Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **SoSe 2021**
©Dr. K. Rothe

Hörsaalübungsaufgaben und Lösungen zu

Analysis II

für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Aufgabe 1:

Aus einem kreisförmigen Stück Pappe vom Radius R wird ein Sektor mit dem Winkel α herausgeschnitten. Dieser Kreissektor wird an den Schnittflächen so zusammengeklebt, so dass ein Kegel entsteht.

Für welchen Winkel α besitzt dieser Kegel maximales Volumen? Man berechne dieses Maximalvolumen.

Aufgabe 2:

a) Für die folgenden Kurven gebe man Parameterdarstellungen an und zeichne sie:

   (i) die Gerade, die durch die Punkte $(1,3)$ und $(-3,-4)$ verläuft,

   (ii) die durch $9x^2+4y^2-36x-8y+4=0$ beschriebene Ellipse.

b) Man zeichne die Epizykloide mit $t \in [0, 8\pi]$ und

$$\mathbf{c}(t) = \begin{pmatrix} 5\cos(t/4) - \cos(5t/4) \\ 5\sin(t/4) - \sin(5t/4) \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 3:
Gegeben sei die Zykloide $\mathbf{c}$ für $t \in [0, \infty[$ und $\mathbf{c}(t) = \begin{pmatrix} t - \sin t \\ 1 - \cos t \end{pmatrix}$.

a) Man zeichne die Zykloide $\mathbf{c}$ für $t \in [0, 3\pi]$.

b) Man berechne den Tangentenvektor zum Parameterwert t im Kurvenpunkt $\mathbf{c}(t)$. In welchen Kurvenpunkten ist $\mathbf{c}$ nicht regulär?

c) Man bestimme in allen regulären Kurvenpunkten, in denen der Anstieg gleich null ist, die Tangentengleichung in Parameterform und als Einzelgleichung.

d) Man berechne näherungsweise die Länge des Kurvenbogens zwischen $\mathbf{c}(\pi)$ und $\mathbf{c}(2\pi)$ unter Verwendung des Differentials der Bogenlänge zum Parameterwert $t = \pi$.

Aufgabe 4:
Mit $t, y \in \mathbb{R}$ wird durch $y - t^2 = 0$ eine Parabel beschrieben.

a) Man bestimme eine Parametrisierung $\mathbf{c}(t)$ der Parabel über den Funktionsgraphen.

b) Man berechne den Kurvenpunkt mit maximaler Krümmung,

c) den Krümmungskreis und

d) zeichne die Kurve mit dem berechneten Krümmungskreis.

Aufgabe 5:
Man berechne alle Stammfunktionen zu

a) $f_1(x) = 2x^5 - 5\sin x$, b) $f_2(x) = 4\cos x - 7\sinh x$

c) $f_3(x) = \dfrac{2 + xe^x}{x}$, d) $f_4(x) = \dfrac{3x^5 - 5x^3 + 4x}{\sqrt{x}}$.

Aufgabe 6:
Mit Hilfe der partiellen Integrationsregel berechne man

a) $\displaystyle\int (3x - 1)\cosh x \, dx$, b) $\displaystyle\int x \ln x \, dx$, c) $\displaystyle\int x^2 \cos x \, dx$,

d) $\displaystyle\int \cos t \sinh t \, dt$, e) $\displaystyle\int 15x\sqrt{x - 1} \, dx$.

Aufgabe 7:
Mit Hilfe der Substitutionsregel berechne man

a) $\displaystyle\int \sin(x)\cos^2(x)\,dx$, b) $\displaystyle\int 2x\sqrt{x^2+1}\,dx$, c) $\displaystyle\int x^2 e^{x^3}\,dx$,

d) $\displaystyle\int \frac{(\ln(2t+3))^4}{6t+9}\,dt$, e) $\displaystyle\int \frac{e^x}{e^{2x}+1}\,dx$, f) $\displaystyle\int \tan x\,dx$.

Aufgabe 8:
Man berechne die unbestimmten Integrale

a) $\displaystyle\int x e^{5x-2}\,dx$, b) $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{x+4}}\,dx$, c) $\displaystyle\int \cosh^2 t\,dt$,

d) $\displaystyle\int \sqrt{1+x^2}\,dx$, e) $\displaystyle\int \sin^3 t\cos^3 t\,dt$, f) $\displaystyle\int \arcsin x\,dx$.

Aufgabe 9:

Man berechne die folgenden Integrale

a) $\displaystyle\int \frac{3}{5-2x}\,dx$, b) $\displaystyle\int \frac{1}{(7x-4)^2}\,dx$, c) $\displaystyle\int \frac{6x^3-3x^2+2x-3}{2x-1}\,dx$,

d) $\displaystyle\int \frac{5}{x^2+2}\,dx$, e) $\displaystyle\int \frac{5x}{2x^2+2}\,dx$, f) $\displaystyle\int \frac{6x}{x^2+4x+5}\,dx$.

Aufgabe 10:
Man berechne folgende Integrale ggf. unter Verwendung der Partialbruchzerlegungsmethode

a) $\displaystyle\int \frac{7}{3x^2+15x-18}\,dx$,

b) $\displaystyle\int \frac{x^3+x^2-35x+17}{x^2+6x-7}\,dx$,

c) $\displaystyle\int \frac{9}{(2x^2+3)^2}\,dx$.

Aufgabe 11:
Man berechne unter Verwendung der Partialbruchzerlegungsmethode

$$\int \frac{8x^3 - 43x^2 + 46x - 39}{x^4 - 4x^3 + 27}\, dx \,.$$

Aufgabe 12:
Gegeben sei die Funktion $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = 3x + 4$.

a) Man berechne für die äquidistante Zerlegung

$$Z_n = \left\{-1, \frac{2-n}{n}, \frac{4-n}{n}, \frac{6-n}{n}, \cdots, 1\right\}$$

des Intervalls $I = [-1, 1]$ Unter- und Obersumme, also $U_f(Z_n)$ und $O_f(Z_n)$, zu f.

b) Man weise die Integrierbarkeit von f nach.

c) Man berechne $\displaystyle\int_{-1}^{1} 3x + 4\, dx$ über den Hauptsatz.

Aufgabe 13:
Man berechne die folgenden bestimmten Integrale

a) $\displaystyle\int_0^{\ln(2)} \frac{e^{3x}}{e^{3x} + 4}\, dx$ unter Verwendung der Substitution $t = e^x$,

b) $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \frac{1}{\cos x}\, dx$ unter Verwendung der Substitution $t = \tan \dfrac{x}{2}$.

Aufgabe 14:

a) Man berechne den Flächeninhalt F_1, der sich im Intervall $[-3, 3]$ zwischen x-Achse und der durch $y = x^2 - 4$ gegebenen Funktion befindet.

b) Man berechne den Flächeninhalt F_2, der Menge des $\mathbb{R}^2$, die von den Graphen der Funktionen f und g mit $f(x) = \cos x$ und $g(x) = 1 - 2x/\pi$ eingeschlossen wird.

Aufgabe 15:
Gegeben sei die Funktion

$$f\ :\ [0,2]\ \longrightarrow\ \mathbb{R}\quad\text{mit}\quad f(x)=x^3\ .$$

a) Man berechne das Volumen des Rotationskörpers, wenn der Funktionsgraph von f um die $x-$Achse rotiert.

b) Man berechne das Volumen des Rotationskörpers, wenn der Funktionsgraph von f um die $y-$Achse rotiert.

c) Man berechne die Mantel- und Oberfläche des Rotationskörpers, wenn der Funktionsgraph von f um die $x-$Achse rotiert.

d) Man zeichne die Mantelflächen der Rotationskörper aus a) und b).

Aufgabe 16:

a) Man berechne die Ableitung des parameterabhängigen Integrals

$$F(x)\ =\ \int\limits_1^{2x} e^{3x+y}\,dy\ .$$

b) Man berechne die uneigentlichen Integrale, falls sie existieren

(i) $\displaystyle\int\limits_1^9 \frac{4}{(x-1)^{2/3}}\,dx\ ,$

(ii) $\displaystyle\int\limits_0^\infty \frac{2}{(x+1)^{3/4}}\,dx\ .$

c) Man berechne für $f(t)=\cos(\gamma t)$ mit $\gamma\in\mathbb{R}$ die Laplace-Transformierte $F(s)$ für $s>0$.

Aufgabe 17:

a) Man untersuche die folgenden uneigentlichen Integrale auf Konvergenz (ohne sie zu berechnen)

(i) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x^2+1}{x^5+3}\,dx$,

(ii) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{x^4+x^3}\,dx$,

b) Mit Hilfe des Integral-Kriteriums für Reihen zeige man, dass für $0 < \alpha \leq 1$ die Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha}$$

divergiert.

c) Man berechne den Wert der Reihe $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} 4 \cdot \frac{2^{k+1}}{3^{k+2}}$.

Aufgabe 18:

Gegeben sei die Reihe $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{(-1)^n}{n+2} \cdot \frac{n+1}{n+3} \right)$.

a) Man zeige, dass die Reihe konvergiert.

b) Ab welchem Index k unterscheiden sich die Partialsummen

$$S_k = \sum_{n=0}^{k} \left(\frac{(-1)^n}{n+2} \cdot \frac{n+1}{n+3} \right)$$

vom Grenzwert S der Reihe um weniger als 0.001?

c) Wie lauten die ersten drei Nachkommastellen des Grenzwertes S?

Aufgabe 19:

Man untersuche die folgenden Reihen auf Konvergenz:

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt{n^2+n} - n \right)^n$,

b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{n!}$,

c) $\displaystyle\frac{1}{16} + \frac{3}{32} + \frac{9}{64} + \frac{27}{128} + \frac{81}{256} + \cdots$,

d) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k+1}{k^2+1}$.

Aufgabe 20:

a) Man untersuche die Funktionenfolgen

$$\text{(i)} \quad f_n : [-2,2] \to \mathbb{R},\ f_n(x) = \frac{1}{1+ne^{x^2}}\ , \qquad \text{(ii)} \quad h_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ h_n(x) = \frac{nx^2}{1+nx^2}\ .$$

auf punktweise und gleichmäßige Konvergenz.

b) Gegeben seien die folgenden Funktionenreihen

$$\text{(i)} \quad f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (x^3-1)(2-x^3)^k\ , \qquad \text{(ii)} \quad g(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k+1)^3(x^{2k}+1)}\ .$$

Man bestimme den maximalen Konvergenzbereich D und untersuche die Reihen auf punktweise und gleichmäßige Konvergenz in D.

Aufgabe 21:

a) Für folgende Potenzreihen bestimme man den Entwicklungspunkt und berechne den Konvergenzradius:

$$\text{(i)} \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{7^n(n+1)} \left(x - \frac{1}{2}\right)^n\ , \qquad \text{(ii)} \quad \sum_{n=0}^{\infty} \left(\left(\frac{2}{5}\right)^2 x\right)^{2n}\ .$$

b) Man bestimme den Konvergenzradius und das Konvergenzintervall der folgenden Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{7^n}{n+1} \left(\frac{x-1}{2}\right)^n$$

und untersuche das Konvergenzverhalten in den Randpunkten des Konvergenzintervalls (mit Begründung).

Aufgabe 22:

Gegeben sei die durch $\quad f(x) = \dfrac{6}{5-4x} \quad$ definierte Funktion.

a) Unter Verwendung der Summenformel für die geometrische Reihe:

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{k=0}^{\infty} z^k$$

berechne man die Potenzreihe von f zum Entwicklungspunkt z_0 und bestimme deren Konvergenzradius für $z_0 = \dfrac{3i}{4}$.

b) Man bestimme die Glieder der Potenzreihenentwicklung von f mit Entwicklungspunkt $x_0 = 0$ über das Cauchy-Produkt von Reihen und berechne den zugehörigen Konvergenzradius.

Aufgabe 23:

a) Unter Verwendung der Potenzreihe von

$$f(x) = \frac{6}{5-4x}$$

berechne man die Potenzreihe von

$$g(x) = \frac{1}{(5-4x)^2}$$

zum Entwicklungspunkt x_0 und bestimme den zugehörigen Konvergenzradius.

b) Man berechne die Lösung der gewöhnlichen Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$y'' = y$$

mit den Anfangswerten $y(0) = 1$ und $y'(0) = 0$ in folgender Potenzreihendarstellung

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k .$$

Aufgabe 24:

a) Für die durch $f(x) = \dfrac{2}{4+x^2}$ definierte Funktion berechne man die Potenzreihe von f zum Entwicklungspunkt $x_0 = 0$ mit Konvergenradius unter Verwendung der geometrischen Reihe.

b) Man berechne die Potenzreihe von $\arctan(x/2)$ zum Entwicklungspunkt $x_0 = 0$, bestimme den Konvergenzradius, untersuche das Konvergenzverhalten in den Randpunkten und berechne im Falle der Konvergenz den Wert der entsprechenden Reihen.

c) Man zeige, dass $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} = \frac{\pi}{4}$ gilt.

d) Man berechnet die Taylor-Reihe der durch $f(x) = \dfrac{6}{5-4x}$ definierten Funktion zum Entwicklungspunkt $x_0 = 0$. Dazu beweise man zunächst über Induktion für $n \geq 0$

$$f^{(n)}(x) = \frac{6 \cdot 4^n \cdot n!}{(5-4x)^{n+1}} .$$

Aufgabe 25:
Gegeben sei die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} x(x+2) & , \quad -2 \leq x \leq 0 \quad , \\ x(2-x) & , \quad 0 \leq x \leq 2 \quad . \end{cases}$$

a) Man zeichne die Funktion f.

b) Man berechne die Fourier-Reihe der 4-periodischen direkten Fortsetzung von f.

c) Man zeichne $S_m(x)$ und die Fehlerfunktionen $f(x) - S_m(x)$ für $m = 1, 3, 5$, wobei $S_m(x)$ die m-te Partialsumme der Fourier-Reihe darstellt.

d) Man zeige mit Hilfe von b) die Identität $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^3} = \frac{\pi^3}{32}$.

