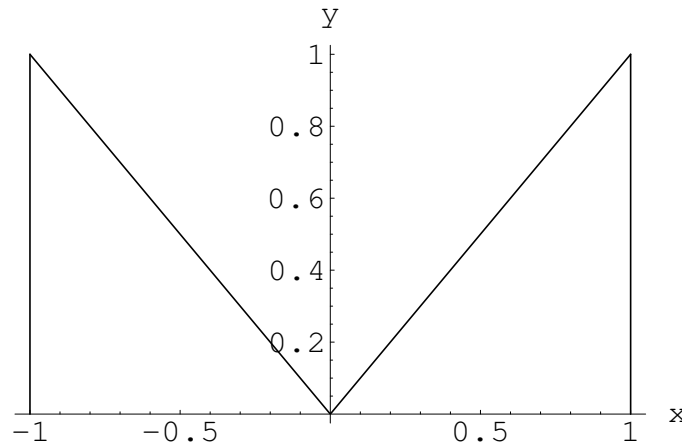


Bild 18 a) Menge M_3

b) (i) $\lim_{x \rightarrow \pi/2} \cos x \tan x = \lim_{x \rightarrow \pi/2} \sin x = 1$

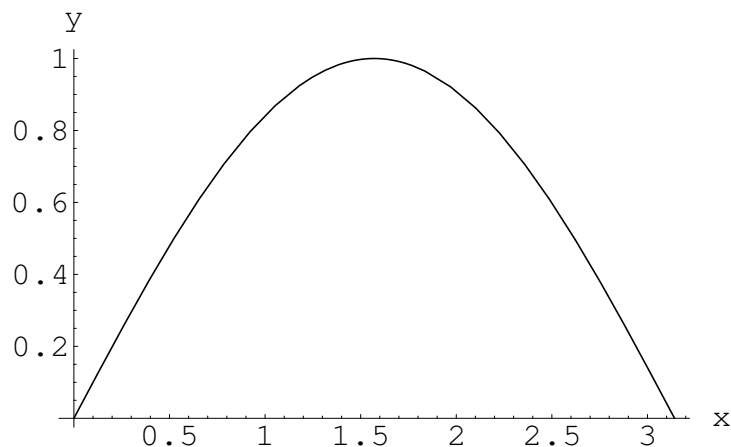


Bild 18 b) (i) $f(x) = \cos x \tan x = \sin x$

(ii) Der folgende Grenzwert existiert nur uneigentlich: $\lim_{x \rightarrow 1+} \frac{x+1}{\sqrt{x-1}} = \infty$

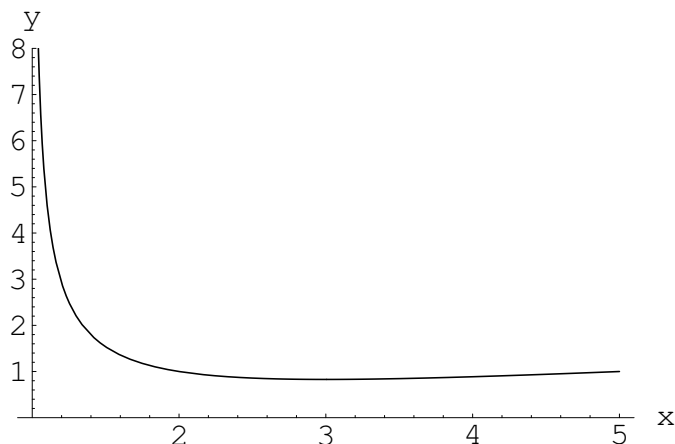


Bild 18 b) (ii) $f(x) = \frac{x+1}{\sqrt{x-1}}$

Lösung 19:

a) f kann im Punkt $x_0 = 0$ durch $f(0) = 0$ stetig ergänzt werden, denn dann gilt

