Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **SoSe 2019**
©Dr. K. Rothe

Hörsaalübungsaufgaben und Lösungen zu

Analysis II

für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Aufgabe 1:
Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{für} \quad x \geq 0\,, \\ 1 - x^2 & \text{für} \quad x < 0\,. \end{cases}$$

Ist der Mittelwertsatz $\quad g'(x_0) = \dfrac{g(b) - g(a)}{b - a} \quad$ mit $\quad x_0 \in]a, b[\quad$ für $a = -1$ und $b = 1$ auf f anwendbar? Man bestimme gegebenenfalls eine Zwischenstelle x_0.

Aufgabe 2:
Für die folgenden Funktionen $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ mit $x \mapsto f(x)$ bestimme man mit Hilfe des Mittelwertsatzes eine Konstante $L \in \mathbb{R}$, so dass für beliebige $x_1, x_2 \in [a, b]$ gilt

$$|f(x_2) - f(x_1)| \leq L|x_2 - x_1|$$

und überprüfe, ob $f([a, b]) \subset [a, b]$ gilt:

a) $[a, b] = [0, 1]$ und $f_1(x) = \cosh(x) - 1$,

b) $[a, b] = [-3, -1]$ und $f_2(x) = (x + 2)^2 - 4$.

Aufgabe 3:
Gegeben sei die durch $f(x) = \dfrac{5}{2-3x}$ definierte Funktion.

a) Man zeichne die Funktion f.

b) Man beweise durch vollständige Induktion, dass für $k \geq 0$ gilt

$$f^{(k)}(x) = \frac{5 \cdot 3^k \cdot k!}{(2-3x)^{k+1}} .$$

c) Man berechne die Taylor-Reihe von f zum Entwicklungspunkt $x_0 = \dfrac{1}{3}$.

d) Man untersuche die Konvergenz der Taylor-Reihe in den Punkten $x_1 = \dfrac{1}{2}$ und $x_2 = \dfrac{2}{3}$.

Aufgabe 4:
Aus einem kreisförmigen Stück Pappe vom Radius R wird ein Sektor mit dem Winkel α herausgeschnitten. Dieser Kreissektor wird an den Schnittflächen so zusammengeklebt, so dass ein Kegel entsteht.

Für welchen Winkel α besitzt dieser Kegel maximales Volumen? Man berechne dieses Maximalvolumen.

Aufgabe 5:
Gegeben sei die durch $\Phi(x) = e^x - 2$ definierte Funktion.

a) Man zeige, dass Φ genau zwei Fixpunkte besitzt.

b) Man gebe ein Intervall D an, in dem die Fixpunktiteration

$$x_{k+1} = \Phi(x_k) , \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

für jeden Startwert $x_0 \in D$ auf Grund des Fixpunktsatzes gegen einen Fixpunkt x^* konvergiert.

Wieviele Iterationsschritte n werden nach der a priori-Abschätzung für eine Genauigkeit von $|x_n - x^*| < 10^{-4}$ höchstens benötigt?

c) Man berechne den Fixpunkt mit einem absoluten Fehler von $|x_n - x^*| < 10^{-4}$.

Aufgabe 6:
Man untersuche die Funktionenfolgen

$$\text{a)}\quad f_n : [-2,2] \to \mathbb{R},\ f_n(x) = \frac{1}{1+ne^{x^2}}\ ,\quad \text{b)}\quad h_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ h_n(x) = \frac{nx^2}{1+nx^2}\ .$$

auf punktweise und gleichmäßige Konvergenz.

Aufgabe 7:
Gegeben seien die folgenden Funktionenreihen

$$\text{(i)}\quad f(x) = \sum_{k=0}^{\infty}(x^3-1)(2-x^3)^k\ ,\qquad \text{(ii)}\quad g(x) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(k+1)^3(x^{2k}+1)}\ .$$

Man bestimme den maximalen Konvergenzbereich D und untersuche die Reihen auf punktweise und gleichmäßige Konvergenz in D.

Aufgabe 8:

a) Für folgende Potenzreihen bestimme man den Entwicklungspunkt und berechne den Konvergenzradius:

$$\text{(i)}\quad \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sqrt{n+1}}{n^2+4}\,x^n\quad ,\quad \text{(ii)}\quad \sum_{n=0}^{\infty}\left(\left(\frac{2}{5}\right)^2 x\right)^{2n}\ .$$

b) Man bestimme den Entwicklungspunkt, den Konvergenzradius und das Konvergenzintervall der folgenden Potenzreihe

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2x+1)^n}{\sqrt{n+1}}$$

und untersuche das Konvergenzverhalten in den Randpunkten des Konvergenzintervalls (mit Begründung).

Aufgabe 9:

a) Unter Verwendung der Summenformel für die geometrische Reihe:

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{k=0}^{\infty} z^k$$

berechne man die Potenzreihe für die durch $f(z) = \dfrac{6}{5-4z}$ definierte Funktion zum Entwicklungspunkt z_0 und bestimme deren Konvergenzradius für $z_0 = \dfrac{3i}{4}$.

b) Man berechne die Potenzreihe von $g(x) = \dfrac{1}{(5-4x)^2}$ zum Entwicklungspunkt x_0 und bestimme den zugehörigen Konvergenzradius.

Aufgabe 10:

Gegeben sei die durch $f(x) = \dfrac{6}{5-4x}$ definierte Funktion.

Man bestimme die Glieder der Potenzreihenentwicklung von f mit Entwicklungspunkt $x_0 = 0$ über die Rekursionsformel aus dem Cauchy-Produkt von Reihen, sowie den zugehörigen Konvergenzradius.

Aufgabe 11:

Man berechne die Lösung der gewöhnlichen Differentialgleichung erster Ordnung

$$y' = y$$

mit dem Anfangswert $y(0) = 3$ in folgender Potenzreihendarstellung

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k.$$

Aufgabe 12:

a) (i) Man berechne die Ableitung von $f(x) = \ln(2+x)$ und damit die Potenzreihe von $\ln(2+x)$ zum Entwicklungspunkt $x_0 = 0$ und bestimme deren Konvergenzradius.

(ii) Man untersuche das Konvergenzverhalten der unter (i) bestimmten Potenzreihe in den Randpunkten und berechne im Falle der Konvergenz den Wert der entsprechenden Reihe.

b) Man berechne die Potenzreihe für die durch $g(x) = \sqrt[3]{8+3x}$ gegebene Funktion zum Entwicklungspunkt $x_0 = 0$ und bestimme deren Konvergenzradius.

Aufgabe 13:
Für die Stützstellen x_i und sind nur die Funktionswerte f_i bekannt

x_i	-1	1	3	5
f_i	-15	3	-3	15 .

a) Man gebe die Lagrange-Darstellung des Polynoms p_3 an, das die obigen Daten interpoliert.

b) Man zeichne p_3.

c) Man gebe das Gleichungssystem an, dass p_3 in der Darstellung $p_3(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$ aufgrund der obigen Interpolationsdaten erfüllen muss.

Aufgabe 14:

a) Das (lineare) Polynom $p_{1,1}$ interpoliere die Stützpunkte $(x_0, y_0), (x_1, y_1)$ und $p_{2,1}$ interpoliere $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$. Man rechne durch einsetzen nach, dass

$$p_{2,2}(x) = p_{2,1}(x) + \frac{x - x_2}{x_0 - x_2}\,(p_{1,1}(x) - p_{2,1}(x))$$

die Stützpunkte $(x_0, y_0), (x_1, y_1), (x_2, y_2)$ interpoliert.

b) Von der Funktion $g(x) = \ln x$ seien nur die Stützstellen

x_i	0.5	1	2
$\ln x_i$	-0.693	0	0.693

bekannt.

(i) Für das Interpolationspolynom p niedrigsten Grades berechne man $p(1.5)$ als Näherungswert für $\ln 1.5$ mit Hilfe des Schemas von Neville-Aitken.

(ii) Wie groß ist der Fehler höchstens und wie groß mindestens?

(iii) Man berechne $p(1.5)$ mit einem Matlab-Programm nach dem Schema von Neville-Aitken.

Aufgabe 15:

a) Von der Funktion $\sinh(x)$ sind nur die Stützstellen

x_i	0	3	6
$\sinh x_i$	0	10	201.7

gegeben. Man berechne das zugehörige Interpolationspolynom $p_2(x)$.

b) Man berechne $p_2(4)$ als Näherungswert für $\sinh(4)$. Wie groß ist der Fehler höchstens? Man berechne zum Vergleich den tatsächlichen Fehler.

c) Man zeichne $\sinh(x)$ und $p_2(x)$ im Intervall $[0, 6.5]$.

d) Zusätzlich sei noch $\sinh(5) = 74.2$ gegeben. Mit dieser Information führe man a) bis c) bzgl. $p_3(x)$ durch.

e) Man schreibe ein Matlab-Programm zur Koeffizientenberechnung eines Newtonschen Interpolationspolynoms und teste dies am obigen Beispiel.

Aufgabe 16:

a) Man berechne den natürlichen kubischen Interpolationsspline $s(x)$ zu folgenden Daten

k	0	1	2	3
x_k	0	2	3	4
f_k	4	0	1	4 .

Diese Daten wurden durch die Funktion $f(x) = (x-2)^2$ erzeugt.

b) Man zeichne die Funktionsgraphen von $s(x)$ und $f(x)$.

c) Warum kann $s(x)$ nicht mit $f(x)$ übereinstimmen?

d) Man zeichne $s(x)$ unter Verwendung der Matlab-Routinen 'spline', 'linspace', 'ppval' und 'plot'.

Aufgabe 17:
Man berechne alle Stammfunktionen zu

a) $f_1(x) = 2x^5 - 5\sin(x)$, b) $f_2(x) = 4\cos(x) - 7\sinh(x)$

c) $f_3(x) = \dfrac{2 + xe^x}{x}$, d) $f_4(x) = \dfrac{3x^5 - 5x^3 + 4x}{\sqrt{x}}$.

Aufgabe 18:
Mit Hilfe der partiellen Integrationsregel berechne man

a) $\displaystyle\int (3x-1)\cosh(x)\,dx$, b) $\displaystyle\int x\ln(x)\,dx$, c) $\displaystyle\int x^2\cos(x)\,dx$,

d) $\displaystyle\int \cos(t)\sinh(t)\,dt$, e) $\displaystyle\int 15x\sqrt{x-1}\,dx$ f) $\displaystyle\int \tan(x)\,dx$.

Aufgabe 19:
Mit Hilfe der Substitutionsregel berechne man

a) $\displaystyle\int \cos(x)\sin^3(x)\,dx$, b) $\displaystyle\int 2x\sqrt{x^2+1}\,dx$, c) $\displaystyle\int x^2 e^{x^3}\,dx$,

d) $\displaystyle\int \frac{(\ln(2t+3))^4}{6t+9}\,dt$, e) $\displaystyle\int \frac{e^x}{e^{2x}+1}\,dx$, f) $\displaystyle\int \tan(x)\,dx$.

Aufgabe 20:

a) Man berechne den (positiven) Flächeninhalt F, der durch die Teilmenge

$$M = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon x^3 \le y \le \sqrt{x}\right\}$$

des $\mathbb{R}^2$ gegeben ist.

b) Man berechne die folgenden Integrale

(i) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} e^x \sin(x)\,dx$, (ii) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin(x)\cos^2(x)\,dx$, (iii) $\displaystyle\int_0^{4} x\sqrt{2x+1}\,dx$.

Aufgabe 21:
Man berechne die folgenden Integrale

a) $\displaystyle\int \frac{3}{5-2x}\,dx$, b) $\displaystyle\int \frac{1}{(7x-4)^2}\,dx$, c) $\displaystyle\int \frac{6x^3-3x^2+2x-3}{2x-1}\,dx$,

d) $\displaystyle\int \frac{5}{x^2+2}\,dx$, e) $\displaystyle\int \frac{5x}{2x^2+2}\,dx$, f) $\displaystyle\int \frac{6x}{x^2+4x+5}\,dx$.

Aufgabe 22:
Man berechne folgende Integrale ggf. unter Verwendung der Partialbruchzerlegungsmethode

a) $\displaystyle\int \frac{7}{3x^2+15x-18}\,dx$,

b) $\displaystyle\int \frac{x^3+x^2-35x+17}{x^2+6x-7}\,dx$,

c) $\displaystyle\int \frac{9}{(2x^2+3)^2}\,dx$.

Aufgabe 23:
Man berechne unter Verwendung der Partialbruchzerlegungsmethode

$$\int \frac{8x^3-43x^2+46x-39}{x^4-4x^3+27}\,dx \,.$$

Aufgabe 24:
Man berechne die unbestimmten Integrale

a) $\displaystyle\int \cosh^2 t\,dt$, b) $\displaystyle\int \sqrt{1+x^2}\,dx$, c) $\displaystyle\int \frac{e^{3x}}{e^{3x}+4}\,dx$, d) $\displaystyle\int \frac{1}{\cos x}\,dx$.

Aufgabe 25:

a) Man berechne die uneigentlichen Integrale, falls sie existieren

$$\text{(i)} \quad \int_1^9 \frac{4}{(x-1)^{2/3}}\,dx\,, \qquad \text{(ii)} \quad \int_0^\infty \frac{2}{(x+1)^{3/4}}\,dx\,.$$

b) Man untersuche die folgenden uneigentlichen Integrale auf Konvergenz (ohne sie zu berechnen)

$$\text{(i)} \quad \int_0^\infty \frac{x^2+1}{x^5+3}\,dx\,, \qquad \text{(ii)} \quad \int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{x^4+x^3}\,dx\,.$$

Aufgabe 26:

a) Man berechne die Ableitung des parameterabhängigen Integrals

$$F(x) = \int_1^{2x} e^{3x+y}\, dy$$

(i) durch Integration nach y und anschließendes Ableiten nach x,

(ii) durch Ableiten nach x und anschließende Integration nach y.

b) Man berechne für $f(t) = \cos(\gamma t)$ mit $\gamma \in \mathbb{R}$ die Laplace-Transformierte $F(s)$ für $s > 0$

$$F(s) \;=\; \int_0^{\infty} f(t) e^{-st}\, dt\,.$$

Aufgabe 27:
Gegeben sei die Funktion

$$f \;:\; [0, \pi/2] \;\longrightarrow\; \mathbb{R} \quad \text{mit} \quad f(x) = \sin x\,.$$

a) Man berechne das Volumen des Rotationskörpers, wenn der Funktionsgraph von f um die $x-$Achse rotiert.

b) Man berechne das Volumen des Rotationskörpers, wenn der Funktionsgraph von f um die $y-$Achse rotiert.

c) Man berechne die Mantelfläche des Rotationskörpers, wenn der Funktionsgraph von f um die $x-$Achse rotiert.

d) Man zeichne die Mantelfächen der Rotationskörper aus a) und b) mit Hilfe der MATLAB-Routine 'ezsurf'.