Aufgabe 26:
Gegeben sei die 2π-periodische direkte Fortsetzung der Funktion f mit

$$f(x) = \begin{cases} -\sin x & , \quad -\pi \leq x \leq 0 \quad , \\ 0 & , \quad 0 \leq x \leq \pi \quad . \end{cases}$$

a) Man zeichne die direkte Fortsetung im Intervall $[-\pi, 4\pi]$.

b) Man berechne die zugehörige Fourier-Reihe.

c) Man zeichne die Partialsummen $S_0(x), \ldots, S_3(x)$ der berechneten Fourierreihe.

d) Mit Hilfe von b) zeige man die Identität

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{1}{2} .$$

Aufgabe 27:
Gegeben sei die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} 0 & , \quad 0 \le x < \pi \, , \\ 1 & , \quad \pi \le x < 3\pi \end{cases}$$

a) Man zeichne die 3π-periodische Fortsetzung der Funktion f.

b) Man berechne die komplexe Fourier-Reihe der 3π-periodischen Fortsetzung von f.

c) Man gebe die reellen Fourier-Koeffizienten dieser Fourier-Reihe an.

d) Man zeichne die Partialsumme $S_{30}(x)$ der berechneten Fourier-Reihe.

Aufgabe 28:
Von der Funktion $\sinh(x)$ sind nur die Stützstellen gegeben

x_i	0	3	6
$\sinh(x_i)$	0	10	201.7 .

a) Man gebe die Lagrange-Darstellung des Interpolationspolynoms $p_2(x)$ an.

b) Man berechne die Newtonschen Darstellung von $p_2(x)$ mit Hilfe des Schemas der dividierten Differenzen.

c) Man berechne $p_2(4)$ als Näherungswert für $\sinh(4)$ sowie den Fehler $|\sinh(4) - p_2(4)|$ und zeichne $\sinh(x)$ und $p_2(x)$ im Intervall $[0, 6.5]$.

d) Zusätzlich sei noch $\sinh(5) = 74.2$ gegeben. Mit dieser Information berechne man $p_3(x)$ und $p_3(4)$ als Näherungswert für $\sinh(4)$ sowie den Fehler $|\sinh(4) - p_3(4)|$ und zeichne $\sinh(x)$ und $p_3(x)$ im Intervall $[0, 6.5]$.

Lösung 1:

Für den Umfang des Kegelbodenkreises mit Radius r gilt:

$$2\pi r = \alpha R \quad \Rightarrow \quad r(\alpha) = \frac{\alpha R}{2\pi}\ .$$

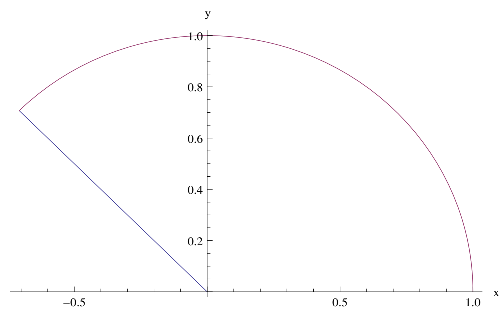

Bild 1 a) Kreissektor mit $R = 1$

Da die Länge der Kegelmantellinie mit R übereinstimmt, gilt nach dem Satz des Pythagoras $h^2 + r^2 = R^2$. Damit erhält man für die Kegelhöhe h:

$$h(\alpha) = \sqrt{R^2 - r^2(\alpha)} = \sqrt{R^2 - \frac{\alpha^2 R^2}{(2\pi)^2}} = \frac{R}{2\pi}\sqrt{(2\pi)^2 - \alpha^2}\ .$$

Das Kegelvolumen ist also gegeben durch

$$V(\alpha) = \frac{\pi r^2(\alpha) h(\alpha)}{3} = \frac{\pi R^3}{3(2\pi)^3}\cdot \alpha^2\sqrt{(2\pi)^2 - \alpha^2} = \frac{\pi R^3}{3(2\pi)^3}\cdot\sqrt{(2\pi)^2\alpha^4 - \alpha^6}\ \geq 0\ .$$

Per Konstruktion gilt $0 \leq \alpha \leq 2\pi$. In den Randpunkten des Definitionsbereichs $\alpha_0 = 0$ und $\alpha_2 = 2\pi$ liegen offenbar Minima vor:

$$V(0) = 0 = V\,(2\pi)\ .$$

Die Extremalkandidaten im Inneren ergeben sich aus:

$$V'(\alpha) = \frac{\pi R^3}{3(2\pi)^3}\cdot\frac{4(2\pi)^2\alpha^3 - 6\alpha^5}{2\sqrt{(2\pi)^2\alpha^4 - \alpha^6}} = \frac{\pi R^3}{3(2\pi)^3}\cdot\frac{\alpha(2(2\pi)^2 - 3\alpha^2)}{\sqrt{(2\pi)^2 - \alpha^2}} \begin{cases} > 0 & , \quad 0 < \alpha < 2\pi\sqrt{\dfrac{2}{3}} \\ = 0 & , \quad \alpha_1 = 2\pi\sqrt{\dfrac{2}{3}} \\ < 0 & , \quad 2\pi\sqrt{\dfrac{2}{3}} < \alpha < 2\pi\ . \end{cases}$$

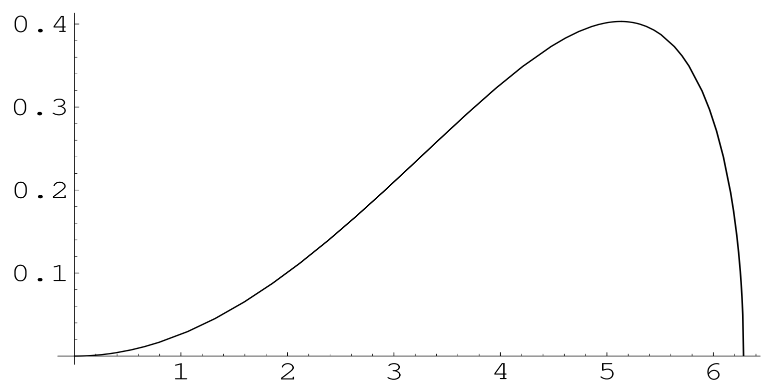

Bild 1 b) $V(\alpha)$ mit $R = 1$

Daher liefert $\alpha_1 = 2\pi\sqrt{\dfrac{2}{3}} = 5.130199321..$ das maximale Volumen mit

$$V\left(2\pi\sqrt{\frac{2}{3}}\right) = \frac{\pi R^3}{3(2\pi)^3}\cdot\frac{2(2\pi)^2}{3}\sqrt{(2\pi)^2-\frac{2(2\pi)^2}{3}} = \frac{2\pi R^3}{9\sqrt{3}} \approx 0.403066525R^3.$$

Lösung 2:

a) (i) Die Orts-, Richtungsvektordarstellung für eine Gerade durch die Punkte $\boldsymbol{a} = (1,3)^T$ und $\boldsymbol{b} = (-3,-4)^T$ mit $t \in \mathbb{R}$ lautet

$$\mathbf{c}(t) = \boldsymbol{a} + t(\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} + t\left(\begin{pmatrix} -3 \\ -4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -4 \\ -7 \end{pmatrix}$$

Mathematica Plotbefehl:

```
ParametricPlot[{{1 + t (-3 - 1), 3 + t (-4 - 3)}}, {t, -0.5, 3},
AxesLabel -> {"x", "y"}, PlotRange -> {-3, 4}]
```

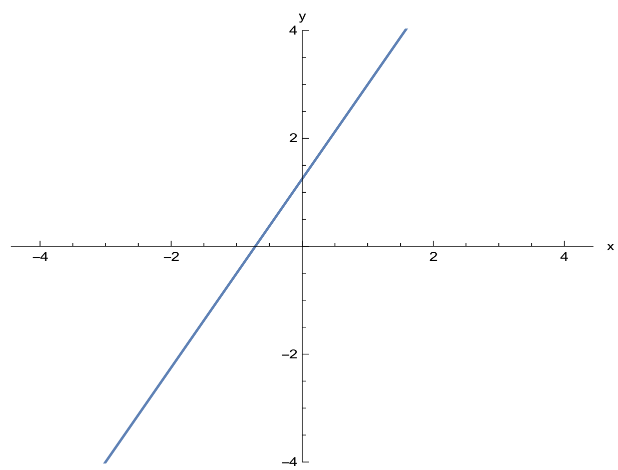

Bild 2 a) (i) Gerade durch $\boldsymbol{a} = (1,3)^T$ und $\boldsymbol{b} = (-3,-4)^T$

(ii) Mit quadratischer Ergänzung erhält man eine Ellipsengleichung mit den Halbachsen $a = 2$ und $b = 3$ und dem Mittelpunkt $(x_0, y_0) = (2, 1)$.

$$\begin{aligned} 0 &= 9x^2 + 4y^2 - 36x - 8y + 4 \\ &= 9(x^2 - 4x + 4 - 4) + 4(y^2 - 2y + 1) \\ &= 9(x-2)^2 - 36 + 4(y-1)^2 \\ \Leftrightarrow 1 &= \frac{(x-2)^2}{2^2} + \frac{(y-1)^2}{3^2} \end{aligned}$$

Parameterdarstellung durch angepasste Polarkoordinaten

$$\mathbf{c}(t) = \begin{pmatrix} 2 + 2\cos t \\ 1 + 3\sin t \end{pmatrix}\,, \quad t \in [0, 2\pi[$$

Mathematica Plotbefehl:

```
ParametricPlot[{2 + 2 Cos[t], 1 + 3 Sin[t]}, {t, 0, 2 Pi},
 AxesLabel -> {"x", "y"}, PlotRange -> {-2, 4}]
```

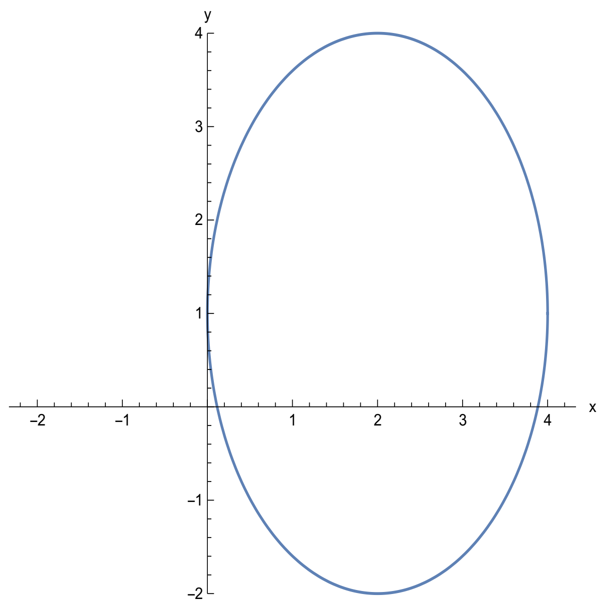

Bild 2 a) (ii) Ellipse, Halbachsen $a = 2$ und $b = 3$, Mittelpunkt $(x_0, y_0) = (2, 1)$

b) Mathematica Plotbefehl:

```
ParametricPlot[{{5 Cos[t/4] - Cos[5 t/4],
   5 Sin[t/4] - Sin[5 t/4]}, {5 + Cos[t], Sin[t]}, {4 Cos[t],
   4 Sin[t]}}, {t, 0, 8 Pi}, AxesLabel -> {"x", "y"}]
```

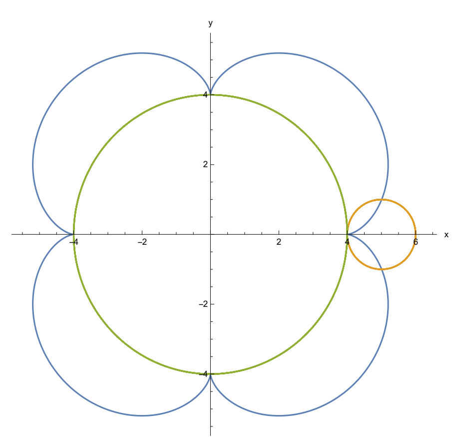

Bild 2 b) Epizykloide mit $r = 1$ und $R = 4$

Wird ein kleiner Kreis mit Radius r außen auf einem großen Kreis mit Radius R abgerollt, so beschreibt die Epizykloide die Bahnkurve des Berührungspunktes P der beiden Kreise zu Beginn des Abrollens. Für $r = 1$ und $R = 4$ kehrt P nach $R/r = 4$-maligem abrollen in seinen Ausgangspunkt zurück.

Lösung 3:

a) $\mathbf{c}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t - \sin t \\ 1 - \cos t \end{pmatrix}, \quad t \in [0, 3\pi]\,,$ Mathematica Plotbefehl

```
ParametricPlot[{{t - Sin[t], 1 - Cos[t]}, {Cos[t],
   Sin[t] + 1}, {0.07 Cos[t], 0.07 Sin[t]}}, {t, 0, 3 Pi},
 AxesLabel -> {"x", "y"}, AspectRatio -> 0.2]
```

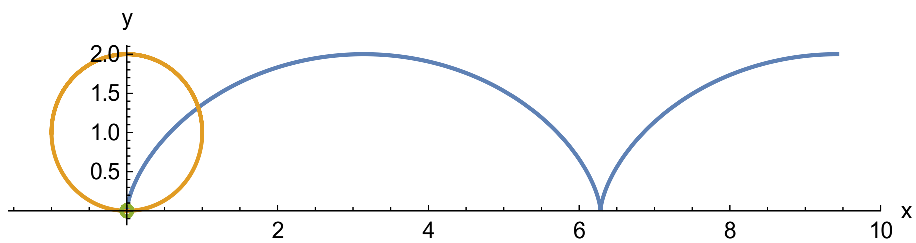

Bild 3 a) Zykloide, mit Abrollkreis vom Radius $R = 1$

Wird ein Kreis mit Radius R, auf dem sich der Punkt P befindet (für $t = 0$ sei $P = \mathbf{0}$), auf der x-Achse abgerollt, so beschreibt die Zykloide die Bahnkurve von P.

b) Tangentenvektor: $\quad \dot{\mathbf{c}}(t) = \begin{pmatrix} 1 - \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$

Für reguläre Punkte gilt $||\dot{\mathbf{c}}(t)|| = \sqrt{(1 - \cos t)^2 + \sin^2 t} > 0.$

$$1 - \cos t = 0 \;\Rightarrow\; t_n = 2n\pi \quad \text{mit} \quad n \in \mathbb{N}_0 \;\Rightarrow\; \sin t_n = 0 \;\Rightarrow\; ||\dot{\mathbf{c}}(t_n)|| = 0$$

Nur für $t_n = 2n\pi$ erhält man also die singulären Punkte $\mathbf{c}(t_n) = (2n\pi, 0)^T$.