$$|f(x) - f(0)| = \left| x \cdot \cos^2 \frac{1}{x} \right| \leq |x|.$$

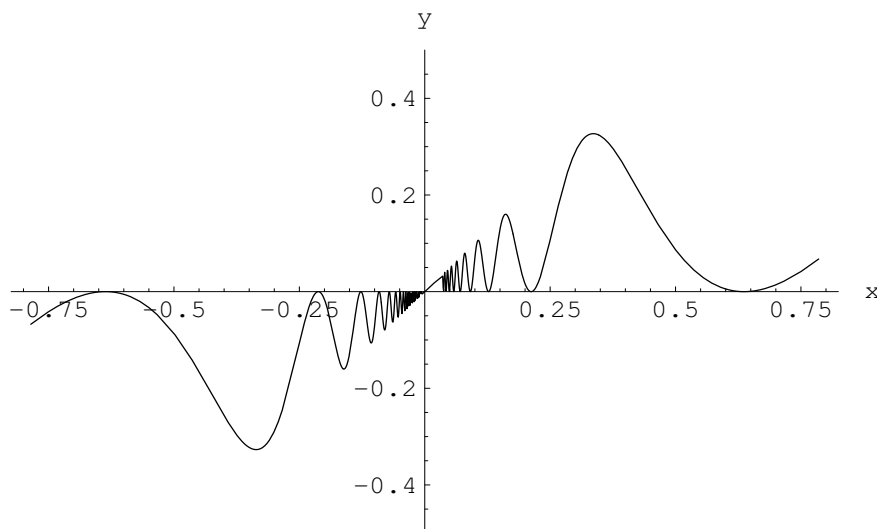


Bild 19 a): $f(x) = x \cos^2 \left(\frac{1}{x} \right)$

Das ε - δ -Kriterium ist erfüllt, wenn man zu beliebig vorgegebenem $\varepsilon > 0$ nun $\delta = \varepsilon$ wählt:

$$|x - x_0| = |x| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x) - f(0)| \leq |x| < \delta = \varepsilon.$$

b) g ist im Punkt $x_0 = 0$ unstetig, denn für Folgen $x \rightarrow x_0$ mit $x < 0$ gilt

$$\lim_{x \rightarrow 0-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0-} e^x = 1 \neq 0 = g(0) .$$

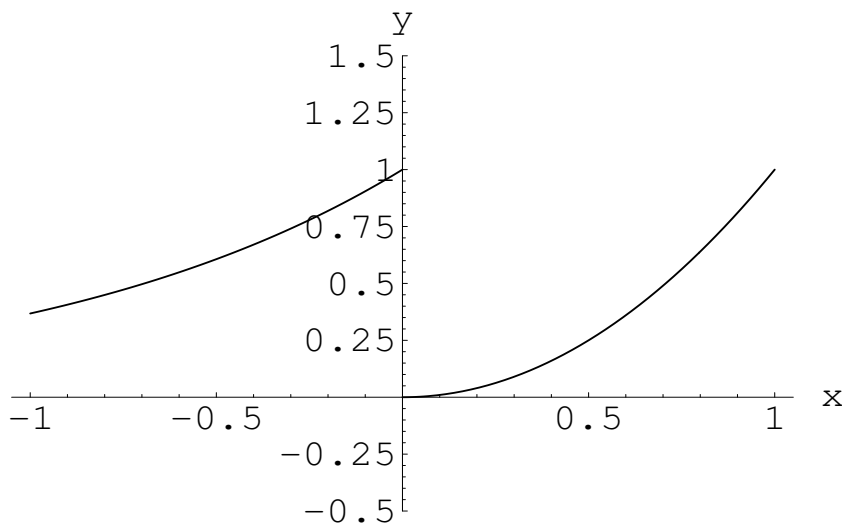


Bild 19 b): $g(x)$

Lösung 20:

a) Aus den gegebenen Werten für die Ableitung der Funktion folgt:

$$\begin{aligned} f(0) &= 0 , \\ f(x) &= -2x + a \quad \text{für } -\infty < x < -1 , \\ f(x) &= x^2 + b \quad \text{für } -1 < x < 2 , \\ f(x) &= x + c \quad \text{für } 2 < x < \infty \end{aligned}$$

mit Konstanten $a, b, c \in \mathbb{R}$. Diese ist stetig für $x \neq -1$ und $x \neq 2$.