Aufgabe 28:
Man berechne die Bogenlängen der folgenden Kurven $\mathbf{c}$ mit

$$\text{a)}\ \mathbf{c}(t) = \begin{pmatrix} 2t \\ t^{3/2} \end{pmatrix}\,,\ t \in [0, 1]\,, \qquad \text{b)}\ \mathbf{c}(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \\ t/10 \end{pmatrix}\,,\ t \in [0, 8\pi]\,.$$

und zeichne die Kurven.

Lösung 1:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{für} \quad x \geq 0\,, \\ 1-x^2 & \text{für} \quad x < 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \; f'(x) = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad x \geq 0, \\ -2x & \text{für} \quad x < 0 \end{cases} \; .$$

Da f stetig differenzierbar ist, sind die Voraussetzungen des Mittelwertsatzes erfüllt und es lässt sich eine Zwischenstelle $x_0 \in \,]-1,1[$ berechnen:

$$f'(x_0) = \frac{f(1)-f(-1)}{1-(-1)} = \frac{1-(1-(-1)^2)}{2} = \frac{1}{2} \;\Rightarrow\; -2x_0 = \frac{1}{2} \;\Rightarrow\; x_0 = -\frac{1}{4}.$$

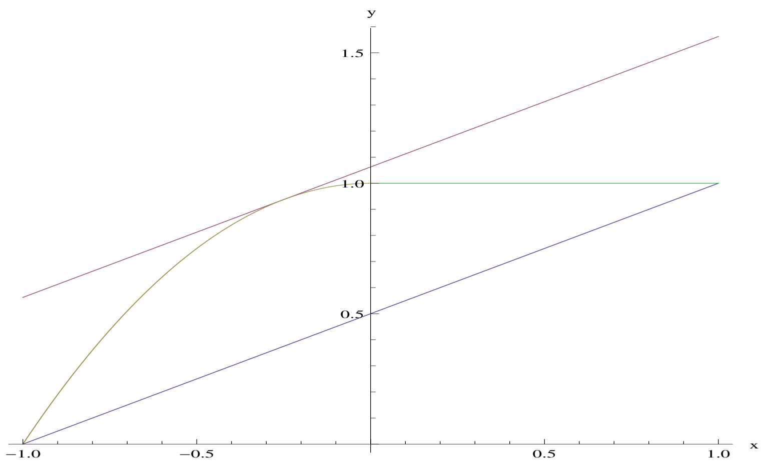


Bild 1 $f(x)$ mit Tangente in $x_0 = -\dfrac{1}{4}$ und Sekante für $a=-1$ und $b=1$

Lösung 2:

Aus dem Mittelwertsatz erhält man mit $x_0 \in]a,b[$

$$|f(b)-f(a)| = |f'(x_0)| \cdot |b-a| \leq \underbrace{\max_{x\in[a,b]} |f'(x)|}_{=:L} \cdot |b-a| \,.$$

a)

$$L = \max_{x\in[0,1]} |f_1'(x)| = \max_{x\in[0,1]} |\sinh x| = \sinh 1 = 1.1752....$$

f_1 wächst in $[0,1]$ streng monoton, denn es gilt $f_1'(x) = \sinh(x) > 0$ für $x \in \,]0,1]$. Damit nimmt f_1 seinen Maximalwert für $x=1$ und seinen Minimalwert in $x=0$ an. Man erhält also

$$f_1([0,1]) = [f_1(0), f_1(1)] = [0, \cosh(1)-1] = [0, 0.543...] \subset [0,1]\,.$$

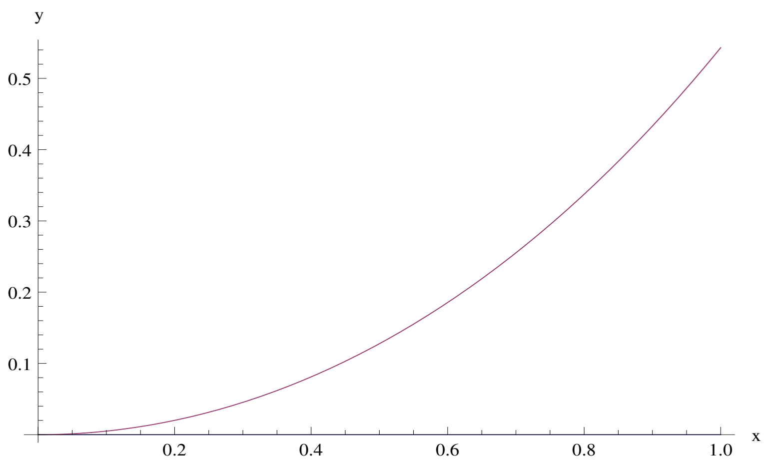


Bild 2 a) $f_1(x) = \cosh(x) - 1$

b)

$$L = \max_{x \in [-3,-1]} |f_2'(x)| = \max_{x \in [-3,-1]} |2(x+2)| = 2.$$

Aus der Scheitelpunktform $f_2(x) = (x+2)^2 - 4$ erhält man Minimalwert $f_2(-2) = -4$ und in $[-3,-1]$ den Maximalwert für $f_2(-3) = -3 = f_2(-1)$. Damit ergibt sich

$$f_2([-3,-1]) = [f_2(-2), f_2(-1)] = [-4,-3] \not\subset [-3,-1]\,.$$

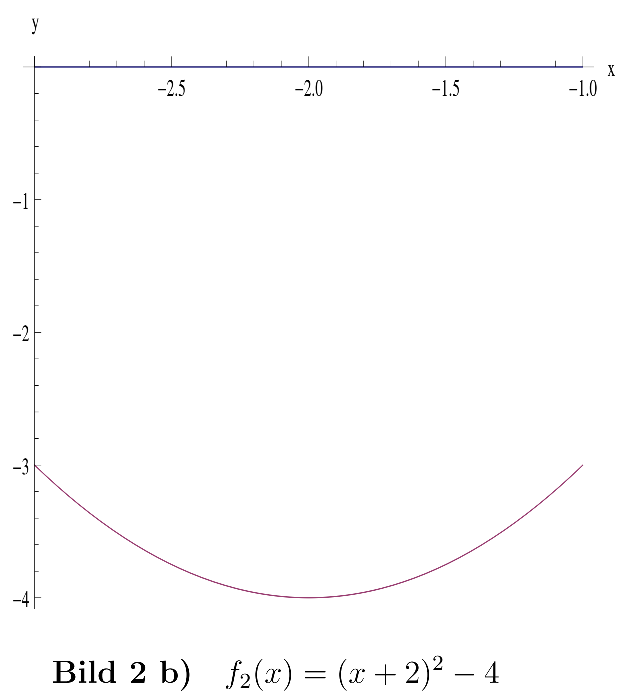


Bild 2 b) $f_2(x) = (x+2)^2 - 4$

Lösung 3:

a)

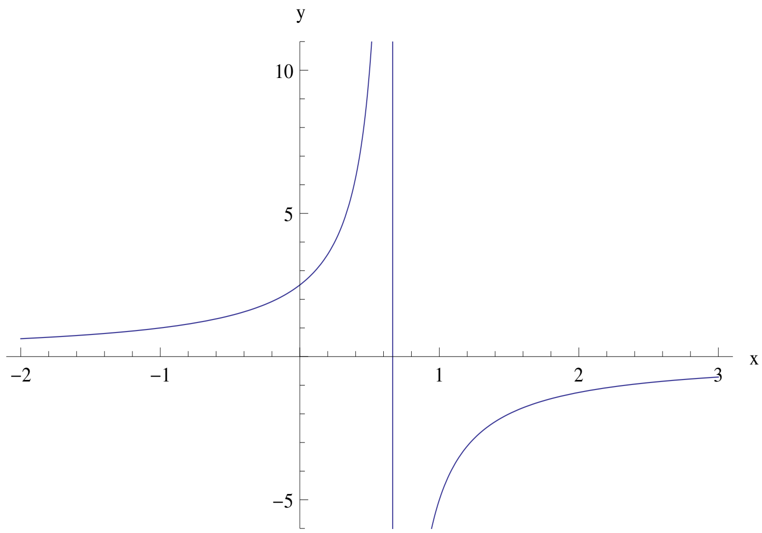


Bild 3 $f(x) = \dfrac{5}{2-3x}$

b) $k = 0$: $\quad \dfrac{5 \cdot 3^0 \cdot 0!}{(2-3x)^{0+1}} = \dfrac{5}{2-3x} = f(x) = f^{(0)}(x)$

$k \to k+1$:

$$\begin{aligned} f^{(k+1)}(x) &= \left(f^{(k)}(x)\right)' = \left(\frac{5 \cdot 3^k \cdot k!}{(2-3x)^{k+1}}\right)' \\ &= \frac{5 \cdot 3^k \cdot k! \cdot (-3) \cdot (-(k+1))}{(2-3x)^{k+2}} = \frac{5 \cdot 3^{k+1} \cdot (k+1)!}{(2-3x)^{k+2}} \end{aligned}$$

c) $x_0 = \dfrac{1}{3}$ ergibt $f^{(k)}(x_0) = f^{(k)}\left(\dfrac{1}{3}\right) = \dfrac{5 \cdot 3^k \cdot k!}{(2-3/3)^{k+1}} = 5 \cdot 3^k \cdot k!$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(1/3)}{k!}\left(x - \frac{1}{3}\right)^k = \sum_{k=0}^{\infty} 5 \cdot 3^k \left(x - \frac{1}{3}\right)^k$$

d) Konvergenz für $x_1 = \dfrac{1}{2}$ über die geometrische Reihe:

$$\sum_{k=0}^{\infty} 5 \cdot 3^k \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right)^k = 5 \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k = 5 \cdot \frac{1}{1-1/2} = 10 = f\left(\frac{1}{2}\right) .$$

In $x_2 = \dfrac{2}{3}$ liegt Divergenz vor, denn

$$\sum_{k=0}^{\infty} 5 \cdot 3^k \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{3}\right)^k = \sum_{k=0}^{\infty} 5 \cdot 3^k \left(\frac{1}{3}\right)^k = \sum_{k=0}^{\infty} 5$$

erfüllt die notwendige Konvergenzbedingung nicht: $\lim_{k\to\infty} 5 \neq 0$.

Bemerkung: $x_2 = \dfrac{2}{3}$ ist Polstelle 1.Ordnung von f.

Lösung 4:

Für den Umfang des Kegelbodenkreises mit Radius r gilt:

$$2\pi r = \alpha R \quad \Rightarrow \quad r(\alpha) = \frac{\alpha R}{2\pi} \ .$$

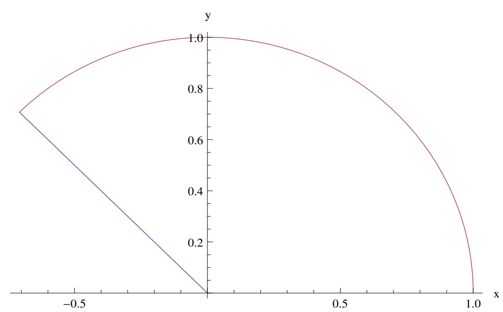


Bild 4 a) Kreissektor mit $R = 1$

Da die Länge der Kegelmantellinie mit R übereinstimmt, gilt nach dem Satz des Pythagoras $h^2 + r^2 = R^2$. Damit erhält man für die Kegelhöhe h:

$$h(\alpha) = \sqrt{R^2 - r^2(\alpha)} = \sqrt{R^2 - \frac{\alpha^2 R^2}{(2\pi)^2}} = \frac{R}{2\pi}\sqrt{(2\pi)^2 - \alpha^2} \ .$$

Das Kegelvolumen ist also gegeben durch

$$V(\alpha) = \frac{\pi r^2(\alpha) h(\alpha)}{3} = \frac{\pi R^3}{3(2\pi)^3} \cdot \alpha^2 \sqrt{(2\pi)^2 - \alpha^2} = \frac{\pi R^3}{3(2\pi)^3} \cdot \sqrt{(2\pi)^2 \alpha^4 - \alpha^6} \ \geq 0 \ .$$

Per Konstruktion gilt $0 \leq \alpha \leq 2\pi$. In den Randpunkten des Definitionsbereichs $\alpha_0 = 0$ und $\alpha_2 = 2\pi$ liegen offenbar Minima vor:

$$V(0) = 0 = V\,(2\pi) \ .$$

Die Extremalkandidaten im Inneren ergeben sich aus:

$$V'(\alpha) = \frac{\pi R^3}{3(2\pi)^3} \cdot \frac{4(2\pi)^2\alpha^3 - 6\alpha^5}{2\sqrt{(2\pi)^2\alpha^4 - \alpha^6}} = \frac{\pi R^3}{3(2\pi)^3} \cdot \frac{\alpha(2(2\pi)^2 - 3\alpha^2)}{\sqrt{(2\pi)^2 - \alpha^2}} \begin{cases} > 0 & , \quad 0 < \alpha < 2\pi\sqrt{\dfrac{2}{3}} \\ = 0 & , \quad \alpha_1 = 2\pi\sqrt{\dfrac{2}{3}} \\ < 0 & , \quad 2\pi\sqrt{\dfrac{2}{3}} < \alpha < 2\pi \ . \end{cases}$$

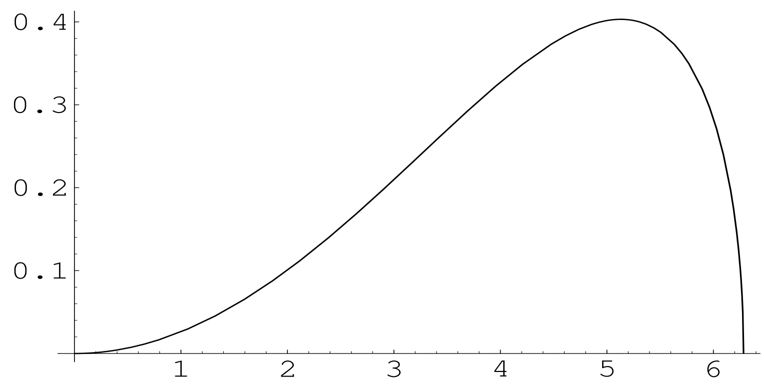


Bild 4 b) $V(\alpha)$ mit $R = 1$

Daher liefert $\alpha_1 = 2\pi\sqrt{\dfrac{2}{3}} = 5.130199321..$ das maximale Volumen mit

$$V\left(2\pi\sqrt{\frac{2}{3}}\right) = \frac{\pi R^3}{3(2\pi)^3} \cdot \frac{2(2\pi)^2}{3}\sqrt{(2\pi)^2 - \frac{2(2\pi)^2}{3}} = \frac{2\pi R^3}{9\sqrt{3}} \approx 0.403066525R^3.$$

Lösung 5:

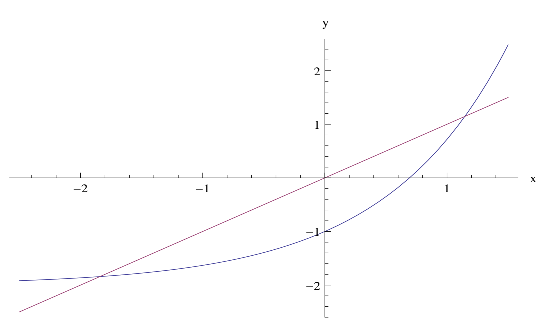
a) Das Fixpunktproblem ist äquivalent zum Nullstellenproblem für $g(x)$:

$$x = e^x - 2 \quad \Leftrightarrow \quad g(x) := e^x - 2 - x = 0\,.$$

Da $g'(x) = e^x - 1$ genau eine Nullstelle besitzt, hat g nach dem Satz von Rolle höchstens zwei Nullstellen.