c) Wird mit α der Winkel zwischen x-Achse und Tangentialvektor $\dot{\mathbf{c}}(t) = (\dot{x}(t), \dot{y}(t))^T$ im Punkt $\mathbf{c}(t)$ beschrieben, so ergibt sich der Anstieg durch

$$\tan\alpha = \frac{\dot{y}(t)}{\dot{x}(t)}.$$

Einen Anstieg von null, d.h. eine waagerechte Tangente, erhält man daher durch

$$\dot{y}(t) = \sin t = 0 \quad \wedge \quad \dot{x}(t) \neq 0.$$

Da die singulären Kurvenpunkte zu den Parameterwerten $t_n = 2n\pi$ ausgenommen sind, ergibt sich eine waagerechte Tangente nur für die Parameterwerte $t_n = (2n+1)\pi$ mit $n \in \mathbb{N}_0$ in den Kurvenpunkten

$$\mathbf{c}((2n+1)\pi) = \begin{pmatrix} (2n+1)\pi - \sin((2n+1)\pi) \\ 1 - \cos((2n+1)\pi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (2n+1)\pi \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Tangentengleichung in Parameterform mit $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\boldsymbol{T}(\lambda) = \mathbf{c}(t_0) + \lambda\,\dot{\mathbf{c}}(t_0) = \begin{pmatrix} (2n+1)\pi \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overbrace{(2n+1)\pi + 2\lambda}^{=:x} \\ 2 \end{pmatrix}$$

Tangentengleichung als Einzelgleichung mit $x \in \mathbb{R}$

$$y(x) = y(t_0) + \frac{\dot{y}(t_0)}{\dot{x}(t_0)}(x - x(t_0)) = 2 + \frac{0}{2}(x - (2n+1)\pi) = 2$$

d) Für die Bogenlängendifferenz Δs gilt mit $t = \pi$ und $dt = 2\pi - \pi = \pi$

$$\Delta s \approx ds = \sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)}dt = \left(\sqrt{2^2 + 0^2}\right)\pi = 2\pi$$

Mit Hilfe der Integration lässt sich (später) Δs exakt berechnen

$$\begin{aligned} \Delta s &= \int_\pi^{2\pi} \sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)}dt = \int_\pi^{2\pi} \sqrt{(1-\cos t)^2 + \sin^2 t}dt \\ &= \int_\pi^{2\pi} \sqrt{2 - 2\cos t}dt = \sqrt{2}\int_\pi^{2\pi} \sqrt{2\sin^2(t/2)}dt = 2\int_\pi^{2\pi} |\sin(t/2)|dt \quad \left(\leq 2\int_\pi^{2\pi} dt = 2\pi\right) \\ &= -4\cos(t/2)\big|_\pi^{2\pi} = 4\,. \end{aligned}$$

Lösung 4:

a) Durch Auflösen nach y erhält man $\quad y - t^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad y(t) = t^2.$

Parametrisierung von $\mathbf{c}$ über den Funktionsgraphen mit $t \in \mathbb{R}$

$$\mathbf{c}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ t^2 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \dot{\mathbf{c}}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2t \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \ddot{\mathbf{c}}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

b) Die Krümmung berechnet man durch

$$\kappa(t)=\frac{\dot{x}(t)\ddot{y}(t)-\ddot{x}(t)\dot{y}(t)}{\left(\dot{x}(t)^2+\dot{y}(t)^2\right)^{3/2}}=\frac{1\cdot 2-0\cdot 2t}{\left(1+(2t)^2\right)^{3/2}}=\frac{2}{\left(1+4t^2\right)^{3/2}}$$

$$\Rightarrow\quad \dot{\kappa}(t)=-\frac{24t}{\left(1+4t^2\right)^{5/2}}\begin{cases}>0 & t<0 \quad \text{streng monoton wachsend}\\ =0 & t=0 \quad \text{strenges globales Maximum}\\ <0 & 0<t \quad \text{streng monoton fallend}\end{cases}$$

Damit liegt das strenge globale Maximum mit Krümmungswert $\kappa(0)=2$ im Kurvenpunkt $\mathbf{c}(0)=(0,0)^T$.

c) Für den Krümmungskreis erhält man

Krümmungsradius: $\quad R=\dfrac{1}{\kappa(0)}=\dfrac{1}{2}$

Krümmungsmittelpunkt:

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix}x_m(0)\\ y_m(0)\end{pmatrix} &= \begin{pmatrix}x(0)\\ y(0)\end{pmatrix}+\frac{\dot{x}(0)^2+\dot{y}(0)^2}{\dot{x}(0)\ddot{y}(0)-\ddot{x}(0)\dot{y}(0)}\begin{pmatrix}-\dot{y}(0)\\ \dot{x}(0)\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}+\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 1/2\end{pmatrix}\end{aligned}$$

d) Mathematica Plotbefehl

```
ParametricPlot[{{t, t^2}, {Cos[t]/2, Sin[t]/2 + 1/2}}, {t, -Pi, Pi},
               AxesLabel -> {"x", "y"}, PlotRange -> {-1.5, 1.5}]
```

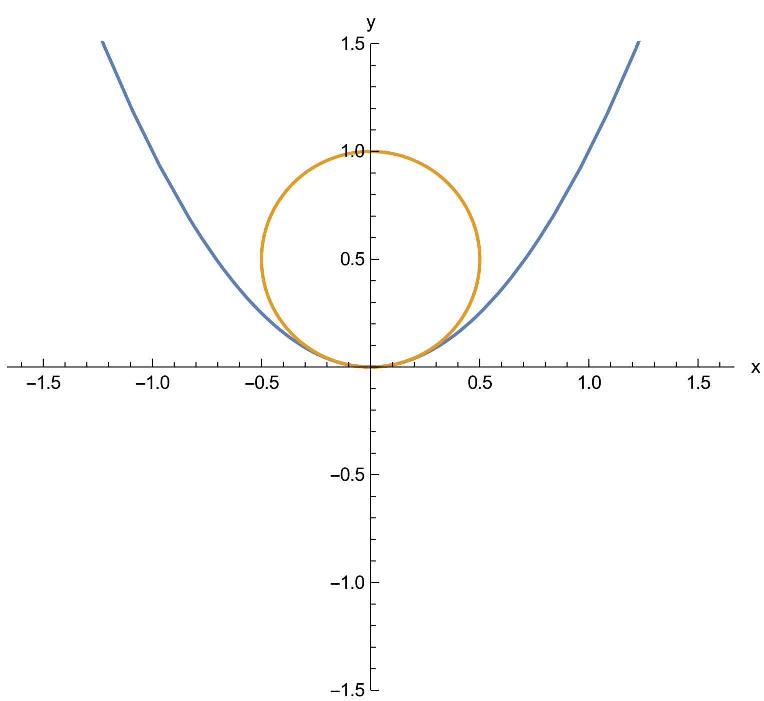

Bild 4 $\quad y(t)=t^2$ mit Krümmungskreis in $(0,0)$

Lösung 5:

a) $\displaystyle\int 2x^5 - 5\sin x\,dx \;=\; \frac{x^6}{3} + 5\cos x + C\,,$

b) $\displaystyle\int 4\cos x - 7\sinh x\,dx \;=\; 4\sin x - 7\cosh x + C\,,$

c) $\displaystyle\int \frac{2+xe^x}{x}\,dx \;=\; \int \frac{2}{x} + e^x\,dx \;=\; 2\ln|x| + e^x + C\,,$

d) $\displaystyle\int \frac{3x^5 - 5x^3 + 4x}{\sqrt{x}}dx = \int 3x^{9/2} - 5x^{5/2} + 4x^{1/2}dx = \frac{6}{11}x^{11/2} - \frac{10}{7}x^{7/2} + \frac{8}{3}x^{3/2} + C$

Lösung 6:

a) partielle Integration: $\quad u = 3x-1\,,\; v' = \cosh x$

$$\begin{aligned}\int (3x-1)\cosh x\,dx &= (3x-1)\sinh x - \int 3\sinh x\,dx + C\\ &= (3x-1)\sinh x - 3\cosh x + C\end{aligned}$$

b) partielle Integration: $\quad u' = x\,,\; v = \ln x$

$$\int x\ln x\,dx \;=\; \frac{x^2}{2}\ln x - \int \frac{x^2}{2}\frac{1}{x}\,dx \;=\; \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{x^2}{4} + C$$

c) partielle Integration: $\quad u = x^2\,,\; v' = \cos x$

$$\int x^2\cos x\,dx = x^2\sin x - \int 2x\sin x\,dx + C$$

weitere partielle Integration: $\quad u = 2x\,,\; v' = \sin x$

$$\begin{aligned}&= x^2\sin x + 2x\cos x - \int 2\cos x\,dx + C\\ &= x^2\sin x + 2x\cos x - 2\sin x + C\end{aligned}$$

d) partielle Integration: $\quad u = \sinh t\,,\; v' = \cos t$

$$\int \cos t\sinh t\,dt = \sin t\sinh t - \int \sin t\cosh t\,dt + \tilde{C}$$

weitere partielle Integration: $u = \cosh t\ ,\ v' = \sin t$

$$= \sin t \sinh t - (-\cos t \cosh t - \int -\cos t \sinh t\, dt) + \tilde{C}$$

$$= \sin t \sinh t + \cos t \cosh t - \int \cos t \sinh t\, dt + \tilde{C}$$

$$\Rightarrow \quad \int \cos t \sinh t\, dt = \frac{\sin t \sinh t + \cos t \cosh t}{2} + C,$$

e) partielle Integration: $u = 15x\ ,\ v' = \sqrt{x-1}$

$$\begin{aligned}
\int 15x\sqrt{x-1}\, dx &= \frac{2 \cdot 15x}{3}(x-1)^{3/2} - \int \frac{2 \cdot 15}{3}(x-1)^{3/2}\, dx + C \\
&= 10x(x-1)^{3/2} - \int 10(x-1)^{3/2}\, dx + C \\
&= 10x(x-1)^{3/2} - \frac{20}{5}(x-1)^{5/2} + C \\
&= (x-1)^{3/2}(10x - 4(x-1)) + C \\
&= 2(x-1)^{3/2}(3x+2) + C
\end{aligned}$$

Lösung 7:

a) Substitution: $u = \cos x \ \rightarrow\ du = -\sin(x)\, dx$

$$\int \sin(x)\cos^2(x)\, dx = -\int u^2\, du = -\frac{u^3}{3} + C = -\frac{\cos^3 x}{3} + C$$

b) Substitution: $s = x^2 + 1 \rightarrow\ ds = 2x\, dx$

$$\int 2x\sqrt{x^2+1}\, dx = \int \sqrt{s}\, ds = \frac{2s^{3/2}}{3} + C = \frac{2(x^2+1)^{3/2}}{3} + C\ .$$

c) Substitution: $t = x^3 \ \rightarrow\ dt = 3x^2\, dx \ \rightarrow\ dx = \dfrac{dt}{3x^2}$

$$\int x^2 e^{x^3}\,dx = \frac{1}{3}\int e^t\,dt = \frac{1}{3}e^t + C = \frac{1}{3}e^{x^3} + C\,.$$

d) Substitution: $x = 2t+3 \;\rightarrow\; dx = 2\,dt \;\;\rightarrow\; dt = \dfrac{dx}{2}$

$$\int \frac{(\ln(2t+3))^4}{6t+9}\,dt = \frac{1}{2}\int \frac{(\ln(x))^4}{3x}\,dx = \frac{1}{6}\int \frac{1}{x}\cdot(\ln(x))^4\,dx$$

weitere Substitution: $u = \ln x \;\rightarrow\; du = \dfrac{1}{x}\,dx$

$$= \frac{1}{6}\int u^4\,du = \frac{u^5}{30} + C = \frac{(\ln x)^5}{30} + C = \frac{(\ln(2t+3))^5}{30} + C$$

e) Substitution: $t = e^x \;\rightarrow\; \dfrac{dt}{dx} = e^x \;\rightarrow\; dx = \dfrac{dt}{t}$

$$\int \frac{e^x}{e^{2x}+1}\,dx = \int \frac{t}{t^2+1}\,\frac{dt}{t} = \int \frac{1}{t^2+1}\,dt = \arctan t + C = \arctan e^x + C$$

f) $\displaystyle\int \tan x\,dx = \int \frac{\sin x}{\cos x}\,dx$

Substitution: $t = \cos x \;\rightarrow\; dt = -\sin x\,dx$

$$\int \tan x\,dx = \int \frac{\sin x}{\cos x}\,dx = -\int \frac{1}{t}\,dt = -\ln|t| + C = -\ln|\cos x| + C$$

Lösung 8:

a) partielle Integration: $u = x,\; v' = e^{5x-2}$

$$\int x e^{5x-2}\,dx = \frac{xe^{5x-2}}{5} - \int \frac{e^{5x-2}}{5}\,dx + C = \frac{xe^{5x-2}}{5} - \frac{e^{5x-2}}{25} + C\,,$$

b) partielle Integration: $u = x$ und $v' = \dfrac{1}{\sqrt{x+4}}$

$$\int \frac{x}{\sqrt{x+4}}\,dx = x \cdot 2\sqrt{x+4} - 2\int \sqrt{x+4}\,dx + C$$

$$= 2x\sqrt{x+4} - \frac{4}{3}(x+4)^{3/2} + C = \frac{2}{3}(x-8)\sqrt{x+4} + C$$

Alternative, Substitution:

$u = \sqrt{x+4} \Rightarrow x = u^2 - 4, \quad dx/du = 2u \to dx = 2u\,du$

$$\int \frac{x}{\sqrt{x+4}}\,dx = \int \frac{u^2-4}{u} \cdot 2u\,du = 2\int u^2 - 4\,du$$

$$= 2\left(\frac{u^3}{3} - 4u\right) + C = \frac{2u}{3}\left(u^2 - 12\right) + C = \frac{2}{3}(x-8)\sqrt{x+4} + C$$

c) Additionstheorem: $\cosh^2 t - \sinh^2 t = 1$ und

partielle Integration: $u = \cosh t,\ v' = \cosh t$

$$\int \cosh^2 t\,dt = \int \cosh t \cosh t\,dt = \cosh t \sinh t - \int \sinh t \sinh t\,dt + \tilde{C}$$

$$= \cosh t \sinh t - \int \cosh^2 t - 1\,dt + \tilde{C} \quad \Rightarrow$$

$$2\int \cosh^2 t\,dt = t + \cosh t \sinh t + \tilde{C} \quad \Rightarrow$$

$$\int \cosh^2 t\,dt = \frac{1}{2}\left(t + \cosh t \sinh t\right) + C$$

d) Substitution: $x = \sinh t \Rightarrow dx = \cosh t\,dt$ und $t = \text{arsinh} x$

$$\int \sqrt{1+x^2}\,dx = \int \sqrt{1+\sinh^2 t}\,\cosh t\,dt = \int \cosh^2 t\,dt$$

$$= \frac{1}{2}\left(t + \cosh t \sinh t\right) + C = \frac{1}{2}\left(\text{arsinh} x + x\sqrt{1+x^2}\right) + C$$

e) Additionstheorem: $\cos^2 t + \sin^2 t = 1$ und

Substitution: $x = \sin t \Rightarrow dx = \cos t\,dt$

$$\begin{aligned}\int \sin^3 t \cos^3 t \, dt &= \int \sin^3 t(1-\sin^2 t)\cos t \, dt = \int x^3(1-x^2)\, dx \\ &= \frac{x^4}{4} - \frac{x^6}{6} + C = \frac{\sin^4 t}{4} - \frac{\sin^6 t}{6} + C\end{aligned}$$

f) $\displaystyle\int \arcsin x \, dx = \int 1 \cdot \arcsin x \, dx$

partielle Integration: $u' = 1,\ v = \arcsin x \Leftrightarrow x = \sin v \quad \Rightarrow$

$$v' = (\arcsin x)' = \frac{1}{(\sin v)'} = \frac{1}{\cos v} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 v}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\int \arcsin x \, dx = x \arcsin x - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\, dx + C$$

Substitution: $u = 1 - x^2 \ \rightarrow\ du = -2x\,dx \ \rightarrow\ -\dfrac{du}{2} = x\,dx$

$$\begin{aligned}\int \arcsin x \, dx &= x \arcsin x + \int \frac{1}{2\sqrt{u}}\, du + C \\ &= x \arcsin x + \sqrt{u} + C = x \arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C\end{aligned}$$

Lösung 9:

a) Substitution: $t = 5 - 2x \quad \rightarrow \quad dt = -2\,dx$

$$\int \frac{3}{5-2x}\, dx = -\frac{3}{2}\int \frac{1}{t}\, dt = -\frac{3}{2}\ln|t| + C = -\frac{3}{2}\ln|5-2x| + C$$

b) Substitution: $t = 7x - 4 \quad \rightarrow \quad dt = 7\,dx$

$$\int \frac{1}{(7x-4)^2}\, dx = \frac{1}{7}\int \frac{1}{t^2}\, dt = -\frac{1}{7}t^{-1} + C = -\frac{1}{7(7x-4)} + C = \frac{1}{28-49x} + C$$

c) Polynomdivision:

$$\begin{array}{l} (6x^3 - 3x^2 + 2x - 3) : (2x-1) = 3x^2 + 1 - \dfrac{2}{2x-1} \\ \underline{-(6x^3 - 3x^2)\qquad\quad} \\ \qquad\qquad\quad 2x \quad -3 \\ \qquad\qquad \underline{-(2x \quad -1)} \\ \qquad\qquad\qquad\quad -2 \end{array}$$

$$\int \frac{6x^3 - 3x^2 + 2x - 3}{2x - 1}\, dx = \int 3x^2 + 1 - \frac{2}{2x - 1}\, dx$$

Substitution: $\quad t = 2x - 1 \quad \to \quad dt = 2\, dx$

$$= x^3 + x - \int \frac{1}{t}\, dt + C = x^3 + x - \ln|t| + C = x^3 + x - \ln|2x - 1| + C$$

d) $$\int \frac{5}{x^2 + 2}\, dx = \frac{5}{2} \int \frac{1}{(x/\sqrt{2})^2 + 1}\, dx$$

Substitution: $\quad t = \frac{x}{\sqrt{2}} \to dx = \sqrt{2}\, dt$

$$= \frac{5\sqrt{2}}{2} \int \frac{1}{t^2 + 1}\, dt = \frac{5}{\sqrt{2}} \arctan(t) + C = \frac{5}{\sqrt{2}} \arctan\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) + C$$

e) $$\int \frac{5x}{2x^2 + 2}\, dx = \frac{5}{4} \int \frac{2x}{x^2 + 1}\, dx$$

Substitution: $\quad t = x^2 + 1 \to dt = 2x\, dx$

$$= \frac{5}{4} \int \frac{1}{t}\, dt = \frac{5}{4} \ln|t| + C = \frac{5}{4} \ln|x^2 + 1| + C$$

f) $$\int \frac{6x}{x^2 + 4x + 5}\, dx = \int \frac{3(2x + 4) - 12}{(x + 2)^2 + 1}\, dx$$

$$= 3 \int \frac{2(x + 2)}{(x + 2)^2 + 1}\, dx - 12 \int \frac{1}{(x + 2)^2 + 1}\, dx$$

Substitution: $\quad t = x + 2 \to dt = dx$

$$= 3 \int \frac{2t}{t^2 + 1}\, dt - 12 \int \frac{1}{t^2 + 1}\, dt$$

Substitution: $\quad u = t^2 + 1 \to du = 2t\, dt$

$$= 3 \int \frac{1}{u}\, du - 12 \arctan t = 3 \ln|u| - 12 \arctan t + C$$

$$= 3 \ln|t^2 + 1| - 12 \arctan(x + 2) + C = 3 \ln|x^2 + 4x + 5| - 12 \arctan(x + 2) + C$$

Lösung 10:

a) Nennerfaktorisierung: $3x^2+15x-18 = 3(x^2+5x-6) = 3(x-1)(x+6)$

$$\Rightarrow \quad \frac{7}{3x^2+15x-18} = \frac{7}{3}\cdot\left(\frac{1}{x^2+5x-6}\right) = \frac{7}{3}\cdot\left(\frac{1}{(x-1)(x+6)}\right)$$

Partialbruchzerlegungsansatz:

$$\frac{1}{(x-1)(x+6)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+6} = \frac{A(x+6)+B(x-1)}{(x-1)(x+6)}$$

$$\Rightarrow \quad 1 = A(x+6)+B(x-1)$$

Nennernullstellen einsetzen:

$$x=1 \quad \Rightarrow \quad 1 = A(1+6)+B(1-1) = 7A \quad \Rightarrow \quad A = \frac{1}{7}$$

$$x=-6 \quad \Rightarrow \quad 1 = A(-6+6)+B(-6-1) = -7B \quad \Rightarrow \quad B = -\frac{1}{7}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad \int \frac{7}{3x^2+15x-18}\,dx \quad &= \quad \frac{7}{3}\int \frac{1}{7}\frac{1}{x-1} - \frac{1}{7}\frac{1}{x+6}\,dx \\ &= \quad \frac{1}{3}\left(\ln|x-1| - \ln|x+6|\right) + C \end{aligned}$$

b) Polynomdivision:

$$\begin{array}{l} (x^3+x^2-35x+17) : (x^2+6x-7) = x-5+\dfrac{2x-18}{x^2+6x-7} \\ -\underline{(x^3+6x^2-7x)} \\ \qquad -5x^2-28x+17 \\ \qquad -\underline{(-5x^2-30x+35)} \\ \qquad\qquad\qquad 2x-18 \end{array}$$

Nennerfaktorisierung: $x^2+6x-7 = (x-1)(x+7)$

Partialbruchzerlegungsansatz:

$$\frac{2x-18}{x^2+6x-7} = \frac{2x-18}{(x-1)(x+7)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+7}$$

$$\Rightarrow \quad 2x-18 = A(x+7)+B(x-1) = (A+B)x+7A-B$$

Berechnung von A und B über einen Koeffizientenvergleich von

$$2x - 18 = (A + B)x + 7A - B$$

$-18 = 7A - B \quad \Rightarrow \quad B = 7A + 18$

$2 = A + B = A + 7A + 18 = 8A + 18$

$\Rightarrow \quad 8A = -16 \quad \Rightarrow \quad A = -2 \quad \Rightarrow \quad B = 4$

alternativ:

Berechnung von A und B durch Einsetzen von x-Werten, vorzugsweise der Nennernullstellen in die Gleichung:

$$2x - 18 = A(x + 7) + B(x - 1)$$

$x = 1: \quad 2 - 18 = -16 = A(1 + 7) \quad \Rightarrow \quad A = -2$

$x = -7: \quad 2 \cdot (-7) - 18 = -32 = B(-7 - 1) \Rightarrow B = 4$

Integration:

$$\begin{aligned}
\int \frac{x^3 + x^2 - 35x + 17}{x^2 + 6x - 7}\,dx &= \int x - 5 - \frac{2}{x-1} + \frac{4}{x+7}\,dx \\
&= \frac{x^2}{2} - 5x - 2\ln|x-1| + 4\ln|x+7| + C
\end{aligned}$$

c) Dieses Integral wird über die Rekursionsformel mit $\ell = 2$ berechnet

$$\begin{aligned}
\int \frac{9}{(2x^2+3)^2}\,dx &= \int \frac{9}{3^2(2x^2/3+1)^2}\,dx = \int \frac{1}{\left(\left(\frac{\sqrt{2}x}{\sqrt{3}}\right)^2 + 1\right)^2}\,dx \\
&= \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \int \frac{1}{(t^2+1)^2}\,dt \\
&= \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{2(1-2)} \left((3 - 2\cdot 2) \int \frac{1}{t^2+1}\,dt - \frac{t}{t^2+1} \right) + C \\
&= \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} \left(\arctan t + \frac{t}{t^2+1} \right) + C \\
&= \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} \left(\arctan\left(\frac{\sqrt{2}x}{\sqrt{3}}\right) + \frac{\frac{\sqrt{2}x}{\sqrt{3}}}{\left(\frac{\sqrt{2}x}{\sqrt{3}}\right)^2 + 1} \right) + C \\
&= \frac{3}{2} \left(\frac{\arctan\left(\frac{\sqrt{2}x}{\sqrt{3}}\right)}{\sqrt{6}} + \frac{x}{2x^2+3} \right) + C
\end{aligned}$$

Lösung 11:

Raten der Nennernullstelle $x = 3$ (Teiler der Konstanten 27) und Polynomdivision:

$$\begin{array}{l}
\quad (x^4 - 4x^3 + 27) : (x-3) = x^3 - x^2 - 3x - 9 \\
-\underline{(x^4 - 3x^3)} \\
\qquad\quad -x^3 + 27 \\
\qquad -\underline{(-x^3 + 3x^2)} \\
\qquad\qquad -3x^2 + 27 \\
\qquad\qquad -\underline{(-3x^2 + 9x)} \\
\qquad\qquad\quad -9x + 27 \\
\qquad\qquad -\underline{(-9x + 27)} \\
\qquad\qquad\qquad 0
\end{array}$$

Erneutes Raten der Nullstelle $x = 3$ (Teiler der Konstanten 9) und Polynomdivision:

$$\begin{array}{l}
\quad (x^3 - x^2 - 3x - 9) : (x-3) = x^2 + 2x + 3 \\
-\underline{(x^3 - 3x^2)} \\
\qquad\quad 2x^2 - 3x - 9 \\
\qquad -\underline{(2x^2 - 6x)} \\
\qquad\qquad 3x - 9 \\
\qquad\quad -\underline{(3x - 9)} \\
\qquad\qquad\quad 0
\end{array}$$

Damit lautet die Nennerfaktorisierung:

$$x^4 - 4x^3 + 27 = (x-3)^2(x^2 + 2x + 3) = (x-3)^2((x+1)^2 + 2) \,.$$

$$\Rightarrow \quad \int \frac{8x^3 - 43x^2 + 46x - 39}{x^4 - 4x^3 + 27}\,dx = \int \frac{8x^3 - 43x^2 + 46x - 39}{(x-3)^2((x+1)^2+2)}\,dx$$

<u>Partialbruchzerlegungsansatz:</u>

$$\frac{8x^3 - 43x^2 + 46x - 39}{x^4 - 4x^3 + 27} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{(x-3)^2} + \frac{Cx + D}{(x+1)^2 + 2}$$

$\Rightarrow 8x^3 - 43x^2 + 46x - 39$

$= A(x-3)((x+1)^2 + 2) + B((x+1)^2 + 2) + (Cx + D)(x-3)^2$

Koeffizienten über Einsetzen verschiedener x-Werte berechnen:

<u>Berechnung von B</u> durch Einsetzten der Nennernullstelle $x = 3$:

$8 \cdot 3^3 - 43 \cdot 3^2 + 46 \cdot 3 - 39 = -72 = B(4^2 + 2) \quad \Rightarrow \quad B = -4$

<u>Berechnung von A</u> durch Ableiten

$24x^2 - 86x + 46$

$= A((x+1)^2+2) + B \cdot 2(x+1) + (x-3)[2A(x+1) + C(x-3) + 2(Cx+D)]$

und dann Einsetzten der Nennernullstelle $x = 3$:

$24 \cdot 3^2 - 86 \cdot 3 + 46 = 4 = A(4^2+2) - 4 \cdot 2(3+1) \quad \Rightarrow \quad A = 2$

Berechnung von C und D durch Einsetzen geeigneter x Werte:

$x = 0:$

$-39 = A(-3)(1^2+2) + B(1^2+2) + (C \cdot 0 + D)(-3)^2$

$= -30 + 9D \quad \Rightarrow \quad D = -1$

$x = 1:$

$8 - 43 + 46 - 39 = -28$

$= A(-2)((2)^2+2) + B((2)^2+2) + (C+D)(1-3)^2$

$= -52 + 4C \quad \Rightarrow \quad C = 6$

Damit kann das Integral mittels Partialbruchzerlegung berechnet werden

$$\int \frac{8x^3 - 43x^2 + 46x - 39}{x^4 - 4x^3 + 27}\,dx = \int \frac{2}{x-3} - \frac{4}{(x-3)^2} + \frac{6x-1}{(x+1)^2+2}\,dx$$

$$= 2\ln|x-3| + \frac{4}{x-3} + 3\int \frac{2(x+1)}{(x+1)^2+2}\,dx - 7\int \frac{1}{(x+1)^2+2}\,dx + \tilde{C}$$

Zur Lösung der verbleibenden Teilintegrale:

Mit der Substitution $t = (x+1)^2 + 2 \to dt = 2(x+1)dx$ erhält man

$$3\int \frac{2(x+1)}{(x+1)^2+2}\,dx = 3\int \frac{1}{t}\,dt = 3\ln|t| = 3\ln|(x+1)^2+2| + C_1.$$