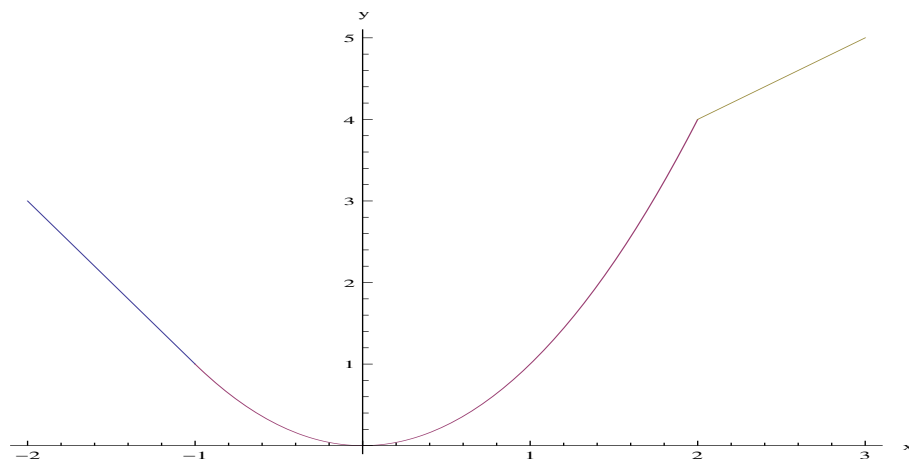
Mit $0 = f(0) = 0^2 + b$ erhält man $b = 0$.

Die Stetigkeitsforderung im Punkt $x = -1$ ergibt:

$$2 + a = \lim_{x \rightarrow -1-} f(x) \stackrel{!}{=} \lim_{x \rightarrow -1+} f(x) = (-1)^2 + b = 1 \Rightarrow a = -1 .$$

Die Stetigkeitsforderung im Punkt $x = 2$ ergibt:

$$4 = 2^2 + b = \lim_{x \rightarrow 2-} f(x) \stackrel{!}{=} \lim_{x \rightarrow 2+} f(x) = 2 + c \Rightarrow c = 2 .$$

Bild 20 a): $f(x)$ mit $a = -1$, $b = 0$ und $c = 2$

Die nun stetige Funktion f ist im Punkt $x = -1$ auch differenzierbar, denn es gilt

$$\lim_{x \rightarrow -1-} f'(x) = -2 = \lim_{x \rightarrow -1+} f'(x).$$

Im Punkt $x = 2$ ist f nicht differenzierbar, denn es gilt

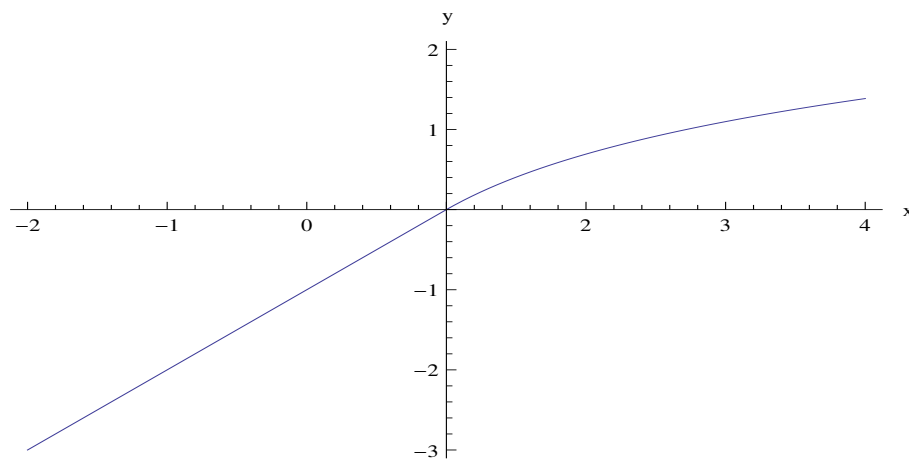
$$\lim_{x \rightarrow 2-} f'(x) = 4 \neq 1 = \lim_{x \rightarrow 2+} f'(x).$$

b) Stetigkeitsforderung im Punkt $x_0 = 1$

$$a + b = \lim_{x \rightarrow 1-} ax + b \stackrel{!}{=} f(1) = \ln 1 = 0 \Rightarrow b = -a,$$