Es gilt $g(-2) = 0.135...,\ g(-1) = -0.632...,\ g(1) = -0.282...,\ g(2) = 3.39...$

Nach dem Zwischenwertsatz besitzt g also eine Nullstelle im Intervall $[-2, -1]$ und eine weitere im Intervall $[1, 2]$.



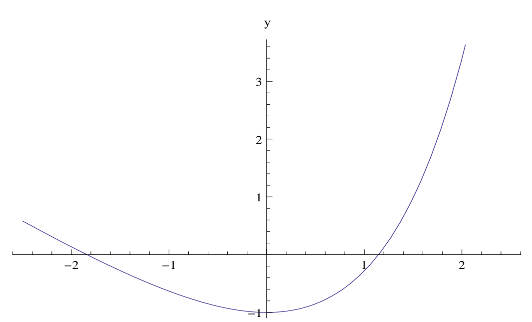


Bild 5 a i) Winkelhalbierende und $\Phi(x) = e^x - 2$ **Bild 5 a ii)** $g(x) = e^x - 2 - x$

b) Für das Intervall $D = [-2, -1]$ werden die Voraussetzungen des Fixpunktsatzes überprüft:

(i) D ist abgeschlossen.

(ii) Da $\Phi'(x) = e^x > 0$ gilt, wächst Φ monoton. Es gilt also

$$\Phi(D) = [\Phi(-2), \Phi(-1)] = [-1.865, -1.632] \subset [-2, -1] = D.$$

(iii) Φ ist eine C^1-Funktion und damit Lipschitz-stetig. Eine Lipschitz-Konstante in D erhält man durch

$$L = \sup_{-2 \le x \le -1} |\Phi'(x)| = \sup_{-2 \le x \le -1} e^x = \frac{1}{e} = 0.367880,$$

d.h. Φ ist kontrahierend auf D.

Damit sind die Vorraussetzungen des Fixpunktsatzes erfüllt. Es gibt also genau einen Fixpunkt $x^* \in D$, das Fixpunktverfahren konvergiert für jeden Startwert $x_0 \in D$ gegen x^* und es gelten die a priori- und a posteriori-Fehlerabschätzung.

Die Anzahl der Iterationsschritte, die zur näherungsweisen Berechnung des Fixpunktes mit $|x_n - x^*| < 10^{-4}$ höchstens erforderlich sein wird, kann aus der a priori-Fehlerabschätzung ermittelt werden. Für den Startwert $x_0 = -1$ erhält man $n = 10$ Iterationsschritte:

$$|x_n - x^*| < \frac{L^n}{1-L}|x_1 - x_0| < 10^{-4}$$

$$\Rightarrow \quad n > \frac{\ln\left(\frac{1-L}{10000|x_1-x_0|}\right)}{\ln L} = \frac{\ln\left(\frac{1-0.367880}{10000|-1.632+1|}\right)}{\ln 0.367880} = 9.21...$$

c) Ein Matlab-Programm zur Fixpunktberechnung mit a posteriori-Fehlerabschätzung als Abbruchkriterium:

```
>> funkt=inline('exp(x)-2','x')
>> fixpunkt(-1,0.0001,funkt,0.36787944117144233)
k    x_k
0    -1
1    -1.632120558828558
2    -1.804485465847412
3    -1.835440893922046
4    -1.840456855343537
5    -1.841255113911434
ans= -1.841381782812870
```

```
function x = fixpunkt(x0,eps,funkt,L)
%-------------------------------------------------------------
% Berechnet einen Fixpunkt mit Hilfe des Fixpunktverfahrens
%
```

```
% Input:    x0    Startwert
%           eps   Genauigkeit
%           funkt Verfahrensfunktion
%                 muss als inline Funktion definiert sein,
%                 z.B.: funkt=inline('exp(x)-2','x')
%           L     Lipschitzkonstante,
%                 falls unbekannt L>1 setzen
%
% interne
% Variable: n     zählt die Iterationsschritte
%           x     nächste Iterierte
%
% Output:   x     Fixpunktnäherung
%
% Kai Rothe, März-2015.
%-------------------------------------------------------------
  n=0;
  [n x0]
  x = funkt(x0);
  if(0<L & L<1)
    while(L*abs(x-x0)/(1-L)>eps)
      x0 = x;
      n=n+1;
      [n x0]
      x  =  funkt(x0);
    end
  else
    while(abs(x-x0)>eps)
      x0 = x;
      n=n+1
      x  =  funkt(x0)
    end
  end
```

Bemerkung:

Der Fixpunkt im Intervall $[1,2]$ kann mit der Verfahrensfunktion $\Phi(x) = e^x - 2$ nicht berechnet werden, denn es gilt

$$\inf_{1\le x\le 2} |\Phi'(x)| = \inf_{1\le x\le 2} e^x = e = 2.71828... > 1,$$

d.h. Φ kontrahiert nicht im Intervall $[1,2]$.

Schreibt man obiges Fixpunktproblem um in $x = \ln(x+2) =: \Theta(x)$, so sind die Voraussetzungen des Fixpunktsatzes für Θ in $[1,2]$ mit $L = \dfrac{1}{3}$ erfüllt und der Fixpunkt berechnet sich zu $x^{**} = 1.1461$.

Lösung 6:

a) Die Folge f_n konvergiert punktweise gegen f:

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+ne^{x^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1/n}{1/n+e^{x^2}} = 0 =: f(x)\,.$$

f_n konvergiert auch gleichmäßig gegen f, denn es gilt

$$\begin{aligned} 0 \leq \sup_{x\in[-2,2]} |f_n(x)-f(x)| &= \sup_{x\in[-2,2]} \left|\frac{1/n}{1/n+e^{x^2}} - 0\right| = \sup_{x\in[-2,2]} \frac{1}{n}\left|\frac{1}{1/n+e^{x^2}}\right| \\ &\leq \sup_{x\in[-2,2]} \frac{1}{n}\left|\frac{1}{e^{x^2}}\right| = \frac{1}{n} \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \end{aligned}$$

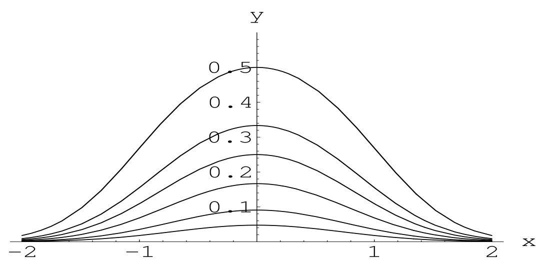


Bild 6 a) $f_n(x) = \dfrac{1}{1+ne^{x^2}}$ für $n = 1, 2, 3, 5, 10, 20$

b) Es gilt $h_n(0) = 0$. Für $x \neq 0$ erhält man

$$\lim_{n\to\infty} h_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{nx^2}{1+nx^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{x^2}{1/n+x^2} = 1\,.$$

Also konvergiert die Folge h_n punktweise gegen h:

$$h(x) = \begin{cases} 0 & : \quad x = 0 \\ 1 & : \quad x \neq 0 \end{cases}\,.$$

h_n konvergiert nicht gleichmäßig, da h unstetig ist.

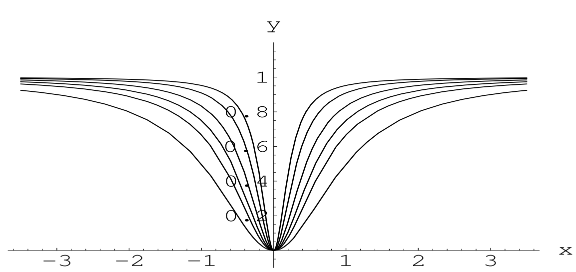


Bild 6 b) $h_n(x) = \dfrac{nx^2}{1+nx^2}$ für $n = 1, 2, 3, 5, 10, 20$

Lösung 7:

a) Für $f_n(x) := \sum\limits_{k=0}^{n} (x^3-1)(2-x^3)^k$ ergibt die geometrische Summenformel

$$\begin{aligned} f_n(x) &= (x^3-1)\sum_{k=0}^{n}\left(2-x^3\right)^k = (x^3-1)\frac{1-\left(2-x^3\right)^{n+1}}{1-(2-x^3)} \\ &= 1-\left(2-x^3\right)^{n+1} \end{aligned}$$

Für $|2-x^3|<1 \Leftrightarrow 1<x^3<3$ erhält man Konvergenz mit $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = 1$. Außerdem gilt $f_n(1)=0$. Für alle anderen x liegt Divergenz vor. Die Funktionenfolge f_n konvergiert also punktweise gegen die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} 0 & : \quad x = 1 \\ 1 & : \quad 1 < x < \sqrt[3]{3}\,. \end{cases}$$

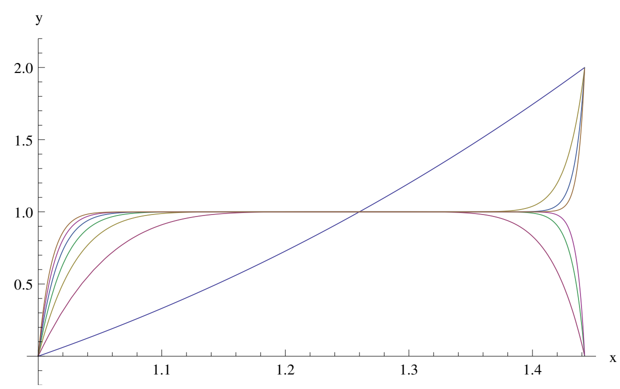


Bild 7 a) $\quad f_n(x) = 1-\left(2-x^3\right)^{n+1}$ für $n = 0, 5, 10, 15, 20, 25, 30$

Die Grenzfunktion f ist nicht stetig, die Konvergenz kann also nicht gleichmäßig sein.

b)

$$g(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k+1)^3(x^{2k}+1)}$$

konvergiert gleichmäßig (und damit auch punktweise) und absolut nach dem Majorantenkriterium auf ganz $\mathbb{R}$, denn

$$\left|\frac{1}{(k+1)^3(x^{2k}+1)}\right| \le \frac{1}{(k+1)^3} \quad \text{und} \quad \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(k+1)^3} = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^3} < \infty\,.$$

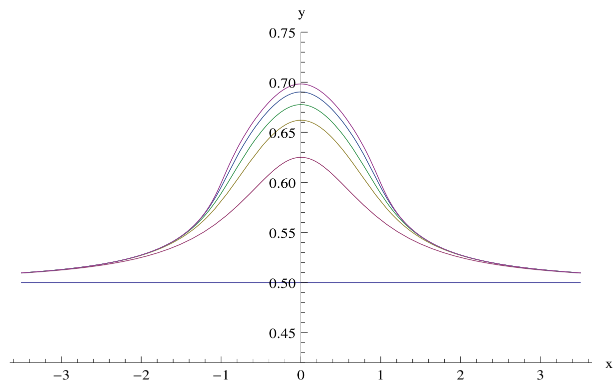


Bild 7 b) $g_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(k+1)^3(x^{2k}+1)}$ für $n = 0, 1, 2, 3, 5, 10$

Lösung 8:

a) (i) $\sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\frac{\sqrt{n+1}}{n^2+4}}_{=a_n} x^n\,,\qquad$ Entwicklungspunkt: $x_0 = 0$

$$r = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n+1}}{n^2+4}\cdot\frac{(n+1)^2+4}{\sqrt{n+2}}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{1+1/n}{1+2/n}}\cdot\frac{1+2/n+5/n^2}{1+4/n^2} = 1$$

(ii) $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\left(\frac{2}{5}\right)^2 x\right)^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{4}{25}\right)^{2n} x^{2n} = \sum_{k=0}^{\infty} a_k\, x^k\,,$

Entwicklungspunkt: $x_0 = 0$

Koeffizienten: $a_k = \begin{cases} \left(\frac{4}{25}\right)^k & , \quad k = 2n \\ 0 & , \quad k = 2n+1 \end{cases}$

Konvergenzradius:

$$r = \frac{1}{\limsup\limits_{k\to\infty}\sqrt[k]{|a_k|}} = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[2n]{\left(\frac{4}{25}\right)^{2n}}} = \frac{25}{4}$$

b) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2x+1)^n}{\sqrt{n+1}} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{\sqrt{n+1}}\left(x+\frac{1}{2}\right)^n$

Entwicklungspunkt: $x_0 = -\frac{1}{2}$

Konvergenzradius: $r = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{2^n\sqrt{n+2}}{2^{n+1}\sqrt{n+1}} = \frac{1}{2}$

Konvergenz in den Randpunkten:

$x_1 = 0,\quad$ Divergenz nach dem Minorantenkriterium:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}} \geq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty\,.$$

$x_2 = -1,\quad$ Konvergenz nach dem Leibnizkriterium:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}\,.$$

Man erhält also das Konvergenzintervall $\quad [-1, 0[\ .$

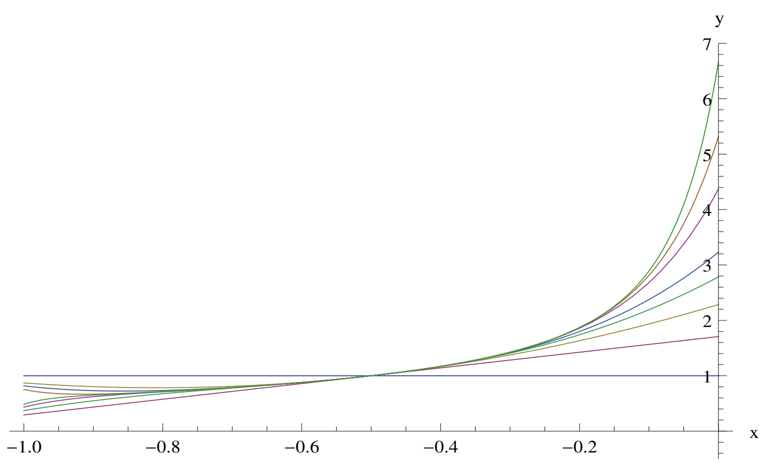


Bild 8: $\quad S_N(x) = \sum_{n=0}^{N} \frac{2^n}{\sqrt{n+1}} \left(x + \frac{1}{2}\right)^n$ für $N = 0, 1, 2, 3, 4, 7, 10, 15$

Lösung 9:

a)
$$\begin{aligned} \frac{6}{5-4z} &= \frac{6}{5-4z_0+4z_0-4z} = \frac{6}{5-4z_0} \cdot \frac{1}{1-\left(\frac{4(z-z_0)}{5-4z_0}\right)} \\ &= \frac{6}{5-4z_0} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{4(z-z_0)}{5-4z_0}\right)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{6\cdot 4^k}{(5-4z_0)^{k+1}} (z-z_0)^k \end{aligned}$$

Berechnung des Konvergenzradius:

$$r = \lim_{k\to\infty} \left|\frac{a_k}{a_{k+1}}\right| = \lim_{k\to\infty} \left|\frac{6\cdot 4^k (5-4z_0)^{k+2}}{6\cdot 4^{k+1}(5-4z_0)^{k+1}}\right| = \left|\frac{5-4z_0}{4}\right|$$

Die Konvergenzbedingung der geometrischen Reihe wird bestätigt:

$$\left|\frac{4(z-z_0)}{5-4z_0}\right| < 1 \quad \Rightarrow \quad |z-z_0| < \left|\frac{5-4z_0}{4}\right| = \left|\frac{5}{4} - z_0\right| = r$$

Man beachte: $x = \dfrac{5}{4}$ ist Polstelle von f.