Mit der Substitution $t = \dfrac{x+1}{\sqrt{2}} \to dx = \sqrt{2}dt$ ergibt sich

$$7\int \frac{1}{(x+1)^2+2}\,dx = \frac{7}{2}\int \frac{1}{((x+1)/\sqrt{2})^2+1}\,dx$$

$$= \frac{7}{\sqrt{2}}\int \frac{1}{t^2+1}\,dt = \frac{7}{\sqrt{2}}\arctan t = \frac{7}{\sqrt{2}}\arctan\left(\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right) + C_2.$$

Damit erhält man die Stammfunktion

$$\int \frac{8x^3 - 43x^2 + 46x - 39}{x^4 - 4x^3 + 27}\,dx$$

$$= 2\ln|x-3| + \frac{4}{x-3} + 3\ln|(x+1)^2+2| - \frac{7}{\sqrt{2}}\arctan\left(\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right) + K.$$

Lösung 12:

a) Mit $x_i = \dfrac{2i-n}{n}$ für $i = 0, 1, \ldots, n$ erhält man

$$\begin{aligned} U_f(Z_n) &= \sum_{i=0}^{n-1} \inf f([x_i, x_{i+1}])(x_{i+1} - x_i) \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} \left(3\frac{2i-n}{n} + 4\right)\left(\frac{2(i+1)-n}{n} - \frac{2i-n}{n}\right) \\ &= \frac{2}{n^2}\sum_{i=0}^{n-1}(n+6i) = \frac{2}{n^2}\left(n^2 + 6\frac{(n-1)n}{2}\right) = 8 - \frac{6}{n} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} O_f(Z_n) &= \sum_{i=0}^{n-1} \sup f([x_i, x_{i+1}])(x_{i+1} - x_i) \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} \left(3\frac{2(i+1)-n}{n} + 4\right)\left(\frac{2(i+1)-n}{n} - \frac{2i-n}{n}\right) \\ &= \frac{2}{n^2}\sum_{i=0}^{n-1}(n+6i+6) = \frac{2}{n^2}\left(n^2 + 6\frac{(n-1)n}{2} + 6n\right) = 8 + \frac{6}{n} \end{aligned}$$

b) f ist integrierbar, denn f ist stetig. Der Wert des Integrals ergibt sich dann durch

$$\lim_{n\to\infty} O_f(Z_n) = \lim_{n\to\infty}\left(8 + \frac{6}{n}\right) = 8 = \lim_{n\to\infty}\left(8 - \frac{6}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} U_f(Z_n)\,.$$

c) $\displaystyle\int_{-1}^{1} 3x + 4dx = \left(\frac{3x^2}{2} + 4x\right)\Big|_{-1}^{1} = 8$

Lösung 13:

a) Substitution: $t = e^x \;\to\; dx = \dfrac{dt}{t}, \quad t_0 = e^0 = 1,\; t_1 = e^{\ln(2)} = 2$

$$\int_0^{\ln(2)} \frac{e^{3x}}{e^{3x}+4}\,dx = \int_1^2 \frac{t^3}{t^3+4}\,\frac{dt}{t} = \frac{1}{3}\int_1^2 \frac{3t^2}{t^3+4}\,dt = \frac{1}{3}\ln(t^3+4)\big|_1^2 = \frac{1}{3}\ln\left(\frac{12}{5}\right)$$

alternativ mit Rücksubstitution der Stammfunktion und den alten Grenzen:

$$\int_0^{\ln(2)} \frac{e^{3x}}{e^{3x}+4}\,dx = \cdots = \frac{1}{3}\ln(e^{3x}+4)\big|_0^{\ln(2)} = \frac{1}{3}\ln\left(\frac{12}{5}\right) = 0.2918229...$$

b) Substitution:

$$\tan\frac{x}{2} = t,\ \cos x = \frac{1-t^2}{t^2+1},\ dx = \frac{2dt}{t^2+1}, \qquad t_0 = \tan(0) = 0,\ t_1 = \tan\left(\frac{\pi}{8}\right)$$

$$\begin{aligned}
\int_0^{\pi/4} \frac{1}{\cos x}\,dx &= \int_0^{\tan(\pi/8)} \frac{1}{\frac{1-t^2}{t^2+1}} \frac{2dt}{t^2+1} = \int_0^{\tan(\pi/8)} \frac{2}{1-t^2}\,dt \\
&= \int_0^{\tan(\pi/8)} \frac{1}{1-t} + \frac{1}{1+t}\,dt = \left(\ln|1+t| - \ln|1-t|\right)\Big|_0^{\tan(\pi/8)} \\
&= \ln\left|1+\tan\left(\frac{\pi}{8}\right)\right| - \ln\left|1-\tan\left(\frac{\pi}{8}\right)\right|
\end{aligned}$$

alternativ mit Rücksubstitution der Stammfunktion und den alten Grenzen:

$$\int_0^{\pi/4} \frac{1}{\cos x}\,dx = \cdots = \left(\ln\left|1+\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right| - \ln\left|1-\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right|\right)\Big|_0^{\pi/4}$$

$$= \ln\left|1+\tan\left(\frac{\pi}{8}\right)\right| - \ln\left|1-\tan\left(\frac{\pi}{8}\right)\right| = 0.8813735...$$

Lösung 14:

a) Schnittpunkte von $y = x^2 - 4$ mit der x-Achse:

$0 = x^2 - 4 = (x+2)(x-2) \ \Rightarrow\ x_1 = -2,\ x_2 = 2$

$$\begin{aligned}
F_1 &= \int_{-3}^{-2} x^2 - 4\,dx - \int_{-2}^{2} x^2 - 4\,dx + \int_2^3 x^2 - 4\,dx \\
&= 2\int_2^3 x^2 - 4\,dx - 2\int_0^2 x^2 - 4\,dx \\
&= 2\left(\frac{x^3}{3} - 4x\right)\Big|_2^3 - 2\left(\frac{x^3}{3} - 4x\right)\Big|_0^2 \\
&= 2\left(\frac{27}{3} - 12 - \frac{8}{3} + 8 - \frac{8}{3} + 8\right) = \frac{46}{3}
\end{aligned}$$

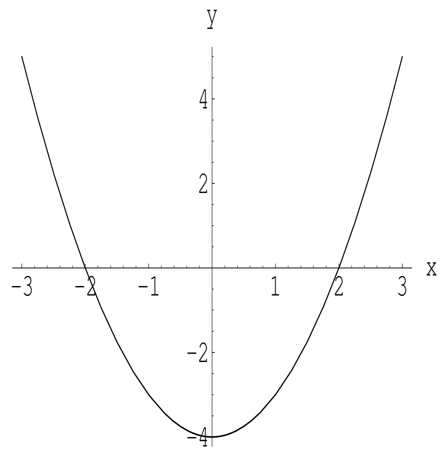

Bild 14 a): $y = x^2 - 4$ in $[-3, 3]$

b)

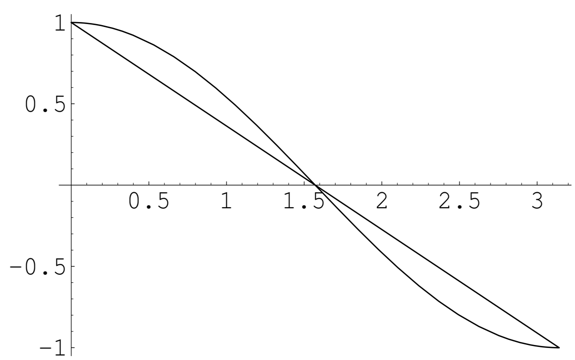

Bild 14 b): Menge M_2

Die Schnittpunkte von $f(x) = \cos x$ und $g(x) = 1 - 2x/\pi$ sind gegeben durch

$$x_1 = 0,\ x_2 = \pi/2,\ x_3 = \pi\ .$$

Daher berechnet sich der Flächeninhalt durch

$$\begin{aligned} F_2 &= \int_0^{\pi/2} \cos x - (1 - 2x/\pi)\, dx + \int_{\pi/2}^{\pi} (1 - 2x/\pi) - \cos x\, dx \\ &= 2\left[\sin x - x + x^2/\pi\right]_0^{\pi/2} \ = \ 2\,(1 - \pi/2 + \pi/4) \ = \ 2 - \pi/2\ . \end{aligned}$$

Lösung 15:

a) $$\begin{aligned} V_{x-\text{Achse}} &= \pi \int_0^2 \ (f(x))^2 \ dx = \pi \int_0^2 \ \left(x^3\right)^2 \ dx = \pi \left(\frac{x^7}{7}\right)\Bigg|_0^2 \\ &= \frac{128\pi}{7} = 57.4462\ldots \end{aligned}$$

b) $y = f(x) = x^3 \quad \Leftrightarrow \quad x = f^{-1}(y) = y^{1/3}$

$$\begin{aligned} V_{y-\text{Achse}} &= \pi \int_0^8 \left(f^{-1}(y)\right)^2 \, dy = \pi \int_0^8 \left(y^{1/3}\right)^2 \, dy \\ &= \pi \left(\frac{3y^{5/3}}{5}\right)\Bigg|_0^8 = \frac{96\pi}{5} = 60.3185\ldots \end{aligned}$$

c) Die Oberfläche des Rotationskörpers bei Rotation um die x-Achse setzt sich zusammen aus der Mantelfläche $M_{x-\text{Achse}}$ und der Fläche K des seitlich begrenzenden Kreises:

$$K = 8^2\pi = 64\pi = 201.0619\ldots$$

$$\begin{aligned} M_{x-\text{Achse}} &= 2\pi \int_0^2 f(x)\sqrt{1+(f'(x))^2}\, dx = 2\pi \int_0^2 x^3\sqrt{1+(3x^2)^2}\, dx \\ &\overset{t=1+9x^4}{=} \frac{2\pi}{36} \int_1^{145} \sqrt{t}\, dt = \left(\frac{2\pi\cdot 2}{36\cdot 3} t^{3/2}\right)\Bigg|_1^{145} \\ &= \frac{\pi}{27}(145^{3/2}-1) = 203.0436\ldots \end{aligned}$$

Damit besitzt der Rotationskörper eine Oberfläche von

$$O = K + M_{x-\text{Achse}} = \frac{\pi(1727+145^{3/2})}{27} = 404.1055\ldots$$

d) Für den Flächenplot muss der Vektor des Funktionsgraphen

$$\tilde{\boldsymbol{v}}(x) = \begin{pmatrix} x \\ f(x) \end{pmatrix}$$

mit $0 \le x \le 2$ und $f(x) = x^3$ zunächst in den $\mathbb{R}^3$ eingebettet werden, also auf

$$\boldsymbol{v}(x) = \begin{pmatrix} x \\ f(x) \\ 0 \end{pmatrix}$$

erweitert werden.

Anschließend wird $\boldsymbol{v}(x)$ mit der Drehmatrix $\boldsymbol{D}(\varphi)$ multipliziert, wobei eine ganze Umdrehung durch $0 \le \varphi \le 2\pi$ erreicht wird.

Für die Drehung um die x-Achse erhält man damit die folgende Parameterdarstellung der Mantelfläche

$$\boldsymbol{u}_{x-\text{Achse}}(x,\varphi) = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & -\sin\varphi \\ 0 & \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}}_{\boldsymbol{D}(\varphi)} \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ x^3 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\boldsymbol{v}(x)} = \begin{pmatrix} x \\ x^3\cos\varphi \\ x^3\sin\varphi \end{pmatrix}$$

Der MATLAB Plotbefehl für Bild 15 a) lautet damit:

```
ezsurf('x','cos(p)*x^3','sin(p)*x^3',[0,2*pi,0,2])
```

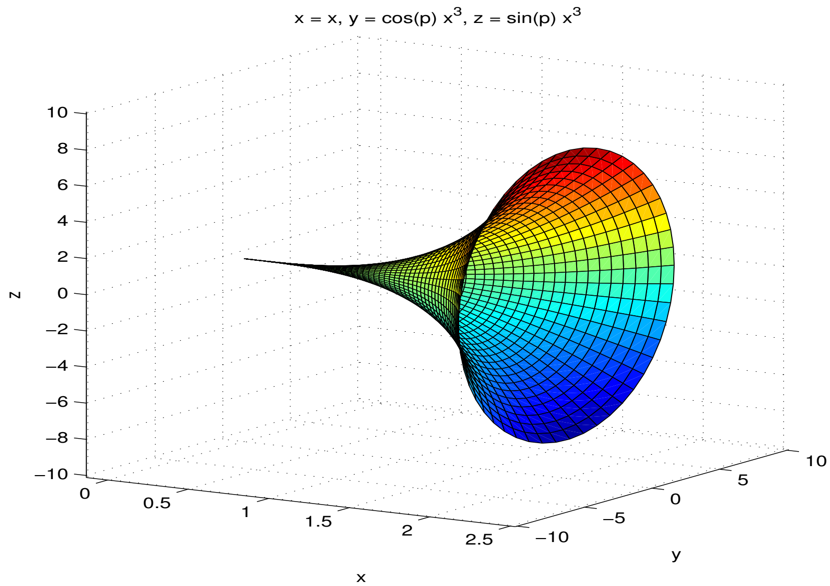

Bild 15 a): Rotationskörper für $f(x) = x^3$ bzgl. der x-Achse

$$\boldsymbol{u}_{y-\text{Achse}}(x,\varphi) = \underbrace{\begin{pmatrix} \cos\varphi & 0 & -\sin\varphi \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\varphi & 0 & \cos\varphi \end{pmatrix}}_{\boldsymbol{D}(\varphi)} \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ x^3 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\boldsymbol{v}(x)} = \begin{pmatrix} x\cos\varphi \\ x^3 \\ x\sin\varphi \end{pmatrix}$$

Der MATLAB Plotbefehl für Bild 15 b) lautet:

```
ezsurf('x*cos(p)','x^3','x*sin(p)',[0,2*pi,0,2])
```