Differenzierbarkeitsforderung im Punkt $x_0 = 1$

$$a = \lim_{x \rightarrow 1-} (ax + b)' = \lim_{x \rightarrow 1-} f'(x) \stackrel{!}{=} \lim_{x \rightarrow 1+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 1+} \frac{1}{x} = 1 \Rightarrow a = 1 \Rightarrow b = -1.$$

Bild 20 b): $f(x)$ mit $a = 1$ und $b = -1$

$$\begin{aligned} \text{c) } f(x) &= \cos x \quad \Rightarrow \quad f'(x) = -\sin x \\ \Rightarrow \quad T(x) &= f\left(\frac{\pi}{2}\right) + f'\left(\frac{\pi}{2}\right) \left(x - \frac{\pi}{2}\right) = \cos \frac{\pi}{2} - \sin \frac{\pi}{2} \cdot \left(x - \frac{\pi}{2}\right) = -\left(x - \frac{\pi}{2}\right) \end{aligned}$$

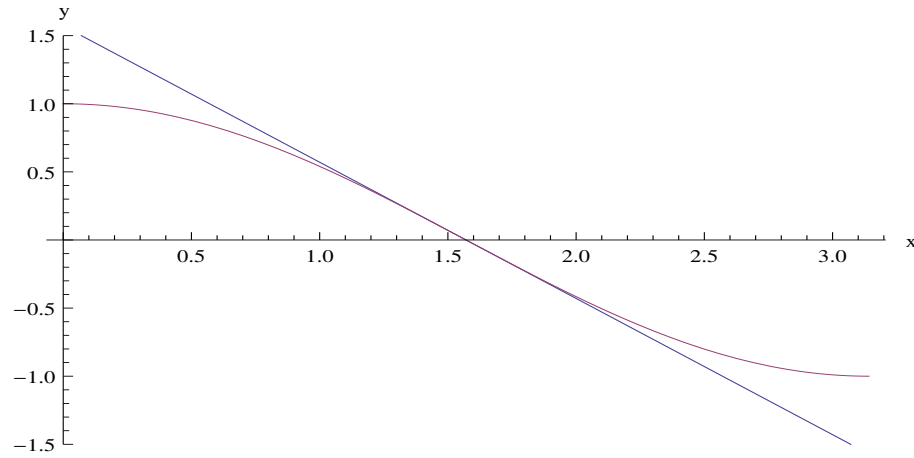


Bild 20 c): $f(x) = \cos x$ mit Tangente $T(x) = -\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$ in $x_0 = \frac{\pi}{2}$

Lösung 21:

$$\begin{aligned} \text{a) } \quad \text{i) } f(x) &= (2x+1)^{\sin x} = e^{\ln(2x+1)^{\sin x}} = e^{\sin(x) \ln(2x+1)} \\ f'(x) &= \left(e^{\sin(x) \ln(2x+1)}\right)' = e^{\sin(x) \ln(2x+1)} (\sin(x) \ln(2x+1))' \\ &= (2x+1)^{\sin x} \left(\cos(x) \ln(2x+1) + \frac{2 \sin x}{2x+1}\right) \\ \text{ii) } g'(x) &= \left(\frac{x + \sin x \cos x}{2}\right)' \\ &= \frac{1 + \cos^2 x - \sin^2 x}{2} = \frac{\cos^2 x + \cos^2 x}{2} = \cos^2 x \\ \text{b) } \quad \text{i) } h(x) &= \frac{x+2}{x^3+8} = \frac{1}{x^2-2x+4} \\ h'(x) &= \left(\frac{1}{x^2-2x+4}\right)' = -\frac{2x-2}{(x^2-2x+4)^2} \\ h''(x) &= -\left(\frac{2x-2}{(x^2-2x+4)^2}\right)' \\ &= -\frac{2(x^2-2x+4)^2 - (2x-2)2(2x-2)(x^2-2x+4)}{(x^2-2x+4)^4} \\ &= -\frac{2(x^2-2x+4) - 2(2x-2)^2}{(x^2-2x+4)^3} = \frac{6x^2-12x}{(x^2-2x+4)^3} \end{aligned}$$