Der Konvergenzradius für $z_0 = \dfrac{3i}{4}$: $\quad r = \left|\dfrac{5}{4} - \dfrac{3i}{4}\right| = \left|\dfrac{5-3i}{4}\right| = \dfrac{\sqrt{34}}{4}$.

b) Aus $f'(x) = \left(\dfrac{6}{5-4x}\right)' = \dfrac{24}{(5-4x)^2}$ folgt $g(x) = \dfrac{1}{(5-4x)^2} = \dfrac{f'(x)}{24}$.

Damit ergibt sich die Potenzreihe von g durch differenzieren der Potenzreihe von f:

$$g(x) = \frac{1}{24}\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{6 \cdot 4^k}{(5-4x_0)^{k+1}}(x-x_0)^k\right)' = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k \cdot 4^{k-1}}{(5-4x_0)^{k+1}}(x-x_0)^{k-1}\,.$$

Der Konvergenzradius stimmt mit dem von f überein.

Probe:

$$\begin{aligned} r &= \lim_{k\to\infty}\left|\frac{a_k}{a_{k+1}}\right| = \lim_{k\to\infty}\left|\frac{k \cdot 4^{k-1}(5-4x_0)^{k+2}}{(5-4x_0)^{k+1}(k+1)4^k}\right| \\ &= \lim_{k\to\infty}\left|\frac{k(5-4x_0)}{(k+1)4}\right| = \left|\frac{5-4x_0}{4}\right| = \left|x_0 - \frac{5}{4}\right|\,. \end{aligned}$$

Lösung 10:

$$\begin{aligned} \frac{6}{5-4x} &= f(x) = d_0 + d_1x + d_2x^2 + d_3x^3 + \cdots \\ \Rightarrow 6 &= (5-4x)(d_0 + d_1x + d_2x^2 + d_3x^3 + \cdots) \\ &= 5d_0 + (5d_1 - 4d_0)x + (5d_2 - 4d_1)x^2 + (5d_3 - 4d_2)x^3 + \cdots \end{aligned}$$

Koeffizientenvergleich:

$\Rightarrow\ 6 = 5d_0\,,\ 0 = 5d_k - 4d_{k-1} \ \Rightarrow\ d_0 = \dfrac{6}{5}\,,$

$$d_k = \frac{4}{5}d_{k-1} = \cdots = \left(\frac{4}{5}\right)^k d_0 = \frac{6}{5}\left(\frac{4}{5}\right)^k \qquad \Rightarrow \qquad f(x) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{6}{5}\left(\frac{4}{5}\right)^k x^k$$

Konvergenzradius: $\qquad r = \lim\limits_{k\to\infty}\left|\dfrac{d_k}{d_{k+1}}\right| = \lim\limits_{k\to\infty}\left|\dfrac{\frac{6}{5}\left(\frac{4}{5}\right)^k}{\frac{6}{5}\left(\frac{4}{5}\right)^{k+1}}\right| = \dfrac{5}{4}$

Alternativrechnung mit den Formelauswertungen aus dem Skript (Methode identisch):

$$f(x) = \frac{6}{5-4x} = \frac{1}{\frac{5}{6} - \frac{4}{6}x} =: \frac{1}{g(x)}$$

Da $g(0) \neq 0$, besitzt f in $x_0 = 0$ eine Potenzreihenentwicklung

$$f(x) = \frac{1}{g(x)} = \sum_{k=0}^{\infty} d_k x^k$$

mit Konvergenzradius $r > 0$ und die Koeffizienten d_k lassen sich nach der Rekursionsformel aus dem Cauchy-Produkt berechnen:

$$a_0 d_0 = 1\,, \quad a_0 d_k = -\sum_{j=0}^{k-1} d_j a_{k-j}$$

mit

$$g(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = \frac{5}{6} - \frac{4}{6}x \quad \Rightarrow \quad a_0 = \frac{5}{6}\,,\ a_1 = -\frac{4}{6}\,,\ a_k = 0\,,\ k \geq 2\,.$$

Man erhält damit $\quad d_0 = \dfrac{1}{a_0} = \dfrac{6}{5}\,,$

$$d_k = -\frac{1}{a_0}\sum_{j=0}^{k-1} d_j a_{k-j} = -\frac{a_1}{a_0} d_{k-1} = \frac{4}{5} d_{k-1} \cdots = \left(\frac{4}{5}\right)^k d_0 = \frac{6}{5}\left(\frac{4}{5}\right)^k$$

Lösung 11:

Im Inneren des Konvergenzintervalls darf die Potenzreihe gliedweise differenziert werden. Setzt man die Potenzreihe und ihre erste Ableitung in die Differentialgleichung ein, so ergibt sich

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k k x^{k-1} = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$$

$$\Rightarrow \quad \sum_{k=1}^{\infty} a_k k x^{k-1} - \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = \sum_{k=0}^{\infty} (a_{k+1}(k+1) - a_k) x^k = 0\,.$$

Aus dem Koeffizientenvergleich mit der Nullfunktion ergibt sich folgende Rekursionsformel zur Berechnung der a_k:

$$a_{k+1}(k+1) - a_k = 0 \ \Rightarrow\ a_{k+1} = \frac{a_k}{k+1} = \frac{a_{k-1}}{(k+1)k} = \cdots = \frac{a_0}{(k+1)!}\,.$$

Der Anfangswert ergibt $y(0) = a_0 = 3 \Rightarrow a_k = \dfrac{3}{k!}$ und damit

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{3}{k!} x^k = 3 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = 3e^x$$

als Lösung der Differentialgleichung. Der Konvergenzradius berechnet sich durch

$$r = \lim_{k\to\infty}\left|\frac{a_k}{a_{k+1}}\right| = \lim_{k\to\infty}\left|\frac{3(k+1)!}{3\cdot k!}\right| = \lim_{k\to\infty}(k+1) = \infty\,.$$

Lösung 12:

a) (i) Unter Benutzung der geometrischen Reihe erhält man für $|x/2| < 1 \Leftrightarrow |x| < 2$

$$f'(x) = \frac{1}{2+x} \quad = \quad \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-(-(x/2))} \quad = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^{n+1}}\,x^n\,.$$

die Potenzreihe von f' mit dem Konvergenzradius $r = 2$.
Gliedweise Integration der Reihe liefert wegen $f(0) = \ln(2)$ die Potenzreihe von f

$$f(x) = \ln(2+x) \quad = \quad C + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n+1)2^{n+1}}\,x^{n+1} \;=\; \ln(2) + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n+1)2^{n+1}}\,x^{n+1}\,.$$

(ii) Der Randpunkt $x = -2$ führt auf die harmonische Reihe

$$\ln(2) - \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n+1}$$

und man erhält keine Konvergenz.
Für den Randpunkt $x = 2$ erhält man mit der alternierenden harmonischen Reihe

$$\ln(2) + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}$$

Konvergenz. Konvergiert eine Potenzreihe in den Randpunkten, so ergibt sich nach dem Abelschen Grenzwertsatz dort der Wert der stetigen Fortsetzung der Summenfunktion im Inneren. Man erhält also im Randpunkt $x = 2$ den Wert

$$\ln(4) = \ln(2) + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1} \qquad \left(\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1} = \ln(2)\right)\,.$$

b) Die Potenzreihe von $g(x) = \sqrt[3]{8+3x} = 2\left(1+\dfrac{3x}{8}\right)^{1/3}$ wird über die Binomialreihe für $-1 < \dfrac{3x}{8} < 1 \;\Leftrightarrow\; -\dfrac{8}{3} < x < \dfrac{8}{3} \;\Leftrightarrow\; |x| < \dfrac{8}{3}$ berechnet:

$$2\left(1+\frac{3x}{8}\right)^{1/3} \quad = \quad \sum_{n=0}^{\infty} 2\binom{1/3}{n}\left(\frac{3x}{8}\right)^n \quad = \sum_{n=0}^{\infty}\binom{1/3}{n}\frac{2\cdot 3^n}{8^n}\,x^n\,.$$

Der Konvergenzradius $r = \dfrac{8}{3}$ bestätigt sich auch rechnerisch über die Koeffizienten $a_n = \begin{pmatrix} 1/3 \\ n \end{pmatrix} \dfrac{2 \cdot 3^n}{8^n}$ mit $\begin{pmatrix} 1/3 \\ n \end{pmatrix} = \dfrac{1}{n!} \displaystyle\prod_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1}{3} - k \right)$:

$$r = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{\begin{pmatrix} 1/3 \\ n \end{pmatrix} \frac{2\cdot 3^n}{8^n}}{\begin{pmatrix} 1/3 \\ n+1 \end{pmatrix} \frac{2\cdot 3^{n+1}}{8^{n+1}}} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{8}{3} \cdot \left| \frac{\frac{1}{n!} \prod\limits_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1}{3} - k \right)}{\frac{1}{(n+1)!} \prod\limits_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{3} - k \right)} \right|$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{8(n+1)}{3} \cdot \left| \frac{\prod\limits_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1}{3} - k \right)}{\prod\limits_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{3} - k \right)} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{8}{3} \cdot \frac{n+1}{n - 1/3} = \frac{8}{3} .$$

Lösung 13:

a)

$$\begin{aligned} p_3(x) &= -15 \cdot \frac{(x-1)(x-3)(x-5)}{(-1-1)(-1-3)(-1-5)} + 3 \cdot \frac{(x+1)(x-3)(x-5)}{(1+1)(1-3)(1-5)} \\ &\quad -3 \cdot \frac{(x+1)(x-1)(x-5)}{(3+1)(3-1)(3-5)} + 15 \cdot \frac{(x+1)(x-1)(x-3)}{(5+1)(5-1)(5-3)} \\ &= -15 \cdot \frac{(x-1)(x-3)(x-5)}{-48} + 3 \cdot \frac{(x+1)(x-3)(x-5)}{16} \\ &\quad -3 \cdot \frac{(x+1)(x-1)(x-5)}{-16} + 15 \cdot \frac{(x+1)(x-1)(x-3)}{48} \end{aligned}$$

b) Für die Zeichnung und zur Überprüfung, ob c) erfüllt ist, multiplizieren wir die Lagrange-Darstellung (ausnahmsweise) aus.

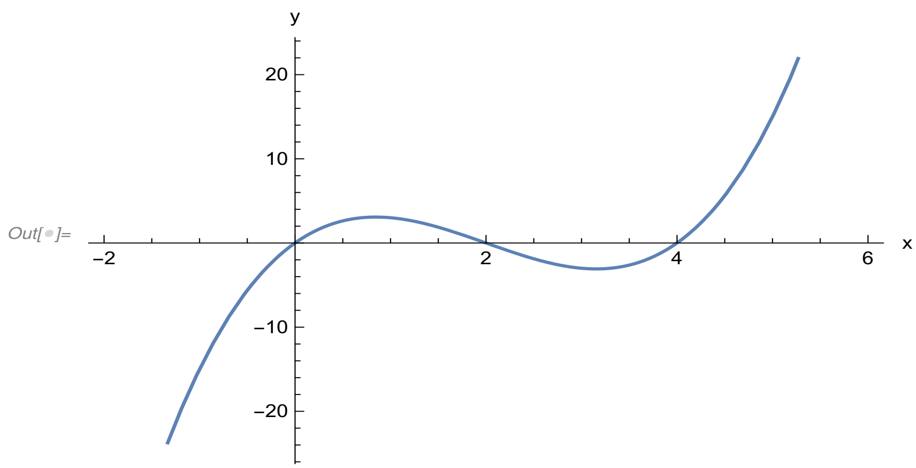


Bild 13 $p_3(x) = x^3 - 6x^2 + 8x = x(x-2)(x-4)$

c) Die Koeffizienten von p_3 in der Darstellung $p_3(x) = x^3 - 6x^2 + 8x$ lauten:

$$(a_0, a_1, a_2, a_3) = (0, 8, -6, 1)\,.$$

Diese sind eindeutig bestimmt und lösen das Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 9 & 27 \\ 1 & 5 & 25 & 125 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -15 \\ 3 \\ -3 \\ 15 \end{pmatrix}.$$

Lösung 14:

a) $$p_{2,2}(x_0) = p_{2,1}(x_0) + \frac{x_0 - x_2}{x_0 - x_2}\,(p_{1,1}(x_0) - p_{2,1}(x_0)) = p_{1,1}(x_0) = y_0$$

$$p_{2,2}(x_1) = p_{2,1}(x_1) + \frac{x_1 - x_2}{x_0 - x_2}\,(p_{1,1}(x_1) - p_{2,1}(x_1)) = y_1 + \frac{x_1 - x_2}{x_0 - x_2}\,(y_1 - y_1) = y_1$$

$$p_{2,2}(x_2) = p_{2,1}(x_2) + \frac{x_2 - x_2}{x_0 - x_2}\,(p_{1,1}(x_2) - p_{2,1}(x_2)) = p_{2,1}(x_2) = y_2$$

b) (i)

$$\begin{aligned} P_{1,1}(1.5) &= P_{1,0}(1.5) + \frac{1.5 - x_1}{x_0 - x_1}\,(P_{0,0}(1.5) - P_{1,0}(1.5)) \\ &= 0 + \frac{1.5-1}{0.5-1}\,(-0.693 - 0) \;=\; 0.693 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P_{2,1}(1.5) &= P_{2,0}(1.5) + \frac{1.5 - x_2}{x_1 - x_2}\,(P_{1,0}(1.5) - P_{2,0}(1.5)) \\ &= 0.693 + \frac{1.5-2}{1-2}\,(0 - 0.693) \;=\; 0.3465 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P_{2,2}(1.5) &= P_{2,1}(1.5) + \frac{1.5 - x_2}{x_0 - x_2}\,(P_{1,1}(1.5) - P_{2,1}(1.5)) \\ &= 0.3465 + \frac{1.5-2}{0.5-2}\,(0.693 - 0.3465) \;=\; 0.462 \end{aligned}$$

k	x_k	$P_{k,0}$	$P_{k,1}$	$P_{k,2}$
0	0.5	-0.693	$-$	$-$
1	1	0	0.693	$-$
2	2	0.693	0.3465	$0.462 = p_{2,2}(1.5)$