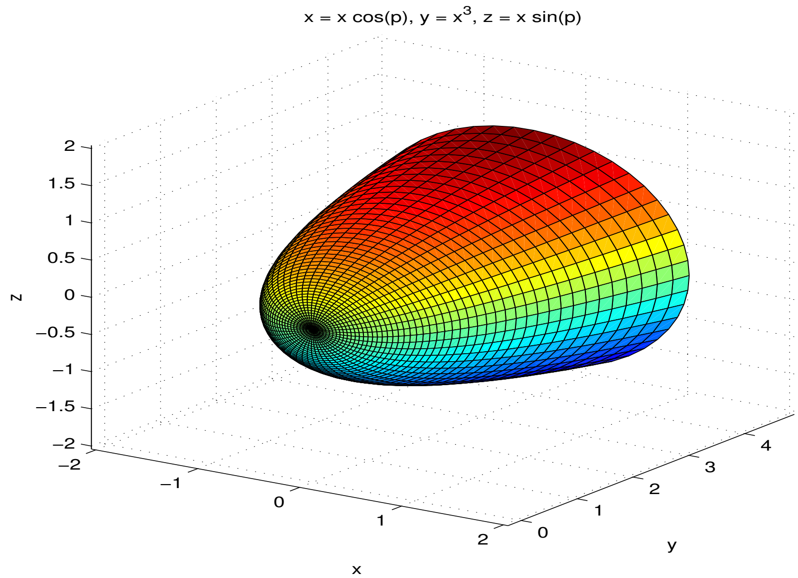

Bild 15 b): Rotationskörper bzgl. der y-Achse

Lösung 16:

a) $F'(x) = e^{3x+2x} \cdot 2 - e^{3x+1} \cdot 0 + \int\limits_1^{2x} 3e^{3x+y}\, dy$

$= 2e^{5x} + 3e^{3x+2x} - 3e^{3x+1} = 5e^{5x} - 3e^{3x+1}$.

b) (i) $$\int\limits_1^9 \frac{4}{(x-1)^{2/3}}\, dx = \lim_{\varepsilon\to 0+} \int\limits_{1+\varepsilon}^9 \frac{4}{(x-1)^{2/3}}\, dx = \lim_{\varepsilon\to 0+} 12(x-1)^{1/3}\Big|_{1+\varepsilon}^9$$
$$= \lim_{\varepsilon\to 0+} 12((9-1)^{1/3} - \varepsilon^{1/3}) = 24$$

(ii) $$\int\limits_0^\infty \frac{2}{(x+1)^{3/4}}\, dx = \lim_{a\to\infty} \int\limits_0^a \frac{2}{(x+1)^{3/4}}\, dx = \lim_{a\to\infty} 8(x+1)^{1/4}\Big|_0^a$$
$$= \lim_{a\to\infty} 8((a+1)^{1/4} - 1) = \infty$$

c) Die Berechnung erfolgt über partielle Integration:

$$\int\limits_0^a \cos(\gamma t)e^{-st}\, dt = -\cos(\gamma t)\frac{e^{-st}}{s}\Big|_0^a - \int\limits_0^a \gamma\sin(\gamma t)\frac{e^{-st}}{s}\, dt$$
$$= -\cos(\gamma t)\frac{e^{-st}}{s}\Big|_0^a + \gamma\sin(\gamma t)\frac{e^{-st}}{s^2}\Big|_0^a - \int\limits_0^a \gamma^2\cos(\gamma t)\frac{e^{-st}}{s^2}\, dt$$

$$\Rightarrow \int\limits_0^a \cos(\gamma t)e^{-st}\, dt = \frac{1}{1+\gamma^2/s^2}\left(-\cos(\gamma t)\frac{e^{-st}}{s} + \gamma\sin(\gamma t)\frac{e^{-st}}{s^2}\Big|_0^a\right)$$

$$\Rightarrow \quad \lim_{a\to\infty}\int_0^a \cos(\gamma t)e^{-st}\,dt \;=\; \frac{1}{1+\gamma^2/s^2}\cdot\frac{1}{s} \;=\; \frac{s}{s^2+\gamma^2}$$

Lösung 17:

a) (i) $$\int_0^\infty \frac{x^2+1}{x^5+3}\,dx \;=\; \int_0^1 \frac{x^2+1}{x^5+3}\,dx + \int_1^\infty \frac{x^2+1}{x^5+3}\,dx$$

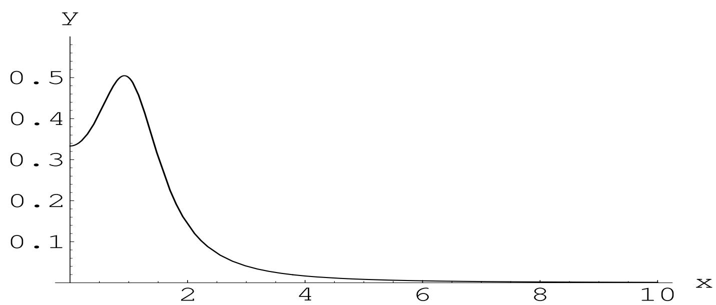

Bild 17 a): Funktion $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x^5+3}$

$$\int_0^1 \frac{x^2+1}{x^5+3}\,dx$$ ist ein bestimmtes Integral mit endlichem Wert.

$$\int_1^\infty \frac{x^2+1}{x^5+3}\,dx \;=\; \lim_{a\to\infty}\int_1^a \frac{x^2+1}{x^5+3}\,dx$$ ist ein uneigentliches Integral.

Für $x \ge 1$ gilt $0 \le \dfrac{x^2+1}{x^5+3} \le \dfrac{x^2+x^2}{x^5} = \dfrac{2}{x^3}$ und man erhält

$$\int_1^\infty \frac{x^2+1}{x^5+3}\,dx \;=\; \lim_{a\to\infty}\int_1^a \frac{x^2+1}{x^5+3}\,dx \;\le\; \lim_{a\to\infty}\int_1^a \frac{2}{x^3}\,dx$$
$$= \lim_{a\to\infty} -\frac{1}{x^2}\Big|_1^a \;=\; \lim_{a\to\infty}\left(1-\frac{1}{a^2}\right) = 1$$

Damit konvergiert das Ausgangsintegral absolut nach dem Majoranten-kriterium.

(ii) Das Integral divergiert nach dem Minorantenkriterium, denn für $0 \le x \le 1$ gilt $x^{7/2} \le x^{5/2}$:

$$\int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{x^4+x^3}\,dx \;=\; \lim_{a\to 0}\int_a^1 \frac{1}{x^{7/2}+x^{5/2}}\,dx \;\ge\; \lim_{a\to 0}\int_a^1 \frac{1}{x^{5/2}+x^{5/2}}\,dx$$
$$= \lim_{a\to 0} -\frac{1}{3x^{3/2}}\Big|_a^1 \;=\; \lim_{a\to 0}\frac{1}{3a^{3/2}} - \frac{1}{3} \;=\; \infty\,.$$

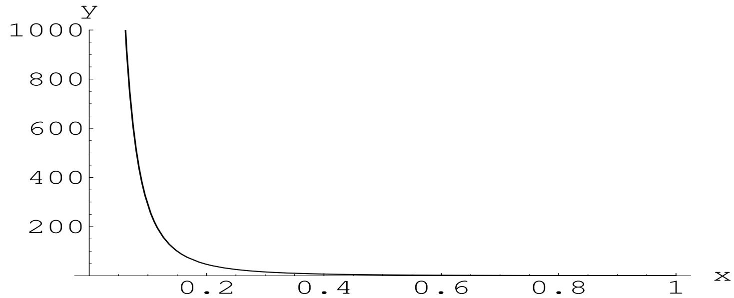

Bild 17 a)(ii): Funktion $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{x^4 + x^3}$

b) Für $0 < \alpha \leq 1$ und $x > 0$ fällt die Funktion $f(x) = \dfrac{1}{x^\alpha}$ (streng) monton und es gilt

1. Fall:: $\alpha = 1$

$$\int_1^\infty \frac{1}{x}\,dx = \lim_{a\to\infty} \int_1^a \frac{1}{x}\,dx = \lim_{a\to\infty} \ln x\big|_1^a = \lim_{a\to\infty} \ln a = \infty\,,$$

2. Fall: $0 < \alpha < 1 \;\Rightarrow\; 0 < 1 - \alpha$

$$\begin{aligned}\int_1^\infty \frac{1}{x^\alpha}\,dx &= \lim_{a\to\infty} \int_1^a \frac{1}{x^\alpha}\,dx = \lim_{a\to\infty} \left.\frac{x^{1-\alpha}}{(1-\alpha)}\right|_1^a \\ &= \lim_{a\to\infty} \frac{a^{1-\alpha}}{(1-\alpha)} - \frac{1}{(1-\alpha)} = \infty\,.\end{aligned}$$

Das Integral divergiert also für $0 < \alpha \leq 1$. Nach dem Integral-Kriterium für Reihen besitzt die Reihe $\sum\limits_{k=1}^\infty \dfrac{1}{k^\alpha}$ das gleich Konvergenzverhalten.

c) Mit Hilfe der geometrischen Summenformel erhält man

$$\sum_{k=1}^\infty 4 \cdot \frac{2^{k+1}}{3^{k+2}} = 4 \cdot \frac{2}{3^2} \sum_{k=1}^\infty \left(\frac{2}{3}\right)^k = \frac{8}{9} \cdot \left(\frac{1}{1 - 2/3} - 1\right) = \frac{16}{9}\,.$$

Lösung 18:

a) Es handelt sich um eine alternierende Reihe, die nach dem Leibniz-Kriterium konvergiert, denn es gilt:

(i) $a_n := \dfrac{n+1}{(n+2)(n+3)} \geq 0$

(ii) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n+1}{(n+2)(n+3)} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1/n + 1/n^2}{1 + 5/n + 6/n^2} = 0$

(iii) a_n fällt monoton, denn

$$\begin{aligned} 0 &\le n \\ \Rightarrow \quad (n+2)^2 = n^2+4n+4 &\le n^2+5n+4 = (n+1)(n+4) \\ \Rightarrow \quad \frac{n+2}{n+4} &\le \frac{n+1}{n+2} \\ \Rightarrow \quad a_{n+1} = \frac{n+2}{(n+3)(n+4)} &\le \frac{n+1}{(n+2)(n+3)} = a_n \,. \end{aligned}$$

b) Man verlangt für die Abschätzung des Wertes S der Reihe durch die Partialsummen S_k

$$|S - S_k| \le a_{k+1} = \frac{k+2}{(k+3)(k+4)} \overset{!}{<} 0.001 \,.$$

Aus $a_{995} = 0.001001$ und $a_{996} = 0.000999998$ erhält man $k \ge N = 995$. Die Partialsummenwerte lauten $S_{995} = 0.0789413$ und $S_{996} = 0.0799413$.

c) Mit dem Mathematica-Befehl

```
NSum[(-1)^n*(n + 1)/(n^2 + 5 n + 6), {n, 0, k}]
```

berechnet man die Partialsummen und erhält

$$S_{1129} = 0.0790004 \le S \le S_{892} = 0.07999930$$

Für den Grenzwert bedeutet dies $S = 0.079\cdots$.

Lösung 19:

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt{n^2+n} - n\right)^n$ konvergiert absolut nach dem Wurzelkriterium, denn mit $a_n = \left(\sqrt{n^2+n} - n\right)^n$ erhält man

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt{n^2+n} - n = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2+n-n^2}{\sqrt{n^2+n}+n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{1+1/n}+1} = \frac{1}{2} < 1$$

b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{n!}$ konvergiert absolut nach dem Quotientenkriterium, denn es gilt

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^{n+1}\cdot n!}{(n+1)!\cdot 2^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{n+1} = 0 < 1 \,.$$

c) Die Reihe konvergiert nicht, denn mit der geometrischen Summenformel erhält man

$$\frac{1}{16}+\frac{3}{32}+\frac{9}{64}+\frac{27}{128}+\frac{81}{256}+\cdots=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\underbrace{\frac{1}{16}\left(\frac{3}{2}\right)^k}_{=a_k}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{16}\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{3}{2}\right)^k$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{16}\cdot\frac{1-(3/2)^{n+1}}{1-3/2}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{8}\left((3/2)^{n+1}-1\right)=\infty$$

Alternative Begründung:

Die notwendige Konvergenzbedingung für Reihen ist nicht erfüllt

$$\lim_{k\to\infty}a_k=\lim_{k\to\infty}\frac{1}{16}\left(\frac{3}{2}\right)^k=\infty\neq 0\,.$$

d) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k+1}{k^2+1}$ divergiert nach dem Minorantenkriterium, denn es gilt

$$a_k=\frac{k+1}{k^2+1}\geq\frac{k+1}{k^2+k}=\frac{k+1}{k(k+1)}=\frac{1}{k}\Rightarrow\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k+1}{k^2+1}\geq\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}=\infty.$$

Lösung 20:

a) (i) Die Folge f_n konvergiert punktweise gegen f:

$$\lim_{n\to\infty}f_n(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+ne^{x^2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1/n}{1/n+e^{x^2}}=0=:f(x)\,.$$

f_n konvergiert auch gleichmäßig gegen f, denn es gilt

$$\begin{aligned}0\;\leq\;\sup_{x\in[-2,2]}|f_n(x)-f(x)|\;&=\;\sup_{x\in[-2,2]}\left|\frac{1/n}{1/n+e^{x^2}}-0\right|=\sup_{x\in[-2,2]}\frac{1}{n}\left|\frac{1}{1/n+e^{x^2}}\right|\\&\leq\;\sup_{x\in[-2,2]}\frac{1}{n}\left|\frac{1}{e^{x^2}}\right|=\frac{1}{n}\overset{n\to\infty}{\longrightarrow}0\end{aligned}$$

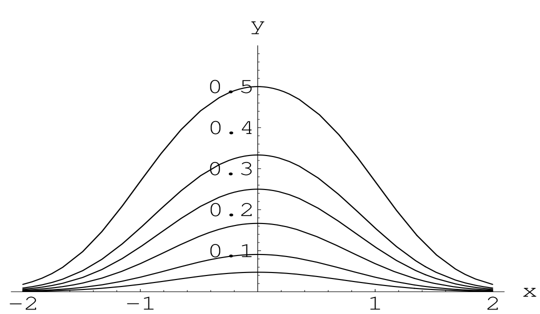

Bild 20 a) (i) $\quad f_n(x) = \dfrac{1}{1+ne^{x^2}}$ für $n = 1, 2, 3, 5, 10, 20$

(ii) Es gilt $h_n(0) = 0$. Für $x \neq 0$ erhält man

$$\lim_{n\to\infty} h_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{nx^2}{1+nx^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{x^2}{1/n + x^2} = 1\,.$$

Also konvergiert die Folge h_n punktweise gegen h:

$$h(x) = \begin{cases} 0 & : \quad x = 0 \\ 1 & : \quad x \neq 0 \end{cases}\quad .$$

h_n konvergiert nicht gleichmäßig, da h unstetig ist.