$$\text{ii) } k(x) = \ln(x^2 - 1) = \ln((x+1)(x-1)) = \ln(x+1) + \ln(x-1)$$

$$k'(x) = (\ln(x^2 - 1))' = \frac{2x}{x^2 - 1}$$

$$k''(x) = \left(\frac{2x}{x^2 - 1} \right)' = \frac{2(x^2 - 1) - 2x \cdot 2x}{(x^2 - 1)^2} = -\frac{2x^2 + 2}{(x^2 - 1)^2}$$

Alternative Rechnung:

$$k'(x) = (\ln(x+1) + \ln(x-1))' = \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x-1} = \frac{2x}{x^2 - 1}$$

$$k''(x) = \left(\frac{1}{x+1} + \frac{1}{x-1} \right)' = -\frac{1}{(x+1)^2} - \frac{1}{(x-1)^2} = -\frac{2x^2 + 2}{(x^2 - 1)^2}$$

$$\text{c) i) } u'(x) = (2(1 - 3x)^2 + 4(5x - 2) - 7)' = -12(1 - 3x) + 20$$

$$u''(x) = (-12(1 - 3x) + 20)' = 36$$

$$u'''(x) = 0$$

$$\text{ii) } v'(x) = \left(\sqrt[3]{(5x+1)^2} \right)' = ((5x+1)^{2/3})' = \frac{10}{3}(5x+1)^{-1/3}$$

$$v''(x) = -\frac{50}{9}(5x+1)^{-4/3}$$

$$v'''(x) = \frac{1000}{27}(5x+1)^{-7/3}$$

Lösung 22:

$$\text{a) } f(x) = \cos(x^2 - \pi^2) \quad \Rightarrow \quad f(\pi) = 1,$$

$$f'(x) = -2x \sin(x^2 - \pi^2) \quad \Rightarrow \quad f'(\pi) = 0$$

$$f''(x) = -4x^2 \cos(x^2 - \pi^2) - 2 \sin(x^2 - \pi^2) \quad \Rightarrow \quad f''(\pi) = -4\pi^2$$

$$f'''(x) = -12x \cos(x^2 - \pi^2) + 8x^3 \sin(x^2 - \pi^2)$$

Man erhält die Taylor-Polynome: $T_1(x; \pi) = 1$ und $T_2(x; \pi) = 1 - 2\pi^2(x - \pi)^2$

b) Mit $3 < \xi < \pi$ gilt

$$\begin{aligned}
|f(3) - T_1(3; \pi)| &= |R_1(3; \pi)| = \left| \frac{f''(\xi)}{2!} (3 - \pi)^2 \right| \\
&= | -4\xi^2 \cos(\xi^2 - \pi^2) - 2 \sin(\xi^2 - \pi^2) | \frac{|3 - \pi|^2}{2} \\
&\leq (| -4\xi^2 \cos(\xi^2 - \pi^2) | + | -2 \sin(\xi^2 - \pi^2) |) \frac{|3 - \pi|^2}{2} \\
&\leq (4\xi^2 + 2) \frac{|3 - \pi|^2}{2} < (4\pi^2 + 2) \frac{|3 - \pi|^2}{2} = 0.41579... \\
|f(3) - T_2(3; \pi)| &= |R_2(3; \pi)| = \left| \frac{f'''(\xi)}{3!} (3 - \pi)^3 \right| \\
&= | -12\xi \cos(\xi^2 - \pi^2) + 8\xi^3 \sin(\xi^2 - \pi^2) | \frac{|3 - \pi|^3}{6} \\
&\leq (| -12\xi \cos(\xi^2 - \pi^2) | + | 8\xi^3 \sin(\xi^2 - \pi^2) |) \frac{|3 - \pi|^3}{6} \\
&\leq (12\xi + 8\xi^3) \frac{|3 - \pi|^3}{6} < (12\pi + 8\pi^3) \frac{|3 - \pi|^3}{6} = 0.13519...
\end{aligned}$$