(ii) Mit $\tau \in\,]0.5, 2[$ gilt : $g(x) = \ln x \Rightarrow g'''(x) = \dfrac{2}{x^3}$

$$\begin{aligned} |\ln 1.5 - p(1.5)| &= \left|\frac{g'''(\tau)}{3!}(1.5-0.5)(1.5-1)(1.5-2)\right| \\ &= \left|\frac{1}{12\tau^3}\right| \quad \begin{cases} \le \dfrac{2^3}{12} \le 0.6667 \\ \ge \dfrac{1}{12\cdot 2^3} \ge 0.0104 \end{cases} \end{aligned}$$

Der tatsächliche Fehler: $|\ln 1.5 - p(1.5)| \doteq |0.405465 - 0.462| \doteq 0.0565\,.$

(iii) Alternativ und kürzer als die obige Rechnung:

Eingabe der Matlab-Befehle

```
>> x=[0.5 1 2]
>> y=[-0.693 0 0.693]
>> neville_aitken(x,y,1.5)
x =  0.5000    1.0000    2.0000
f = -0.6930         0    0.6930
f =  0.6930         0    0.6930
f =  0.6930    0.3465    0.6930
f =  0.4620    0.3465    0.6930
ans = 0.4620
```

mit dem Matlab-Programm (vgl. Skript S.66) in der Datei

```
neville_aitken.m

% INPUT:
% x=(x(1),...,x(n)) : Stützstellen
% f=(f(1),...,f(n)) : Stützwerte zu x
% y                 : Auswertungsstelle

% OUTPUT:
% p                 : Funktionswert des Interpolationspolynoms bei y

function p=neville(x,f,y)
x
f
n = length(x);
for k=2:n
      z=y-x(k);
    for i=k-1:-1:1
     f(i) = f(i+1) + z/ (x(i)-x(k)) * ( f(i) - f(i+1) )
    end
end
    p= f(1);
```

Lösung 15:

a) Aus dem Schema der dividierten Differenzen erhält man die Koeffizienten der Newtonschen Darstellung des Interpolationspolynoms:

$$\begin{array}{c|ccc} 0 & 0 & & \\ 3 & 10 & 3.33 & \\ 6 & 201.7 & 63.9 & 10.09 \end{array} \qquad \Rightarrow \qquad p_2(x) = 3.33x + 10.09x(x-3)$$

Alternativ lautet die Lagrange-Darstellung des Polynoms:

$$p_2(x) = 0 \cdot \frac{(x-3)(x-6)}{(0-3)(0-6)} + 10 \cdot \frac{(x-0)(x-6)}{(3-0)(3-6)} + 201.7 \cdot \frac{(x-0)(x-3)}{(6-0)(6-3)}$$

b) $p_2(4) = 3.33 \cdot 4 + 10.09 \cdot 4 = 53.71$

Mit $\tau \in]0,6[$ gilt:

$$\begin{aligned} |\sinh(4) - p_2(4)| &= \left| \frac{\sinh'''(\tau)}{3!}(4-0)(4-3)(4-6) \right| \\ &= \frac{4\cosh\tau}{3} \leq \frac{4\cosh 6}{3} \doteq \frac{4 \cdot 201.7}{3} \doteq 268.93 \end{aligned}$$

Der tatsächliche Fehler: $\quad |\sinh(4) - p_2(4)| \doteq |27.29 - 53.71| = 26.4\,.$

c)

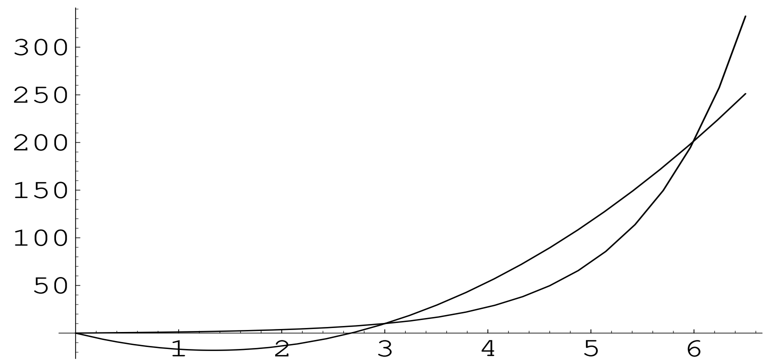


Bild 15 c) $\sinh x$ und $p_2(x)$

d) (i) An das Schema der dividierten Differenzen aus a) wird für p_3 eine Zeile angehängt

$$\begin{array}{c|cccc} 0 & 0 & & & \\ 3 & 10 & 3.33 & & \\ 6 & 201.7 & 63.9 & 10.09 & \\ 5 & 74.2 & 127.5 & 31.8 & 4.34 \end{array}$$

$$\Rightarrow \quad p_3(x) = p_2(x) + 4.34x(x-3)(x-6)$$

Die Lagrange-Darstellung von p_2 kann nicht durch Anhängen eines Summanden in p_3 überführt werden. Es ändern sich hier alle Terme.

(ii) $p_3(4) = p_2(4) + 4.34 \cdot 4(4-3)(4-6) = 18.99$
Mit $\tau \in]0,6[$ gilt:

$$\begin{aligned} |\sinh(4) - p_3(4)| &= \left|\frac{\sinh''''(\tau)}{4!}(4-0)(4-3)(4-6)(4-5)\right| \\ &= \frac{\sinh\tau}{3} \leq \frac{\sinh 6}{3} \doteq \frac{201.7}{3} \doteq 67.2 \end{aligned}$$

Der tatsächliche Fehler: $\quad |\sinh(4) - p_3(4)| \doteq |27.29 - 18.99| = 8.3\,.$

(iii)

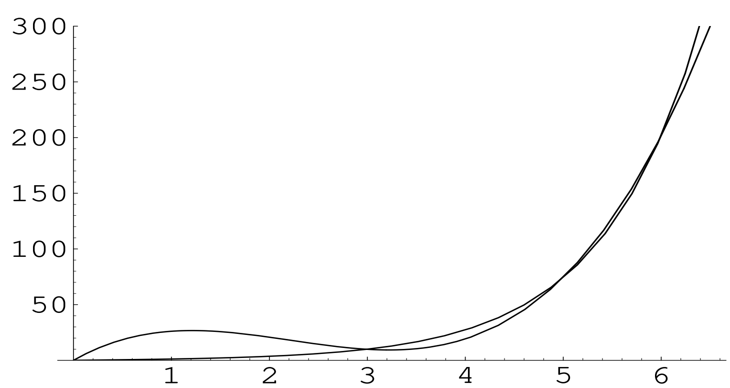


Bild 15 d) $\sinh x$ und $p_3(x)$

e) Alternativ und kürzer als die obige Rechnung:

Eingabe der Matlab-Befehle

```
>> x=[0 3 6]
>> y=[0 10 201.7]
>> newtonkoeff(x,y)
x =   0   3        6
y =   0   10.0000  201.7000
y =   0   10.0000   63.9000
y =   0    3.3333   63.9000
y =   0    3.3333   10.0944
ans = 0    3.3333   10.0944
```

Eingabe der Matlab-Befehle

```
>> x=[0 3 6 5]
>> y=[0 10 201.7 74.2]
>> newtonkoeff(x,y)
x =   0    3         6         5
y =   0   10.0000  201.7000   74.2000
y =   0   10.0000  201.7000  127.5000
y =   0   10.0000   63.9000  127.5000
y =   0    3.3333   63.9000  127.5000
y =   0    3.3333   63.9000   31.8000
y =   0    3.3333   10.0944   31.8000
y =   0    3.3333   10.0944    4.3411
ans = 0    3.3333   10.0944    4.3411
```

mit dem Matlab-Programm in der Datei 'newtonkoeff(x,y).m'

```
% INPUT:
% x=(x(1),...,x(n)) : Stützstellen
% y=(y(1),...,y(n)) : Stützwerte zu x

% OUTPUT:
% y=(y(1),...,y(n)) : Newtonkoeffizienten
%--------------------------------------------------------
function y = newton(x,y)
x
y
n = length(y);

for k = 2:n
  for i = n:-1:k
```

```
    y(i) = (y(i)-y(i-1))/(x(i)-x(i-k+1))
  end
end
```

Lösung 16:

a) Der kubische Interpolationsspline $s(x)$ besitzt im Intervall $I_j = [x_{j-1}, -x_j]$ für $j = 1, 2, 3$ die Darstellung

$$s_j(x) = a_j + b_j(x - x_{j-1}) + c_j(x - x_{j-1})^2 + d_j(x - x_{j-1})^3 .$$

Die Koeffizienten a_j, b_j, c_j und d_j ergeben sich nach der Momentenmethode folgendermaßen:

Für $j = 0, 1, 2, 3$ werden mit $M_j := s''(x_j)$ die Momente bezeichnet. Beim natürlichen Spline sind $M_0 = 0$ und $M_3 = 0$. Die übrigen Momente ergeben sich aus folgendem 'tridiagonalen' Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 2 & \lambda_1 \\ \mu_2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M_1 \\ M_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D_1 \\ D_2 \end{pmatrix}$$

mit $h_j = x_j - x_{j-1} \quad \Rightarrow \quad h_1 = 2,\ h_2 = 1,\ h_3 = 1$

$$\lambda_j = \frac{h_{j+1}}{h_j + h_{j+1}} \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = \frac{1}{3}\,, \qquad \mu_j = \frac{h_j}{h_j + h_{j+1}} \quad \Rightarrow \quad \mu_2 = \frac{1}{2}$$

und

$$D_j = \frac{6}{h_j + h_{j+1}} \left(\frac{f_{j+1} - f_j}{h_{j+1}} - \frac{f_j - f_{j-1}}{h_j} \right)$$

$$\Rightarrow \quad D_1 = \frac{6}{3} \left(\frac{1-0}{1} - \frac{0-4}{2} \right) = 6, \quad D_2 = \frac{6}{2} \left(\frac{4-1}{1} - \frac{1-0}{1} \right) = 6$$

Zu lösen ist also das lineare Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 2 & 1/3 \\ 1/2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M_1 \\ M_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad M_1 = \frac{60}{23},\ M_2 = \frac{54}{23}$$

Mit den Momenten berechnen sich die Koeffizienten folgendermaßen:

$$a_j = f_{j-1}, \quad b_j = \frac{f_j - f_{j-1}}{h_j} - \frac{(2M_{j-1} + M_j)h_j}{6}, \quad c_j = \frac{M_{j-1}}{2}, \quad d_j = \frac{M_j - M_{j-1}}{6h_j}$$

Man erhält für $s(x)$ in den Intervallen $I_1,\ I_2$ und I_3 damit die Darstellungen

$$\begin{aligned} s_1(x) &= 4 - \frac{66}{23}x + \frac{5}{23}x^3 \\ s_2(x) &= -\frac{6}{23}(x-2) + \frac{30}{23}(x-2)^2 - \frac{1}{23}(x-2)^3 \\ s_3(x) &= 1 + \frac{51}{23}(x-3) + \frac{27}{23}(x-3)^2 - \frac{9}{23}(x-3)^3 . \end{aligned}$$

b)

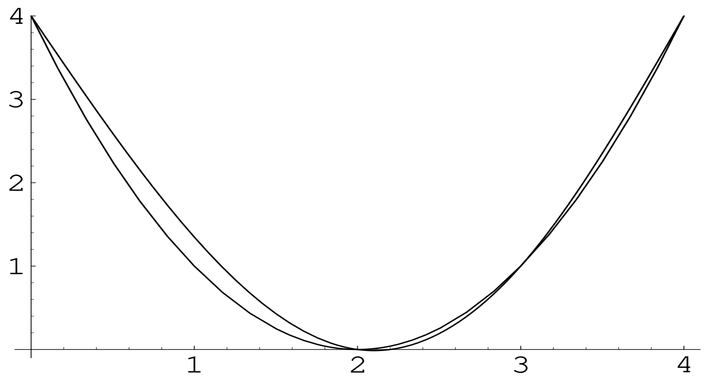


Bild 16 a) $f(x) = (x-2)^2$ und $s(x)$

c) Der natürliche Spline s kann nicht mit f übereinstimmen, denn per Konstruktion gelten $M_0 = s''(0) = 0$ und $M_3 = s''(4) = 0$, aber $f''(0) = 2 = f''(4)$.

d)
```
>> clear
>> x=[0 2 3 4];
>> f=[4 0 1 4];
>> s=spline(x,f);
>> t=linspace(0,4,1000);
>> y=ppval(s,t);
>> plot(t,y)
```

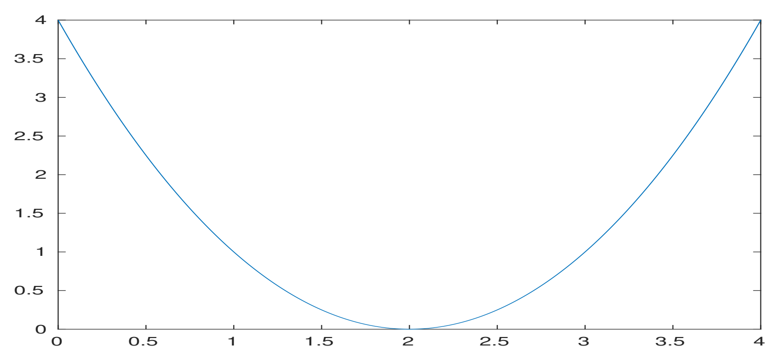


Bild 16 b) $s(x)$

Lösung 17:

a) $$\int 2x^5 - 5\sin(x)\,dx \;=\; \frac{x^6}{3} + 5\cos(x) + C\,,$$

b) $\displaystyle\int 4\cos(x) - 7\sinh(x)\,dx = 4\sin(x) - 7\cosh(x) + C\,,$

c) $\displaystyle\int \frac{2+xe^x}{x}\,dx = \int \frac{2}{x} + e^x\,dx = 2\ln|x| + e^x + C\,,$

d) $\displaystyle\int \frac{3x^5 - 5x^3 + 4x}{\sqrt{x}}dx = \int 3x^{9/2} - 5x^{5/2} + 4x^{1/2}dx = \frac{6}{11}x^{11/2} - \frac{10}{7}x^{7/2} + \frac{8}{3}x^{3/2} + C$