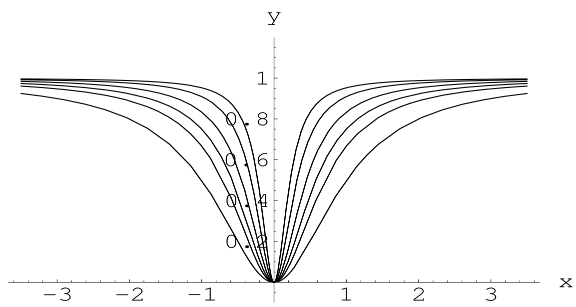

Bild 20 a) (ii) $\quad h_n(x) = \dfrac{nx^2}{1+nx^2}$ für $n = 1, 2, 3, 5, 10, 20$

b) (i) Für $f_n(x) := \sum\limits_{k=0}^{n} (x^3-1)(2-x^3)^k$ ergibt die geometrische Summenformel

$$\begin{aligned} f_n(x) &= (x^3-1)\sum_{k=0}^{n}\left(2-x^3\right)^k = (x^3-1)\frac{1-\left(2-x^3\right)^{n+1}}{1-(2-x^3)} \\ &= 1-\left(2-x^3\right)^{n+1} \end{aligned}$$

Für $|2-x^3| < 1 \Leftrightarrow 1 < x^3 < 3$ erhält man Konvergenz mit $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = 1$. Außerdem gilt $f_n(1) = 0$. Für alle anderen x liegt Divergenz vor. Die Funktionenfolge f_n konvergiert also punktweise gegen die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} 0 & : \quad x = 1 \\ & \\ 1 & : \quad 1 < x < \sqrt[3]{3}\,. \end{cases}$$

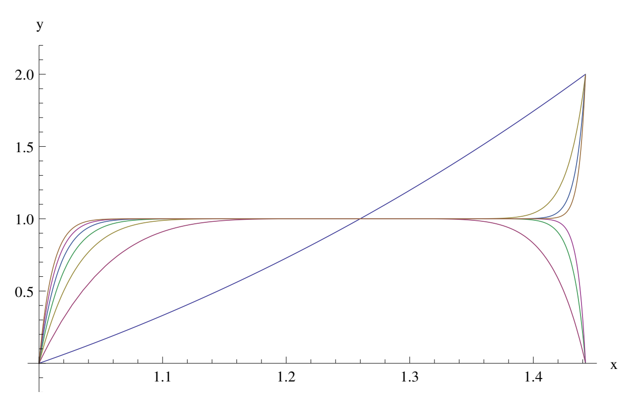

Bild 20 b) (i) $f_n(x) = 1 - \left(2 - x^3\right)^{n+1}$ für $n = 0, 5, 10, 15, 20, 25, 30$

Die Grenzfunktion f ist nicht stetig, die Konvergenz kann also nicht gleichmäßig sein.

(ii)

$$g(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k+1)^3(x^{2k}+1)}$$

konvergiert gleichmäßig (und damit auch punktweise) und absolut nach dem Majorantenkriterium auf ganz $\mathbb{R}$, denn

$$\left|\frac{1}{(k+1)^3(x^{2k}+1)}\right| \leq \frac{1}{(k+1)^3} \quad \text{und} \quad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k+1)^3} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^3} < \infty\,.$$

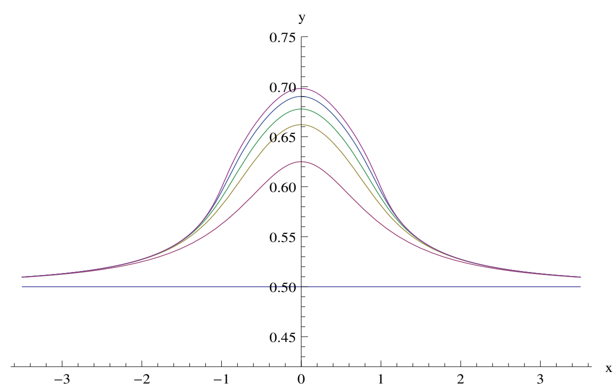

Bild 20 b) (ii) $g_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(k+1)^3(x^{2k}+1)}$ für $n = 0, 1, 2, 3, 5, 10$

Lösung 21:

a) (i) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{7^n(n+1)}\left(x - \frac{1}{2}\right)^n$

Entwicklungspunkt: $x_0 = \frac{1}{2}$

Konvergenzradius: $r = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{2^n 7^{n+1}(n+2)}{7^n(n+1)2^{n+1}} = \frac{7}{2}$

(ii) $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\left(\frac{2}{5}\right)^2 x\right)^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{4}{25}\right)^{2n} x^{2n} = \sum_{k=0}^{\infty} a_k\, x^k\,,$

Entwicklungspunkt: $x_0 = 0$

Koeffizienten: $a_k = \begin{cases} \left(\frac{4}{25}\right)^k & , \quad k = 2n \\ 0 & , \quad k = 2n+1 \end{cases}$

Konvergenzradius:
$$r = \frac{1}{\limsup\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|}} = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[2n]{\left(\frac{4}{25}\right)^{2n}}} = \frac{25}{4}$$

b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{7^n}{n+1}\left(\frac{x-1}{2}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\frac{7^n}{2^n(n+1)}}_{=a_n}(x-1)^n$ Entwicklungspunkt: $x_0 = 1$

Konvergenzradius: $\displaystyle r = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{7^n 2^{n+1}(n+2)}{2^n(n+1)7^{n+1}} = \frac{2}{7}$

Man erhält damit das offene Konvergenzintervall $\left]\frac{5}{7}, \frac{9}{7}\right[$.

Konvergenzuntersuchung in den Randpunkten:

Divergenz in $x_1 = \frac{9}{7}$, denn : $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{7^n}{2^n(n+1)}\left(\frac{9}{7}-1\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1}$

Konvergenz in $x_2 = \frac{5}{7}$, denn: $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{7^n}{2^n(n+1)}\left(\frac{5}{7}-1\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}$

Konvergenz liegt also insgesamt im Intervall $\left[\frac{5}{7}, \frac{9}{7}\right[$ vor.

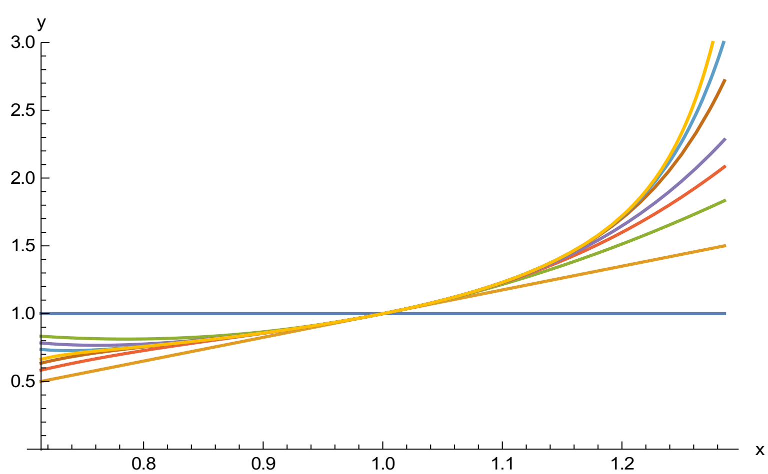

Bild 21: $\displaystyle S_N(x) = \sum_{n=0}^{N} \frac{7^n}{2^n(n+1)}(x-1)^n$ für $N = 0, 1, 2, 3, 4, 7, 10, 15$

Lösung 22:

a)
$$\frac{6}{5-4z} = \frac{6}{5-4z_0+4z_0-4z} = \frac{6}{5-4z_0}\cdot\frac{1}{1-\left(\dfrac{4(z-z_0)}{5-4z_0}\right)}$$
$$= \frac{6}{5-4z_0}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{4(z-z_0)}{5-4z_0}\right)^k = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{6\cdot 4^k}{(5-4z_0)^{k+1}}(z-z_0)^k$$

Berechnung des Konvergenzradius:

$$r=\lim_{k\to\infty}\left|\frac{a_k}{a_{k+1}}\right| = \lim_{k\to\infty}\left|\frac{6\cdot 4^k(5-4z_0)^{k+2}}{6\cdot 4^{k+1}(5-4z_0)^{k+1}}\right| = \left|\frac{5-4z_0}{4}\right|$$

Die Konvergenzbedingung der geometrischen Reihe wird bestätigt:

$$\left|\frac{4(z-z_0)}{5-4z_0}\right|<1 \quad\Rightarrow\quad |z-z_0|<\left|\frac{5-4z_0}{4}\right| = \left|\frac{5}{4}-z_0\right| = r$$

Man beachte: $x=\dfrac{5}{4}$ ist Polstelle von f.

Der Konvergenzradius für $z_0=\dfrac{3i}{4}$: $\quad r=\left|\dfrac{5}{4}-\dfrac{3i}{4}\right| = \left|\dfrac{5-3i}{4}\right| = \dfrac{\sqrt{34}}{4}.$

b)
$$\begin{aligned}\frac{6}{5-4x} &= f(x) = d_0+d_1x+d_2x^2+d_3x^3+\cdots\\ \Rightarrow 6 &= (5-4x)(d_0+d_1x+d_2x^2+d_3x^3+\cdots)\\ &= 5d_0+(5d_1-4d_0)x+(5d_2-4d_1)x^2+(5d_3-4d_2)x^3+\cdots\end{aligned}$$

Koeffizientenvergleich:

$\Rightarrow\ 6=5d_0\,,\ 0=5d_k-4d_{k-1}\ \Rightarrow\ d_0=\dfrac{6}{5}\,,$

$$d_k=\frac{4}{5}d_{k-1}=\cdots=\left(\frac{4}{5}\right)^k d_0=\frac{6}{5}\left(\frac{4}{5}\right)^k \quad\Rightarrow\quad f(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{6}{5}\left(\frac{4}{5}\right)^k x^k$$

Konvergenzradius: $\quad r=\lim\limits_{k\to\infty}\left|\dfrac{d_k}{d_{k+1}}\right| = \lim\limits_{k\to\infty}\left|\dfrac{\frac{6}{5}\left(\frac{4}{5}\right)^k}{\frac{6}{5}\left(\frac{4}{5}\right)^{k+1}}\right| = \dfrac{5}{4}$

Alternativrechnung mit der Rekursionsformel (Methode identisch):

$$f(x)=\frac{6}{5-4x}=\frac{1}{\frac{5}{6}-\frac{4}{6}x}=:\frac{1}{g(x)}$$

Da $g(0) \neq 0$, besitzt f in $x_0 = 0$ eine Potenzreihenentwicklung

$$f(x) = \frac{1}{g(x)} = \sum_{k=0}^{\infty} d_k x^k$$

mit Konvergenzradius $r > 0$ und die Koeffizienten d_k lassen sich nach der Rekursionsformel aus dem Cauchy-Produkt berechnen:

$$a_0 d_0 = 1\,, \quad a_0 d_k = -\sum_{j=0}^{k-1} d_j a_{k-j}$$

mit

$$g(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = \frac{5}{6} - \frac{4}{6}x \quad \Rightarrow \quad a_0 = \frac{5}{6}\,,\ a_1 = -\frac{4}{6}\,,\ a_k = 0\,,\ k \geq 2\,.$$

Man erhält damit $\quad d_0 = \dfrac{1}{a_0} = \dfrac{6}{5}\,,$

$$d_k = -\frac{1}{a_0}\sum_{j=0}^{k-1} d_j a_{k-j} = -\frac{a_1}{a_0} d_{k-1} = \frac{4}{5} d_{k-1} \cdots = \left(\frac{4}{5}\right)^k d_0 = \frac{6}{5}\left(\frac{4}{5}\right)^k$$

Lösung 23:

a) Aus $f'(x) = \left(\dfrac{6}{5-4x}\right)' = \dfrac{24}{(5-4x)^2}$ folgt $g(x) = \dfrac{1}{(5-4x)^2} = \dfrac{f'(x)}{24}$.
Damit ergibt sich die Potenzreihe von g durch differenzieren der Potenzreihe von f:

$$g(x) = \frac{1}{24}\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{6 \cdot 4^k}{(5-4x_0)^{k+1}}(x-x_0)^k\right)' = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k \cdot 4^{k-1}}{(5-4x_0)^{k+1}}(x-x_0)^{k-1}\,.$$

Der Konvergenzradius stimmt mit dem von f überein.

Probe:

$$r = \lim_{k\to\infty}\left|\frac{a_k}{a_{k+1}}\right| = \lim_{k\to\infty}\left|\frac{k \cdot 4^{k-1}(5-4x_0)^{k+2}}{(5-4x_0)^{k+1}(k+1)4^k}\right|$$

$$= \lim_{k\to\infty}\left|\frac{k(5-4x_0)}{(k+1)4}\right| = \left|\frac{5-4x_0}{4}\right| = \left|x_0 - \frac{5}{4}\right|\,.$$

b) Im Inneren des Konvergenzintervalls darf die Potenzreihe gliedweise differenziert werden. Setzt man die Potenzreihe und ihre zweite Ableitung in die Differentialgleichung ein, so ergibt sich

$$\sum_{k=2}^{\infty} a_k k(k-1)x^{k-2} = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$$

$$\Rightarrow \quad \sum_{k=2}^{\infty} a_k k(k-1)x^{k-2} - \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = \sum_{k=0}^{\infty} (a_{k+2}(k+2)(k+1) - a_k)x^k = 0\,.$$

Aus dem Koeffizientenvergleich mit der Nullfunktion ergibt sich folgende Rekursionsformel zur Berechnung der a_k:

$$a_{k+2}(k+2)(k+1) - a_k = 0 \;\Rightarrow\; a_{k+2} = \frac{a_k}{(k+2)(k+1)}\,.$$

Hier unterscheidet man

$$a_{2k+2} = \frac{a_{2k}}{(2k+2)(2k+1)} = \frac{a_{2k-2}}{(2k+2)(2k+1)2k(2k-1)} = \cdots = \frac{a_0}{(2k+2)!}$$

und

$$a_{2k+1} = \frac{a_{2k-1}}{(2k+1)2k} = \frac{a_{2k-3}}{(2k+1)2k(2k-1)(2k-2)} = \cdots = \frac{a_1}{(2k+1)!}\,.$$

Die Anfangswerte ergeben $y(0) = a_0 = 1 \Rightarrow a_{2k} = \dfrac{1}{(2k)!}$ und
$y'(0) = a_1 = 0 \Rightarrow a_{2k+1} = 0$ also

$$\cosh(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k)!} x^{2k}$$

als Lösung der Differentialgleichung. Der Konvergenzradius in $z = x^2$ ergibt sich durch

$$r = \lim_{k\to\infty} \left|\frac{a_k}{a_{k+1}}\right| = \lim_{k\to\infty} \left|\frac{(2k+2)!}{(2k)!}\right| = \lim_{k\to\infty} (2k+2)(2k+1) = \infty\,.$$

Dies ist dann auch der Konvergenzradius für x.