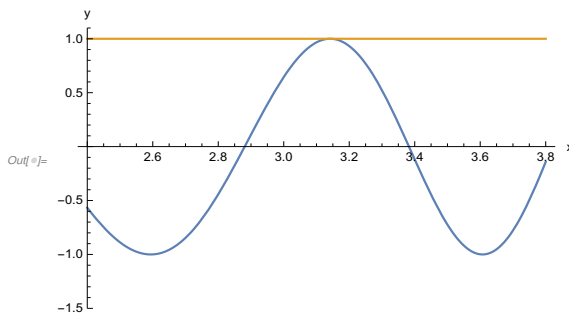


Bild 22 a): Funktionsgraphen von $f(x) = \cos(x^2 - \pi^2)$ und $T_1(x; \pi)$

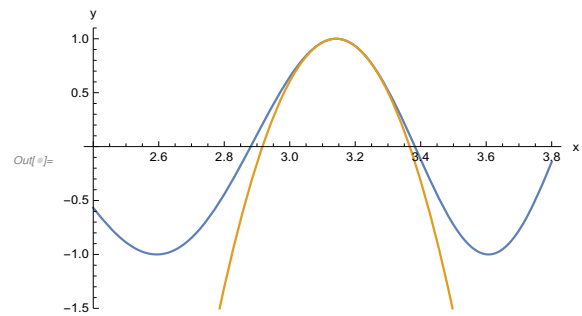


Bild 22 b): Funktionsgraphen von $f(x) = \cos(x^2 - \pi^2)$ und $T_2(x; \pi)$

Lösung 23:

a) Mit Hilfe der Regel von l'Hospital ergibt sich

(i)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{(x^2)} - 1}{1 - \cos x} \stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2xe^{(x^2)}}{\sin x} \stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2e^{(x^2)} + 4x^2e^{(x^2)}}{\cos x} = 2.$$

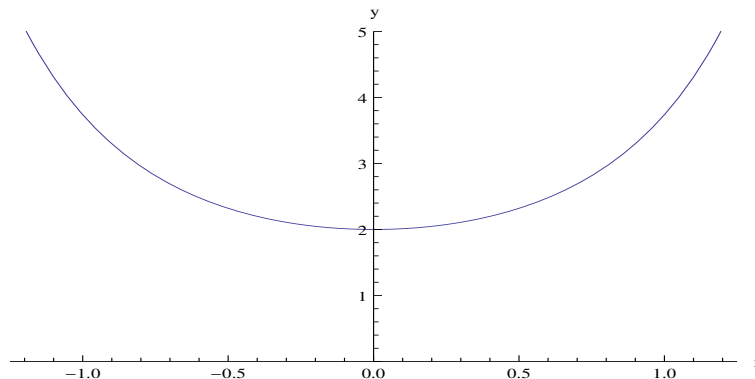


Bild 23 a (i) $f(x) = \frac{e^{(x^2)} - 1}{1 - \cos x}$

(ii)

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} x \ln \left(\frac{2x+3}{2x-1} \right) &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln \left(\frac{2x+3}{2x-1} \right)}{1/x} \stackrel{0}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{2x-1}{2x+3} \cdot \frac{2(2x-1)-2(2x+3)}{(2x-1)^2}}{-1/x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{8x^2}{(2x+3)(2x-1)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{8x^2}{4x^2 + 4x - 3} = 2. \end{aligned}$$