Lösung 18:

a) partielle Integration: $u = 3x-1\,,\ v' = \cosh(x)$

$$\begin{aligned}\int (3x-1)\cosh(x)\,dx &= (3x-1)\sinh(x) - \int 3\sinh(x)\,dx + C\\ &= (3x-1)\sinh(x) - 3\cosh(x) + C\end{aligned}$$

b) partielle Integration: $u' = x\,,\ v = \ln(x)$

$$\int x\ln(x)\,dx = \frac{x^2}{2}\ln(x) - \int \frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{x}\,dx = \frac{x^2}{2}\ln(x) - \frac{x^2}{4} + C$$

c) partielle Integration: $u = x^2\,,\ v' = \cos(x)$

$$\int x^2\cos(x)\,dx = x^2\sin(x) - \int 2x\sin(x)\,dx + C$$

weitere partielle Integration: $u = 2x\,,\ v' = \sin(x)$

$$\begin{aligned}&= x^2\sin(x) + 2x\cos(x) - \int 2\cos(x)\,dx + C\\ &= x^2\sin(x) + 2x\cos(x) - 2\sin(x) + C\end{aligned}$$

d) partielle Integration: $u = \sinh(t)\,,\ v' = \cos(t)$

$$\int \cos(t)\sinh(t)\,dt = \sin(t)\sinh(t) - \int \sin(t)\cosh(t)\,dt + \tilde{C}$$

weitere partielle Integration: $u = \cosh(t)\,,\ v' = \sin(t)$

$$= \sin(t)\sinh(t) - (-\cos(t)\cosh(t) - \int -\cos(t)\sinh(t)\,dt) + \tilde{C}$$

$$= \sin(t)\sinh(t) + \cos(t)\cosh(t) - \int \cos(t)\sinh(t)\,dt + \tilde{C}$$

$$\Rightarrow \quad \int \cos(t)\sinh(t)\,dt = \frac{\sin(t)\sinh(t) + \cos(t)\cosh(t)}{2} + C,$$

e) partielle Integration: $\quad u = 15x\ ,\ v' = \sqrt{x-1}$

$$\begin{aligned}
\int 15x\sqrt{x-1}\,dx &= \frac{2\cdot 15x}{3}(x-1)^{3/2} - \int \frac{2\cdot 15}{3}(x-1)^{3/2}\,dx + C \\
&= 10x(x-1)^{3/2} - \int 10(x-1)^{3/2}\,dx + C \\
&= 10x(x-1)^{3/2} - \frac{20}{5}(x-1)^{5/2} + C \\
&= (x-1)^{3/2}(10x - 4(x-1)) + C \\
&= 2(x-1)^{3/2}(3x+2) + C
\end{aligned}$$

f) $\displaystyle\int \tan(x)\,dx = \int \sin(x)\cdot(\cos(x))^{-1}\,dx$

partielle Integration:
$u = (\cos(x))^{-1}\ ,\ v' = \sin(x) \quad \Rightarrow \quad u' = \sin(x)(\cos(x))^{-2}\ ,\ v = -\cos(x)$

$$\begin{aligned}
\int \tan(x)\,dx &= \int \sin(x)\cdot(\cos(x))^{-1}\,dx \\
&= -\cos(x)(\cos(x))^{-1} + \int \sin(x)(\cos(x))^{-2}\cos(x)\,dx + C \\
&= -1 + \int \tan(x)\,dx + C \\
\Rightarrow \quad 0 &= -1 + C \quad \Rightarrow \quad C = 1
\end{aligned}$$

Mit partieller Integration kann keine Stammfunktion gefunden werden.

Lösung 19:

a) Substitution: $\quad s = \sin(x) \ \rightarrow \ ds = \cos(x)\,dx$

$$\int \cos(x)\sin^3(x)\,dx = \int s^3\,ds = \frac{s^4}{4} + C = \frac{\sin^4(x)}{4} + C\,.$$

b) Substitution: $s = x^2 + 1 \rightarrow ds = 2x\,dx$

$$\int 2x\sqrt{x^2+1}\,dx = \int \sqrt{s}\,ds = \frac{2s^{3/2}}{3} + C = \frac{2(x^2+1)^{3/2}}{3} + C\,.$$

c) Substitution: $t = x^3 \;\rightarrow\; dt = 3x^2\,dx \;\;\rightarrow\; dx = \dfrac{dt}{3x^2}$

$$\int x^2 e^{x^3}\,dx = \frac{1}{3}\int e^t\,dt = \frac{1}{3}e^t + C = \frac{1}{3}e^{x^3} + C\,.$$

d) Substitution: $x = 2t + 3 \;\rightarrow\; dx = 2\,dt \;\;\rightarrow\; dt = \dfrac{dx}{2}$

$$\int \frac{(\ln(2t+3))^4}{6t+9}\,dt = \frac{1}{2}\int \frac{(\ln(x))^4}{3x}\,dx = \frac{1}{6}\int \frac{1}{x}\cdot(\ln(x))^4\,dx$$

weitere Substitution: $u = \ln x \;\rightarrow\; du = \dfrac{1}{x}\,dx$

$$= \frac{1}{6}\int u^4\,du = \frac{u^5}{30} + C = \frac{(\ln x)^5}{30} + C = \frac{(\ln(2t+3))^5}{30} + C$$

e) Substitution: $t = e^x \;\rightarrow\; \dfrac{dt}{dx} = e^x \;\rightarrow\; dx = \dfrac{dt}{t}$

$$\int \frac{e^x}{e^{2x}+1}\,dx = \int \frac{t}{t^2+1}\,\frac{dt}{t} = \int \frac{1}{t^2+1}\,dt = \arctan(t) + C = \arctan\left(e^x\right) + C$$

f) $\displaystyle\int \tan(x)\,dx = \int \frac{\sin(x)}{\cos(x)}\,dx$

Substitution: $t = \cos(x) \;\rightarrow\; dt = -\sin(x)\,dx$

$$\int \tan(x)\,dx = \int \frac{\sin(x)}{\cos(x)}\,dx = -\int \frac{1}{t}\,dt = -\ln|t| + C = -\ln|\cos(x)| + C$$

Lösung 20:

a) Die Schnittpunkte von $f(x) = \sqrt{x}$ und $g(x) = x^3$ ergeben sich durch

$$\sqrt{x} = x^3 \quad \Rightarrow \quad 0 = x^6 - x = x(x^5 - 1) \,.$$

Nur zwischen den Schnittpunkten $x_1 = 0$ und $x_2 = 1$ gilt $g(x) \le y \le f(x)$. Daher berechnet sich der Flächeninhalt durch

$$F_1 = \int_0^1 f(x) - g(x)\, dx = \int_0^1 \sqrt{x} - x^3\, dx = \left(\frac{2}{3}x^{3/2} - \frac{1}{4}x^4\right)\Bigg|_0^1 = \frac{2}{3} - \frac{1}{4} = \frac{5}{12}$$

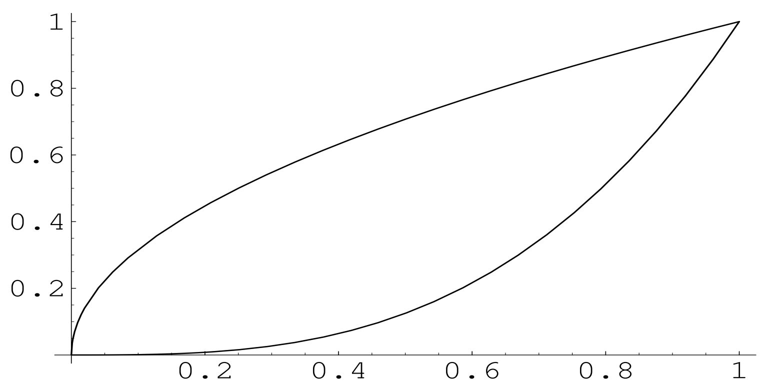


Bild 20: Menge M

b) (i) partielle Integration:

$$\begin{aligned}\int e^x \sin(x)\, dx &= e^x \sin(x) - \int e^x \cos(x)\, dx \\ &= e^x \sin(x) - \left(e^x \cos(x) - \int e^x(-\sin(x))\, dx\right) + \tilde{C}\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \int e^x \sin(x)\, dx = \frac{e^x}{2}.(\sin(x) - \cos(x)) + C \quad \Rightarrow \quad \int_0^{\pi/2} e^x \sin(x)\, dx = \frac{e^{\pi/2} + 1}{2}$$

(ii) Substitution:

$$u = \cos(x) \;\rightarrow\; du = -\sin(x)\,dx\,, \quad \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0\,,\; \cos(0) = 1$$

$$\int\limits_0^{\pi/2} \sin(x)\cos^2(x)\,dx \;=\; -\int\limits_1^0 u^2\,du \;=\; \left.\frac{u^3}{3}\right|_0^1 \;=\; \frac{1}{3}$$

(iii) partielle Integration:

$$\begin{aligned}
\int\limits_0^4 x\sqrt{2x+1}\,dx &= \int\limits_0^4 x(2x+1)^{1/2}\,dx \\
&= \left. x\cdot\frac{2}{2\cdot 3}(2x+1)^{3/2}\right|_0^4 - \frac{2}{2\cdot 3}\int\limits_0^4 (2x+1)^{3/2}\,dx \\
&= \left.\frac{x}{3}(2x+1)^{3/2}\right|_0^4 - \left.\frac{1}{15}(2x+1)^{5/2}\right|_0^4 \\
&= \left.(2x+1)^{3/2}\left(\frac{x}{3} - \frac{2x+1}{15}\right)\right|_0^4 \\
&= \left.(2x+1)^{3/2}\cdot\frac{3x-1}{15}\right|_0^4 = \frac{298}{15}
\end{aligned}$$

Substitution als Alternative: $u = \sqrt{2x+1} \;\Rightarrow\; x = \dfrac{u^2-1}{2}$

$$\begin{aligned}
\int\limits_0^4 x\sqrt{2x+1}\,dx &= \int\limits_1^3 \frac{u^2-1}{2}\cdot u\cdot u\,du \;=\; \int\limits_1^3 \frac{u^4-u^2}{2}\,du \\
&= \left.\frac{u^5}{10} - \frac{u^3}{6}\right|_1^3 = \left.\frac{3u^5-5u^3}{30}\right|_1^3 = \frac{298}{15}
\end{aligned}$$

Lösung 21:

a) Substitution: $t = 5-2x \quad\rightarrow\quad dt = -2\,dx$

$$\int \frac{3}{5-2x}\,dx = -\frac{3}{2}\int \frac{1}{t}\,dt = -\frac{3}{2}\ln|t| + C = -\frac{3}{2}\ln|5-2x| + C$$

b) Substitution: $t = 7x-4 \quad\rightarrow\quad dt = 7\,dx$

$$\int \frac{1}{(7x-4)^2}\,dx = \frac{1}{7}\int \frac{1}{t^2}\,dt = -\frac{1}{7}t^{-1} + C = -\frac{1}{7(7x-4)} + C = \frac{1}{28-49x} + C$$

c) Polynomdivision:

$$\begin{array}{rrl}
(6x^3 - 3x^2 + 2x - 3) : (2x-1) = 3x^2 + 1 - \dfrac{2}{2x-1} \\
-(6x^3 - 3x^2) \\
\hline
2x \quad -3 \\
-(2x \quad -1) \\
\hline
-2
\end{array}$$

$$\int \frac{6x^3 - 3x^2 + 2x - 3}{2x-1}\,dx = \int 3x^2 + 1 - \frac{2}{2x-1}\,dx$$

Substitution: $t = 2x - 1 \quad \to \quad dt = 2\,dx$

$$= x^3 + x - \int \frac{1}{t}\,dt + C = x^3 + x - \ln|t| + C = x^3 + x - \ln|2x-1| + C$$

d) $\displaystyle\int \frac{5}{x^2+2}\,dx = \frac{5}{2}\int \frac{1}{(x/\sqrt{2})^2 + 1}\,dx$

Substitution: $t = \dfrac{x}{\sqrt{2}} \to dx = \sqrt{2}\,dt$

$$= \frac{5\sqrt{2}}{2}\int \frac{1}{t^2+1}\,dt = \frac{5}{\sqrt{2}}\arctan(t) + C = \frac{5}{\sqrt{2}}\arctan\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) + C$$

e) $\displaystyle\int \frac{5x}{2x^2+2}\,dx = \frac{5}{4}\int \frac{2x}{x^2+1}\,dx$

Substitution: $t = x^2 + 1 \to dt = 2x\,dx$

$$= \frac{5}{4}\int \frac{1}{t}\,dt = \frac{5}{4}\ln|t| + C = \frac{5}{4}\ln|x^2+1| + C$$

f) $\displaystyle\int \frac{6x}{x^2+4x+5}\,dx = \int \frac{3(2x+4) - 12}{(x+2)^2 + 1}\,dx$

$$= 3\int \frac{2(x+2)}{(x+2)^2+1}\,dx - 12\int \frac{1}{(x+2)^2+1}\,dx$$

Substitution: $t = x + 2 \to dt = dx$

$$= 3\int \frac{2t}{t^2+1}\,dt - 12\int \frac{1}{t^2+1}\,dt$$

Substitution: $u = t^2+1 \;\rightarrow\; du = 2t\,dt$

$$= 3\int \frac{1}{u}\,du - 12\arctan t = 3\ln|u| - 12\arctan t + C$$
$$= 3\ln|t^2+1| - 12\arctan(x+2) + C = 3\ln|x^2+4x+5| - 12\arctan(x+2) + C$$

Lösung 22:

a) Nennerfaktorisierung: $3x^2+15x-18 = 3(x^2+5x-6) = 3(x-1)(x+6)$

$$\Rightarrow \quad \frac{7}{3x^2+15x-18} = \frac{7}{3}\cdot\left(\frac{1}{x^2+5x-6}\right) = \frac{7}{3}\cdot\left(\frac{1}{(x-1)(x+6)}\right)$$