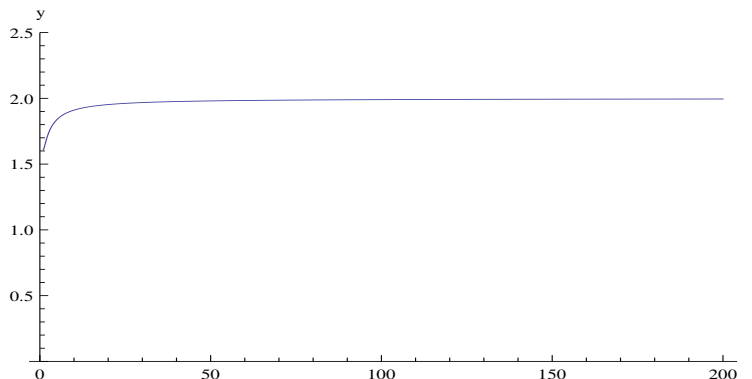


Bild 23 a (ii) $f(x) = x \ln \left(\frac{2x+3}{2x-1} \right)$

- b) Die Nullstellen von $g'(x) = 3x^2 - 9$ lauten $x_1 = -\sqrt{3}$, $x_2 = \sqrt{3}$. Die Monotoniebereiche von g ergeben sich aus dem Vorzeichenverhalten von g' :

$$g'(x) = 3(x+\sqrt{3})(x-\sqrt{3}) \left\{ \begin{array}{ll} > 0, & x \in]-\infty, -\sqrt{3}[\Rightarrow g \text{ streng monoton wachsend} \\ = 0, & x = -\sqrt{3} \Rightarrow x_1 = -\sqrt{3} \text{ streng lokales Maximum} \\ < 0, & x \in]-\sqrt{3}, \sqrt{3}[\Rightarrow g \text{ streng monoton fallend} \\ = 0, & x = \sqrt{3} \Rightarrow x_2 = \sqrt{3} \text{ streng lokales Minimum} \\ > 0, & x \in]\sqrt{3}, \infty[\Rightarrow g \text{ streng monoton wachsend} \end{array} \right.$$

Nur beim Funktionsgraphen von $g_4(x) = x^3 - 9x$ stimmt das Monotonieverhalten mit dem von g überein.

Die Abbildungsvorschriften zu den anderen Funktionsgraphen lauten

$$g_1(x) = x^3/5,$$

$$g_2(x) = 10 \sin x,$$

$$g_3(x) = 12x - x^3.$$

Lösung 24:

$$f(x) = \frac{11x - x^3}{x^2 - 9} = -\frac{x(x^2 - 11)}{(x+3)(x-3)} = -x + \frac{2x}{(x+3)(x-3)} = -x + \frac{1}{x+3} + \frac{1}{x-3}$$

- a) Definitionsbereich: $D = \mathbb{R} \setminus \{-3, 3\}$

b) Symmetrie: f ist ungerade, denn

$$f(-x) = \frac{11(-x) - (-x)^3}{(-x)^2 - 9} = -\frac{11x - x^3}{x^2 - 9} = -f(x)$$

c) Pol 1. Ordnung bei $x_4 = 3$ mit Vorzeichenwechsel:

$$\lim_{x \rightarrow 3+} f(x) = \infty, \quad \lim_{x \rightarrow 3-} f(x) = -\infty$$

Pol 1. Ordnung bei $x_5 = -3$ mit Vorzeichenwechsel:

$$\lim_{x \rightarrow -3+} f(x) = \infty, \quad \lim_{x \rightarrow -3-} f(x) = -\infty$$

d) $y = -x$ ist Asymptote: $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) + x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x}{(x+3)(x-3)} = 0.$

Verhalten im Unendlichen: $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \infty.$

e) Nullstellen: $f(x) = 0 \Leftrightarrow x(11 - x^2) = 0 \Rightarrow x_1 = 0, x_2 = \sqrt{11}, x_3 = -\sqrt{11}$

$$f(x) = -\frac{x(x - \sqrt{11})(x + \sqrt{11})}{(x + 3)(x - 3)} \left\{ \begin{array}{ll} > 0 \text{ für } x \in] -\infty, -\sqrt{11}[& \Rightarrow f \text{ ist positiv} \\ < 0 \text{ für } x \in] -\sqrt{11}, -3[& \Rightarrow f \text{ ist negativ} \\ > 0 \text{ für } x \in] -3, 0[& \Rightarrow f \text{ ist positiv} \\ < 0 \text{ für } x \in] 0, 3[& \Rightarrow f \text{ ist negativ} \\ > 0 \text{ für } x \in] 3, \sqrt{11}[& \Rightarrow f \text{ ist positiv} \\ < 0 \text{ für } x \in] \sqrt{11}, \infty[& \Rightarrow f \text{ ist negativ} \end{array} \right.$$

f) Extrema und Monotonie

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(11 - 3x^2)(x^2 - 9) - (11x - x^3)2x}{(x^2 - 9)^2} \\ &= \frac{-x^4 + 16x^2 - 99}{(x^2 - 9)^2} = -\frac{(x^2 - 8)^2 + 35}{(x^2 - 9)^2} < 0 \end{aligned}$$

f fällt im Definitionsbereich streng monoton. Es gibt keine Extrema.

g) Wendepunkte und Konvexität im Definitionsbereich:

$$\begin{aligned} f''(x) &= -\frac{2(x^2 - 8)2x(x^2 - 9)^2 - ((x^2 - 8)^2 + 35)2(x^2 - 9)2x}{(x^2 - 9)^4} \\ &= -\frac{4x((x^2 - 8)(x^2 - 9) - ((x^2 - 8)^2 + 35))}{(x^2 - 9)^3} = \frac{4x(x^2 + 27)}{(x^2 - 9)^3} \end{aligned}$$

$$f''(x) \left\{ \begin{array}{ll} < 0 \text{ für } x \in] -\infty, -3[& \Rightarrow f \text{ ist streng konkav} \\ > 0 \text{ für } x \in] -3, 0[& \Rightarrow f \text{ ist streng konvex} \\ = 0 \text{ in } x_1 = 0 \text{ Wendepunkt,} & \text{Links-Rechtskurve} \\ < 0 \text{ für } x \in] 0, 3[& \Rightarrow f \text{ ist streng konkav} \\ > 0 \text{ für } x \in] 3, \infty[& \Rightarrow f \text{ ist streng konvex} \end{array} \right.$$

Einziger Wendepunkt im Definitionsbereich ist $x_1 = 0$.

h)

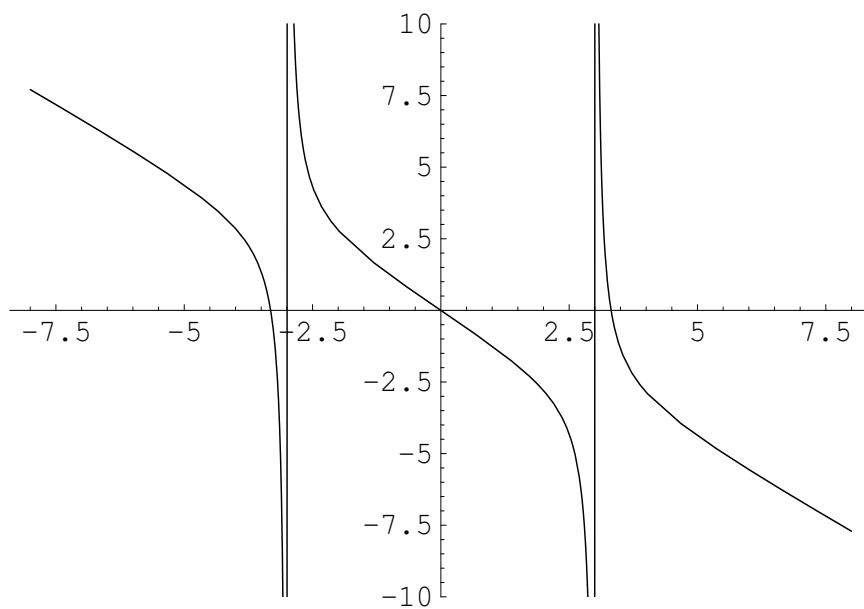


Bild 24 Funktionsgraph von $f(x) = \frac{11x - x^3}{x^2 - 9}$