Partialbruchzerlegungsansatz:

$$\frac{1}{(x-1)(x+6)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+6} = \frac{A(x+6)+B(x-1)}{(x-1)(x+6)}$$

$$\Rightarrow \quad 1 = A(x+6) + B(x-1)$$

Nennernullstellen einsetzen:

$$x = 1 \quad \Rightarrow \quad 1 = A(1+6) + B(1-1) = 7A \quad \Rightarrow \quad A = \frac{1}{7}$$

$$x = -6 \quad \Rightarrow \quad 1 = A(-6+6) + B(-6-1) = -7B \quad \Rightarrow \quad B = -\frac{1}{7}$$

$$\Rightarrow \quad \int \frac{7}{3x^2+15x-18}\,dx \;=\; \frac{7}{3}\int \frac{1}{7}\frac{1}{x-1} - \frac{1}{7}\frac{1}{x+6}\,dx$$
$$= \frac{1}{3}\left(\ln|x-1| - \ln|x+6|\right) + C$$

b) Polynomdivision:

$$\begin{array}{l}
(x^3+x^2-35x+17) : (x^2+6x-7) = x - 5 + \dfrac{2x-18}{x^2+6x-7} \\
-\underline{(x^3+6x^2-7x)} \\
\qquad -5x^2-28x+17 \\
\qquad -\underline{(-5x^2-30x+35)} \\
\qquad\qquad\quad 2x-18
\end{array}$$

Nennerfaktorisierung: $x^2 + 6x - 7 = (x-1)(x+7)$

Partialbruchzerlegungsansatz:

$$\frac{2x-18}{x^2+6x-7} = \frac{2x-18}{(x-1)(x+7)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+7}$$

$$\Rightarrow \quad 2x - 18 = A(x+7) + B(x-1) = (A+B)x + 7A - B$$

Berechnung von A und B über einen Koeffizientenvergleich von

$$2x - 18 = (A+B)x + 7A - B$$

$-18 = 7A - B \quad \Rightarrow \quad B = 7A + 18$

$2 = A + B = A + 7A + 18 = 8A + 18$

$\Rightarrow \quad 8A = -16 \quad \Rightarrow \quad A = -2 \quad \Rightarrow \quad B = 4$

alternativ:

Berechnung von A und B durch Einsetzen von x-Werten, vorzugsweise der Nennernullstellen in die Gleichung:

$$2x - 18 = A(x+7) + B(x-1)$$

$x = 1: \quad 2 - 18 = -16 = A(1+7) \quad \Rightarrow \quad A = -2$

$x = -7: \quad 2 \cdot (-7) - 18 = -32 = B(-7-1) \ \Rightarrow \ B = 4$

Integration:

$$\int \frac{x^3 + x^2 - 35x + 17}{x^2 + 6x - 7}\,dx = \int x - 5 - \frac{2}{x-1} + \frac{4}{x+7}\,dx$$

$$= \frac{x^2}{2} - 5x - 2\ln|x-1| + 4\ln|x+7| + C$$

c) Dieses Integral wird über die Rekursionsformel mit $\ell = 2$ berechnet

$$
\begin{aligned}
\int \frac{9}{(2x^2+3)^2}\,dx &= \int \frac{9}{3^2(2x^2/3+1)^2}\,dx = \int \frac{1}{\left(\left(\frac{\sqrt{2}x}{\sqrt{3}}\right)^2+1\right)^2}\,dx \\
&= \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\int \frac{1}{(t^2+1)^2}\,dt \\
&= \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{2(1-2)}\left((3-2\cdot 2)\int \frac{1}{t^2+1}\,dt - \frac{t}{t^2+1}\right)+C \\
&= \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}\left(\arctan t + \frac{t}{t^2+1}\right)+C \\
&= \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}\left(\arctan\left(\frac{\sqrt{2}x}{\sqrt{3}}\right) + \frac{\frac{\sqrt{2}x}{\sqrt{3}}}{\left(\frac{\sqrt{2}x}{\sqrt{3}}\right)^2+1}\right)+C \\
&= \frac{3}{2}\left(\frac{\arctan\left(\frac{\sqrt{2}x}{\sqrt{3}}\right)}{\sqrt{6}} + \frac{x}{2x^2+3}\right)+C
\end{aligned}
$$

Lösung 23:
Raten der Nennernullstelle $x = 3$ (Teiler der Konstanten 27) und Polynomdivision:

$$
\begin{array}{l}
\quad(x^4-4x^3+27):(x-3)=x^3-x^2-3x-9 \\
-\underline{(x^4-3x^3)} \\
\qquad\quad -x^3+27 \\
\qquad -\underline{(-x^3+3x^2)} \\
\qquad\qquad\quad -3x^2+27 \\
\qquad\qquad -\underline{(-3x^2+9x)} \\
\qquad\qquad\quad -9x+27 \\
\qquad\qquad -\underline{(-9x+27)} \\
\qquad\qquad\qquad\quad 0
\end{array}
$$

Erneutes Raten der Nullstelle $x = 3$ (Teiler der Konstanten 9) und Polynomdivision:

$$
\begin{array}{l}
\quad(x^3-x^2-3x-9):(x-3)=x^2+2x+3 \\
-\underline{(x^3-3x^2)} \\
\qquad\quad 2x^2-3x-9 \\
\qquad -\underline{(2x^2-6x)} \\
\qquad\qquad\quad 3x-9 \\
\qquad\qquad -\underline{(3x-9)} \\
\qquad\qquad\qquad\quad 0
\end{array}
$$

Damit lautet die Nennerfaktorisierung:

$$x^4-4x^3+27=(x-3)^2(x^2+2x+3)=(x-3)^2((x+1)^2+2)\,.$$

$$\Rightarrow \quad \int \frac{8x^3 - 43x^2 + 46x - 39}{x^4 - 4x^3 + 27}\,dx = \int \frac{8x^3 - 43x^2 + 46x - 39}{(x-3)^2((x+1)^2+2)}\,dx$$

Partialbruchzerlegungsansatz:

$$\frac{8x^3 - 43x^2 + 46x - 39}{x^4 - 4x^3 + 27} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{(x-3)^2} + \frac{Cx+D}{(x+1)^2+2}$$

$\Rightarrow 8x^3 - 43x^2 + 46x - 39$

$= A(x-3)((x+1)^2+2) + B((x+1)^2+2) + (Cx+D)(x-3)^2$

Koeffizienten über Einsetzen verschiedener x-Werte berechnen:

Berechnung von B durch Einsetztten der Nennernullstelle $x = 3$:

$8 \cdot 3^3 - 43 \cdot 3^2 + 46 \cdot 3 - 39 = -72 = B(4^2+2) \quad \Rightarrow \quad B = -4$

Berechnung von A durch Ableiten

$24x^2 - 86x + 46$

$= A((x+1)^2+2) + B \cdot 2(x+1) + (x-3)[2A(x+1) + C(x-3) + 2(Cx+D)]$

und dann Einsetztten der Nennernullstelle $x = 3$:

$24 \cdot 3^2 - 86 \cdot 3 + 46 = 4 = A(4^2+2) - 4 \cdot 2(3+1) \quad \Rightarrow \quad A = 2$

Berechnung von C und D durch Einsetzen geeigneter x Werte:

$x = 0:$

$-39 = A(-3)(1^2+2) + B(1^2+2) + (C \cdot 0 + D)(-3)^2$

$= -30 + 9D \quad \Rightarrow \quad D = -1$

$x = 1:$

$8 - 43 + 46 - 39 = -28$

$= A(-2)((2)^2+2) + B((2)^2+2) + (C+D)(1-3)^2$

$= -52 + 4C \quad \Rightarrow \quad C = 6$

Damit kann das Integral mittels Partialbruchzerlegung berechnet werden

$$\int \frac{8x^3 - 43x^2 + 46x - 39}{x^4 - 4x^3 + 27}\,dx = \int \frac{2}{x-3} - \frac{4}{(x-3)^2} + \frac{6x-1}{(x+1)^2+2}\,dx$$

$$= 2\ln|x-3| + \frac{4}{x-3} + 3\int \frac{2(x+1)}{(x+1)^2+2}\,dx - 7\int \frac{1}{(x+1)^2+2}\,dx + \tilde{C}$$

Zur Lösung der verbleibenden Teilintegrale:

Mit der Substitution $t = (x+1)^2 + 2 \to dt = 2(x+1)dx$ erhält man

$$3\int \frac{2(x+1)}{(x+1)^2+2}\,dx = 3\int \frac{1}{t}\,dt = 3\ln|t| = 3\ln|(x+1)^2+2| + C_1.$$

Mit der Substitution $t = \dfrac{x+1}{\sqrt{2}} \to dx = \sqrt{2}dt$ ergibt sich

$$7\int \frac{1}{(x+1)^2+2}\,dx = \frac{7}{2}\int \frac{1}{((x+1)/\sqrt{2})^2+1}\,dx$$
$$= \frac{7}{\sqrt{2}}\int \frac{1}{t^2+1}\,dt = \frac{7}{\sqrt{2}}\arctan t = \frac{7}{\sqrt{2}}\arctan\left(\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right) + C_2.$$

Damit erhält man die Stammfunktion

$$\int \frac{8x^3-43x^2+46x-39}{x^4-4x^3+27}\,dx$$
$$= 2\ln|x-3| + \frac{4}{x-3} + 3\ln|(x+1)^2+2| - \frac{7}{\sqrt{2}}\arctan\left(\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right) + K.$$

Lösung 24:

a) Additionstheorem: $\cosh^2 t - \sinh^2 t = 1$ und
partielle Integration: $u = \cosh t,\ v' = \cosh t$

$$\begin{aligned}
\int \cosh^2 t\,dt &= \int \cosh t\cosh t\,dt = \cosh t\sinh t - \int \sinh t\sinh t\,dt + \tilde{C} \\
&= \cosh t\sinh t - \int \cosh^2 t - 1\,dt + \tilde{C} \quad \Rightarrow \\
2\int \cosh^2 t\,dt &= t + \cosh t\sinh t + \tilde{C} \quad \Rightarrow \\
\int \cosh^2 t\,dt &= \frac{1}{2}(t + \cosh t\sinh t) + C
\end{aligned}$$

b) Substitution: $x = \sinh t \ \Rightarrow\ dx = \cosh t\,dt$ und $t = \operatorname{arsinh} x$

$$\begin{aligned}
\int \sqrt{1+x^2}\,dx &= \int \sqrt{1+\sinh^2 t}\,\cosh t\,dt = \int \cosh^2 t\,dt \\
&= \frac{1}{2}(t + \cosh t\sinh t) + C = \frac{1}{2}\left(\operatorname{arsinh} x + x\sqrt{1+x^2}\right) + C
\end{aligned}$$

c) Substitution $t = e^x \quad dx = \dfrac{dt}{t}$

$$\int \frac{e^{3x}}{e^{3x}+4}\,dx = \int \frac{t^3}{t^3+4}\,\frac{dt}{t} = \frac{1}{3}\int \frac{3t^2}{t^3+4}\,dt$$
$$= \frac{1}{3}\ln(t^3+4) + C = \frac{1}{3}\ln(e^{3x}+4) + C,$$

d) Substitution: $\tan\dfrac{x}{2} = t\,,\quad \cos x = \dfrac{1-t^2}{t^2+1}\,,\quad dx = \dfrac{2dt}{t^2+1}$

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{\cos x}\,dx &= \int \frac{1}{\dfrac{1-t^2}{t^2+1}}\,\frac{2dt}{t^2+1} = \int \frac{2}{1-t^2}\,dt = \int \frac{1}{1-t}+\frac{1}{1+t}\,dt \\ &= \ln|1+t| - \ln|1-t| + C = \ln\left|\frac{1+t}{1-t}\right| + C \\ &= \ln\left|\frac{1+\tan\frac{x}{2}}{1-\tan\frac{x}{2}}\right| + C = \ln\left|\cos\frac{x}{2}+\sin\frac{x}{2}\right| - \ln\left|\cos\frac{x}{2}-\sin\frac{x}{2}\right| + C\end{aligned}$$

Lösung 25:

a) (i)
$$\begin{aligned}\int_1^9 \frac{4}{(x-1)^{2/3}}\,dx &= \lim_{\varepsilon\to 0+}\int_{1+\varepsilon}^9 \frac{4}{(x-1)^{2/3}}\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0+} 12(x-1)^{1/3}\Big|_{1+\varepsilon}^9 \\ &= \lim_{\varepsilon\to 0+} 12((9-1)^{1/3} - \varepsilon^{1/3}) = 24\end{aligned}$$

(ii)
$$\begin{aligned}\int_0^\infty \frac{2}{(x+1)^{3/4}}\,dx &= \lim_{a\to\infty}\int_0^a \frac{2}{(x+1)^{3/4}}\,dx = \lim_{a\to\infty} 8(x+1)^{1/4}\Big|_0^a \\ &= \lim_{a\to\infty} 8((a+1)^{1/4} - 1) = \infty\end{aligned}$$

b) (i)
$$\int_0^\infty \frac{x^2+1}{x^5+3}\,dx = \int_0^1 \frac{x^2+1}{x^5+3}\,dx + \int_1^\infty \frac{x^2+1}{x^5+3}\,dx$$

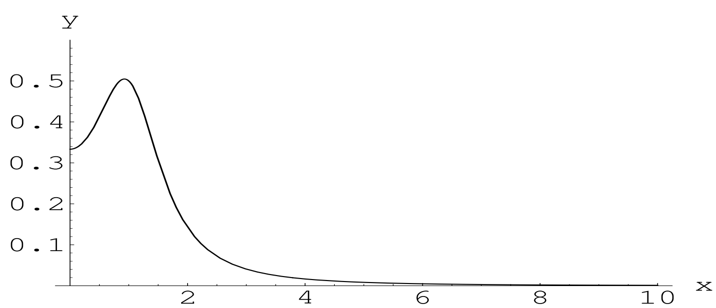


Bild 25 b): Funktion $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x^5+3}$

$\displaystyle\int_0^1 \frac{x^2+1}{x^5+3}\,dx$ ist ein bestimmtes Integral mit endlichem Wert.

$\displaystyle\int_1^\infty \frac{x^2+1}{x^5+3}\,dx = \lim_{a\to\infty}\int_1^a \frac{x^2+1}{x^5+3}\,dx$ ist ein uneigentliches Integral.

Für $x \geq 1$ gilt $\quad 0 \leq \dfrac{x^2+1}{x^5+3} \leq \dfrac{x^2+x^2}{x^5} = \dfrac{2}{x^3}$ $\quad$ und man erhält

$$\int_1^\infty \frac{x^2+1}{x^5+3}\,dx = \lim_{a\to\infty}\int_1^a \frac{x^2+1}{x^5+3}\,dx \leq \lim_{a\to\infty}\int_1^a \frac{2}{x^3}\,dx$$
$$= \lim_{a\to\infty} -\frac{1}{x^2}\Big|_1^a = \lim_{a\to\infty}\left(1-\frac{1}{a^2}\right) = 1$$

Damit konvergiert das Ausgangsintegral absolut nach dem Majorantenkriterium.

(ii) Das Integral divergiert nach dem Minorantenkriterium,
denn für $\quad 0 \leq x \leq 1 \quad$ gilt $\quad x^{7/2} \leq x^{5/2}$:

$$\int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{x^4+x^3}\,dx = \lim_{a\to 0}\int_a^1 \frac{1}{x^{7/2}+x^{5/2}}\,dx \geq \lim_{a\to 0}\int_a^1 \frac{1}{x^{5/2}+x^{5/2}}\,dx$$
$$= \lim_{a\to 0} -\frac{1}{3x^{3/2}}\Big|_a^1 = \lim_{a\to 0}\frac{1}{3a^{3/2}} - \frac{1}{3} = \infty\,.$$

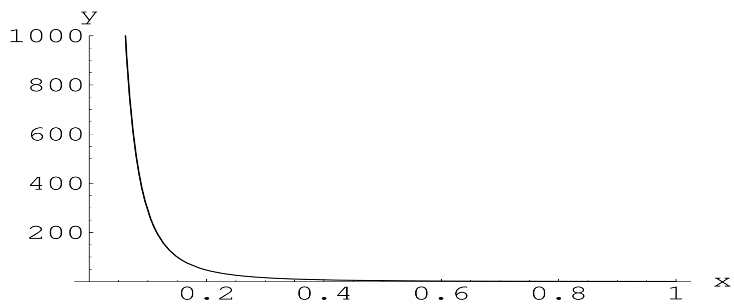


Bild 25 b)(ii): Funktion $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{x^4+x^3}$

Lösung 26:

a) (i) $\quad F(x) = \displaystyle\int_1^{2x} e^{3x+y}\,dy = e^{3x+y}\Big|_1^{2x} = e^{3x+2x} - e^{3x+1} = e^{5x} - e^{3x+1}$

$F'(x) = 5e^{5x} - 3e^{3x+1}$

(ii) $\quad F'(x) = e^{3x+2x}\cdot 2 - e^{3x+1}\cdot 0 + \displaystyle\int_1^{2x} 3e^{3x+y}\,dy$

$= 2e^{5x} + 3e^{3x+2x} - 3e^{3x+1} = 5e^{5x} - 3e^{3x+1}.$

b) Die Berechnung erfolgt über partielle Integration:

$$\begin{aligned}
\int_0^a \cos(\gamma t)e^{-st}\,dt &= -\cos(\gamma t)\frac{e^{-st}}{s}\bigg|_0^a - \int_0^a \gamma\sin(\gamma t)\frac{e^{-st}}{s}\,dt \\
&= -\cos(\gamma t)\frac{e^{-st}}{s}\bigg|_0^a + \gamma\sin(\gamma t)\frac{e^{-st}}{s^2}\bigg|_0^a - \int_0^a \gamma^2\cos(\gamma t)\frac{e^{-st}}{s^2}\,dt \\
\Rightarrow \quad \int_0^a \cos(\gamma t)e^{-st}\,dt &= \frac{1}{1+\gamma^2/s^2}\left(-\cos(\gamma t)\frac{e^{-st}}{s} + \gamma\sin(\gamma t)\frac{e^{-st}}{s^2}\bigg|_0^a\right) \\
\Rightarrow \quad \lim_{a\to\infty}\int_0^a \cos(\gamma t)e^{-st}\,dt &= \frac{1}{1+\gamma^2/s^2}\cdot\frac{1}{s} = \frac{s}{s^2+\gamma^2}
\end{aligned}$$

Lösung 27:

a) Mit partieller Integration und Additionstheorem erhält man:

$$\int(\sin x)^2\,dx = \int \sin x\sin x\,dx = -\sin x\cos x + \int(\cos x)^2\,dx + \tilde{C}$$

$$= -\sin x\cos x + \int 1-(\sin x)^2\,dx + \tilde{C}$$

$$= -\sin x\cos x + x - \int(\sin x)^2\,dx + \tilde{C}$$

$$\Rightarrow \quad \int(\sin x)^2\,dx = \frac{1}{2}\left(x-\sin x\cos x\right) + C$$

Damit erhält man

$$\begin{aligned}
V_{x-\text{Achse}} &= \pi\int_a^b \left(f(x)\right)^2\,dx = \pi\int_0^{\pi/2}\left(\sin x\right)^2\,dx \\
&= \frac{\pi}{2}\left(x-\sin x\cos x\right)\Big|_0^{\pi/2} = \frac{\pi^2}{4}
\end{aligned}$$

b) Bei Rotation um die y-Achse ist der Abstand vom Funktionsgraphen zur y-Achse gegeben durch $x = f^{-1}(y) = \arcsin y$.

Mit der Substitution $y = \sin x$ und partieller Integration erhält man

$$V_{y-\text{Achse}} = \pi\int_{f(a)}^{f(b)}\left(f^{-1}(y)\right)^2\,dy = \pi\int_0^1\left(\arcsin y\right)^2\,dy = \pi\int_0^{\pi/2} x^2\cos x\,dx$$

$$= \pi\left(x^2\sin x\Big|_0^{\pi/2} - 2\int_0^{\pi/2} x\sin x\,dx\right) = \pi\left(\frac{\pi^2}{4} + 2x\cos x\Big|_0^{\pi/2} - 2\int_0^{\pi/2}\cos x\,dx\right)$$

$$= \pi\left(\frac{\pi^2}{4} - 2\sin x\Big|_0^{\pi/2}\right) = \frac{\pi^3}{4} - 2\pi$$

c) Unter Verwendung von $\cosh^2 t - \sinh^2 t = 1$ ergibt sich

$$\int \sqrt{1+s^2}\,ds \overset{s=\sinh t}{=} \int \cosh^2 t\,dt = \sinh t\cosh t - \int \sinh^2 t\,dt$$

$$= \sinh t\cosh t + t - \int \cosh^2 t\,dt + \tilde{C} \quad \Rightarrow$$

$$\int \sqrt{1+s^2}\,ds = \frac{1}{2}\left(s\sqrt{1+s^2} + \operatorname{arsinh} s\right) + C$$

Die Mantelfläche berechnet sich dann durch:

$$M_{x-\text{Achse}} = 2\pi \int\limits_a^b f(x)\sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx = 2\pi \int\limits_0^{\pi/2} \sin x\sqrt{1+\cos^2 x}\,dx$$

$$\overset{s=\cos x}{=} -2\pi \int\limits_1^0 \sqrt{1+s^2}\,ds = \pi\left(s\sqrt{1+s^2} + \operatorname{arsinh} s\right)\Big|_0^1 = \pi\left(\sqrt{2} + \operatorname{arsinh} 1\right)$$

d) Für den Flächenplot muss der Vektor des Funktionsgraphen $\tilde{\boldsymbol{v}}(x) = \begin{pmatrix} x \\ f(x) \end{pmatrix}$ mit $0 \le x \le \pi/2$ und $f(x) = \sin x$ zunächst in den $\mathbb{R}^3$ eingebettet werden, also auf $\boldsymbol{v}(x) = \begin{pmatrix} x \\ f(x) \\ 0 \end{pmatrix}$ erweitert werden.

Anschließend wird $\boldsymbol{v}(x)$ mit der Drehmatrix $\boldsymbol{D}(\varphi)$ multipliziert, wobei eine ganze Umdrehung durch $0 \le \varphi \le 2\pi$ erreicht wird.

Für die Drehung um die x-Achse erhält man damit die folgende Parameterdarstellung der Mantelfläche

$$\boldsymbol{u}_{x-\text{Achse}}(x,\varphi) = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & -\sin\varphi \\ 0 & \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}}_{\boldsymbol{D}(\varphi)} \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ \sin x \\ 0 \end{pmatrix}}_{\boldsymbol{v}(x)} = \begin{pmatrix} x \\ \cos\varphi\sin x \\ \sin\varphi\sin x \end{pmatrix}$$

Der MATLAB Plotbefehl für Bild 27 a) lautet damit:

```
ezsurf('x','cos(p)*sin(x)','sin(p)*sin(x)',[0,2*pi,0,pi/2])
```

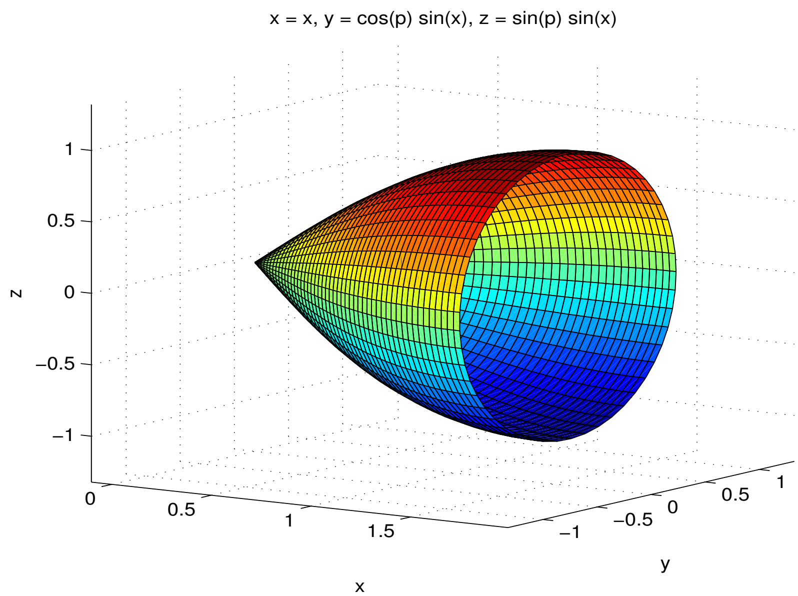


Bild 27 a) Rotation um die x-Achse

$$\boldsymbol{u}_{y-\text{Achse}}(x,\varphi) = \underbrace{\begin{pmatrix} \cos\varphi & 0 & -\sin\varphi \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\varphi & 0 & \cos\varphi \end{pmatrix}}_{\boldsymbol{D}(\varphi)} \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ \sin x \\ 0 \end{pmatrix}}_{\boldsymbol{v}(x)} = \begin{pmatrix} x\cos\varphi \\ \sin x \\ x\sin\varphi \end{pmatrix}$$

Der MATLAB Plotbefehl für Bild 27 b) lautet:

```
ezsurf('x*cos(p)','sin(x)','x*sin(p)',[0,2*pi,0,pi/2])
```

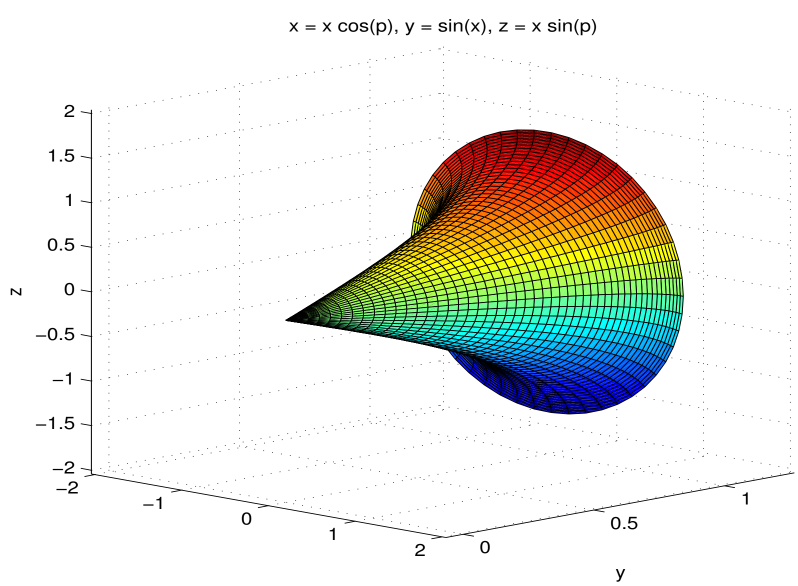


Bild 27 b) Rotation um die y-Achse

Lösung 28:

a) $\mathbf{c}(t) = \begin{pmatrix} 2t \\ t^{3/2} \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \dot{\mathbf{c}}(t) = \begin{pmatrix} 2 \\ 3\sqrt{t}/2 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow$

$$L(\mathbf{c}) = \int_0^1 ||\dot{\mathbf{c}}(t)||_2 \, dt \; = \int_0^1 \sqrt{(2)^2 + (3\sqrt{t}/2)^2} \, dt \; = \frac{1}{2} \int_0^1 \sqrt{16+9t} \, dt$$

$$\overset{x=16+9t}{=} \frac{1}{18} \int_{16}^{25} \sqrt{x} \, dx \; = \; \frac{1}{27} x^{3/2} \Big|_{16}^{25} \; = \; \frac{1}{27} \left((25)^{3/2} - (16)^{3/2} \right) \; = \; \frac{61}{27}$$

b) $\mathbf{c}(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \\ t/10 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \dot{\mathbf{c}}(t) = \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \\ 1/10 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \quad ||\dot{\mathbf{c}}(t)||_2 = \sqrt{(-\sin t)^2 + (\cos t)^2 + (1/10)^2} = \frac{\sqrt{101}}{10} \quad \Rightarrow$$

$$L(\mathbf{c}) = \int_0^{8\pi} ||\dot{\mathbf{c}}(t)||_2 \, dt \; = \int_0^{8\pi} \frac{\sqrt{101}}{10} \, dt \; = \; \frac{t\sqrt{101}}{10} \Big|_0^{8\pi} = \frac{4\pi\sqrt{101}}{5}$$

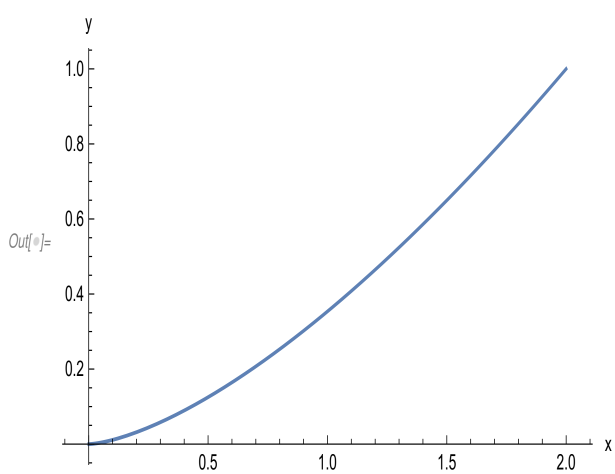


Bild 28 a) $\mathbf{c}(t) = (2t, t^{3/2})^T$

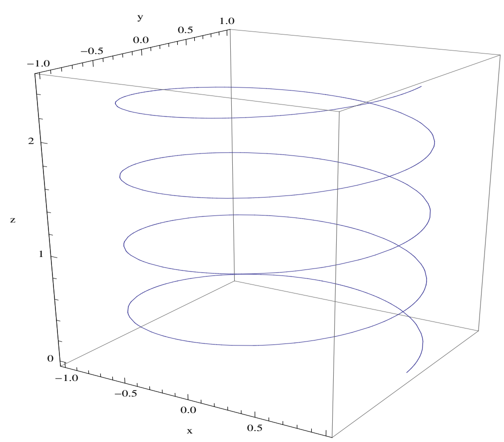


Bild 28 b): $\mathbf{c}(t) = (\cos t, \sin t, t/10)^T$