Lösung 24:

a) Mit der Summenformel der geometrischen Reihe erhält man für

$$\left|-\left(\frac{x}{2}\right)^2\right| < 1 \;\Leftrightarrow\; \left|\frac{x}{2}\right| < 1 \;\Leftrightarrow\; |x| < 2$$

$$\frac{2}{4+x^2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1+(x/2)^2} = \frac{1}{2} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \left(-\left(\frac{x}{2}\right)^2 \right)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2^{2k+1}} x^{2k} .$$

Der Konvergenzradius $r = 2$ bestätigt sich auch rechnerisch über die Koeffizienten $a_{2n} = \dfrac{(-1)^n}{2^{2n+1}}$ und $a_{2n+1} = 0$:

$$r = \frac{1}{\limsup\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|}} = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[2n]{\dfrac{1}{2^{2n+1}}}} = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{2^{1+1/(2n)}}} = 2 \,.$$

b) Da

$$(\arctan)'\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{2}{4+x^2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2^{2k+1}} x^{2k}$$

ergibt gliedweise Integration der Reihe

$$\arctan\left(\frac{x}{2}\right) = C + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)2^{2k+1}} x^{2k+1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)2^{2k+1}} x^{2k+1},$$

denn für die Integrationskonstante gilt $C = \arctan 0 = 0$. Der Konvergenzradius $r = 2$ stimmt mit dem der abgeleiteten Reihe überein.

Setzt man die Randpunkte $x = \pm 2$ in die Potenzreihe ein, so ergeben sich die Reihen

$$\pm \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1},$$

die nach dem Leibnizschen Konvergenzkriterium konvergieren.

Konvergiert eine Potenzreihe in den Randpunkten, so ergibt sich nach dem Abelschen Grenzwertsatz dort der Wert der stetigen Fortsetzung der Summenfunktion im Inneren.

Also erhält man hier in den Randpunkten $x = \pm 2$ den Wert

$$\pm \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} = \arctan(\pm 1).$$

c) Aus b) folgt $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} = \arctan(1) = \frac{\pi}{4}.$

d) Induktionsbeweis für $\quad f^{(n)}(x) = \dfrac{6 \cdot 4^n \cdot n!}{(5-4x)^{n+1}}$.

$n = 0$: $\quad f^{(0)}(x) = \dfrac{6 \cdot 4^0 \cdot 0!}{(5-4x)^{0+1}} = \dfrac{6}{5-4x} = f(x)$

$n \to n+1$:

$$\begin{aligned} f^{(n+1)}(x) &= \left(f^{(n)}(x)\right)' = \left(\frac{6\cdot 4^n\cdot n!}{(5-4x)^{n+1}}\right)' = \frac{6\cdot 4^n\cdot n!(-(n+1))(-4)}{(5-4x)^{n+2}} \\ &= \frac{6\cdot 4^{n+1}\cdot(n+1)!}{(5-4x)^{n+2}} \end{aligned}$$

Die Taylor-Reihe stimmt erwartungsgemäß mit der Potenzreihe aus Aufgabe 22 b) überein, d.h Konvergenzradius $r = 5/4$ und damit keine Konvergenz bei $x = 5/4$:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{6\cdot 4^n}{(5-4\cdot 0)^{n+1}}(x-0)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{6}{5}\left(\frac{4}{5}\right)^n x^n$$

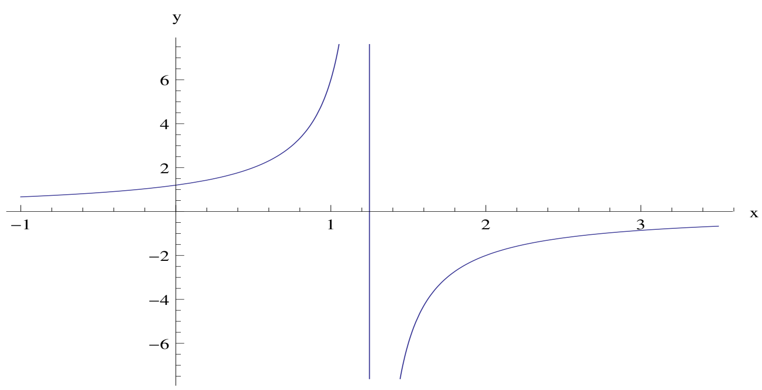

Bild 24 d) $f(x) = \dfrac{6}{5-4x}$, Polstelle bei $x = 5/4$

Lösung 25:

a)

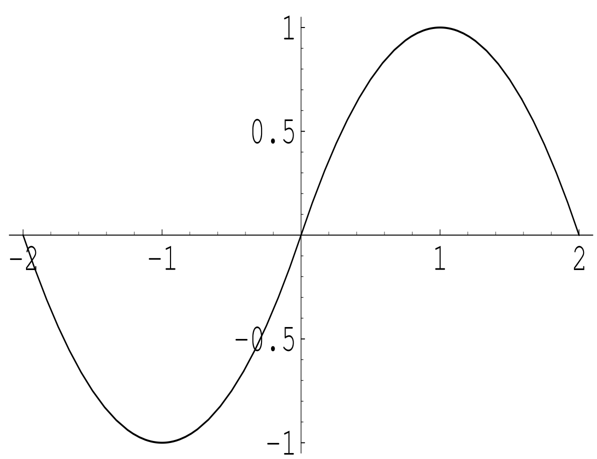

Bild 25 a) $f(x)$

b) Da f ungerade ist

$$0 \le x \le 2: \quad -f(x) = -x(2-x) = (-x)(2+(-x)) = f(-x),$$

gilt $a_k = 0$.

Mit den Bezeichnungen des Skriptes ist $T = 4 \Rightarrow \omega = 2\pi/T = \pi/2$

$$\begin{aligned}
b_{k\geq 1} &= \frac{4}{T}\int\limits_0^{T/2} f(x)\sin\left(\frac{k\pi x}{2}\right)\,dx \;=\; \int\limits_0^{2} x(2-x)\sin\left(\frac{k\pi x}{2}\right)\,dx \\
&= -\frac{2x(2-x)}{k\pi}\cos\left(\frac{k\pi x}{2}\right)\Bigg|_0^2 + \frac{2}{k\pi}\int\limits_0^{2} 2(1-x)\cos\left(\frac{k\pi x}{2}\right)\,dx \\
b_{k\geq 1} &= 2(1-x)\left(\frac{2}{k\pi}\right)^2\sin\left(\frac{k\pi x}{2}\right)\Bigg|_0^2 + \left(\frac{2}{k\pi}\right)^2\int\limits_0^{2} 2\sin\left(\frac{k\pi x}{2}\right)\,dx \\
&= -2\left(\frac{2}{k\pi}\right)^3\cos\left(\frac{k\pi x}{2}\right)\Bigg|_0^2 = \begin{cases} 4\left(\dfrac{2}{k\pi}\right)^3 & k = 2n-1 \\ 0 & k = 2n \end{cases}
\end{aligned}$$

Damit lautet die Fourier-Reihe

$$F_f(x) = \frac{32}{\pi^3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^3}\sin\left(\frac{(2n-1)\pi x}{2}\right) .$$

c)

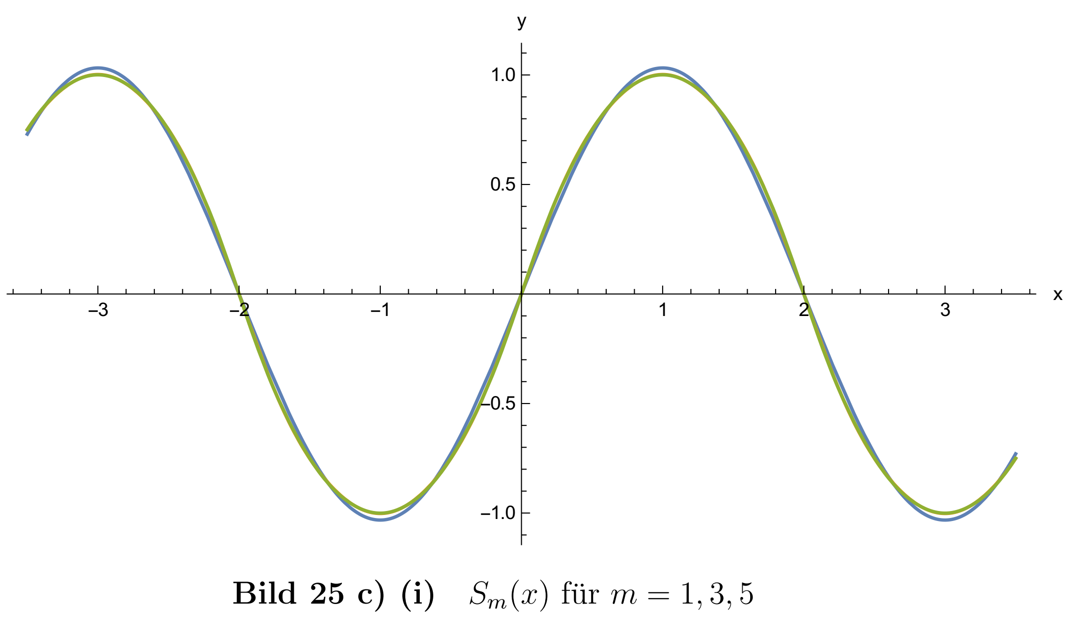

Bild 25 c) (i) $\quad S_m(x)$ für $m = 1, 3, 5$

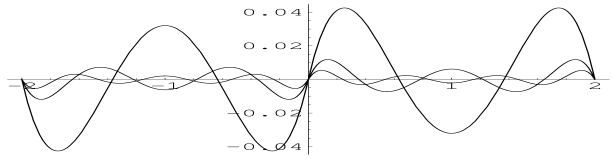

Bild 25 c) (ii) $f(x) - S_m(x)$ für $m = 1, 3, 5$

d) Da f stückweise C^1-Funktion und stetig in $x = 1$ ist, konvergiert die Fourier-Reihe dort gegen f. Es gilt also

$$1 = f(1) = F_f(1) = \frac{32}{\pi^3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^3} \sin\left(\frac{(2n-1)\pi}{2}\right) = \frac{32}{\pi^3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^3}$$

$$\Rightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^3} = \frac{\pi^3}{32} .$$

Lösung 26:

a)

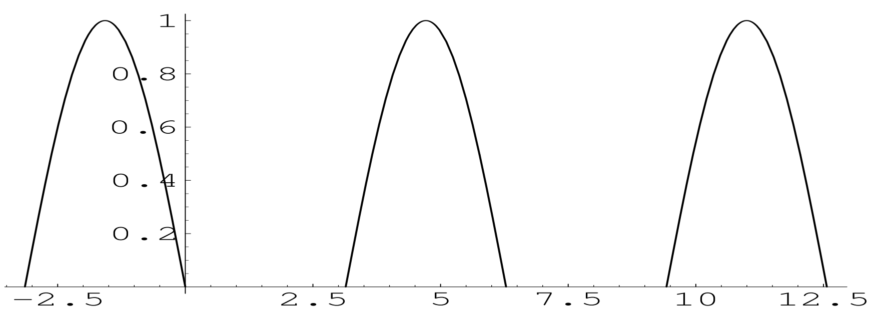

Bild 26 a) 2π-periodische direkte Fortsetzung der Funktion f

b) Mit den Bezeichnungen des Skriptes ist $T = 2\pi \quad \Rightarrow \quad \omega = 1$.

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{0} -\sin x\, dx = \frac{1}{\pi} \cos x \Big|_{-\pi}^{0} = \frac{2}{\pi}$$

$$\begin{aligned}
a_{k\geq 1} &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(kx)\, dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{0} -\sin x \cos(kx)\, dx \\
&= -\frac{1}{\pi} \left(\frac{\sin x \sin(kx)}{k} \Big|_{-\pi}^{0} - \frac{1}{k} \int_{-\pi}^{0} \cos x \sin(kx)\, dx \right) \\
&= \frac{1}{k\pi} \left(\frac{-\cos x \cos(kx)}{k} \Big|_{-\pi}^{0} - \frac{1}{k} \int_{-\pi}^{0} \sin x \cos(kx)\, dx \right) \\
&= \frac{1}{k^2\pi} \left(-1 - \cos(k\pi)\right) + \frac{a_k}{k^2}
\end{aligned}$$

Über a_1 kann nach dieser Rechnung nichts ausgesagt werden.

$\Rightarrow$

$$a_{k\geq 2} \;=\; -\frac{1+(-1)^k}{\pi(k^2-1)} = \begin{cases} 0 & k = 2n-1 \quad \text{(ungerade)} \\ -\dfrac{2}{\pi(k-1)(k+1)} & k = 2n \qquad\quad \text{(gerade)} \end{cases}$$

$$a_1 \;=\; \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{0} -\sin x\cos x\,dx \;=\; -\frac{1}{2\pi}\left(\sin^2 x\right)\Big|_{-\pi}^{0} \;=\; 0$$

$$\begin{aligned} b_{k\geq 1} \;&=\; \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(kx)\,dx \;=\; \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{0} -\sin x\sin(kx)\,dx \\ &=\; -\frac{1}{\pi}\left(-\frac{\sin x\cos(kx)}{k}\Big|_{-\pi}^{0} + \frac{1}{k}\int\limits_{-\pi}^{0} \cos x\cos(kx)\,dx\right) \\ &=\; -\frac{1}{k\pi}\left(\frac{\cos x\sin(kx)}{k}\Big|_{-\pi}^{0} + \frac{1}{k}\int\limits_{-\pi}^{0} \sin x\sin(kx)\,dx\right) \;=\; \frac{b_k}{k^2} \end{aligned}$$

$\Rightarrow b_{k\geq 2} = 0\,,\quad$ über b_1 kann nach dieser Rechnung nichts ausgesagt werden.

$$b_1 \;=\; \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{0} -\sin x\sin x\,dx \;=\; -\frac{1}{2\pi}\left(x - \sin x\cos x\right)\Big|_{-\pi}^{0} \;=\; -\frac{1}{2}$$

Damit lautet die Fourier-Reihe

$$F_f(x) = \frac{1}{\pi} - \frac{1}{2}\sin x - \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}\cos(2nx)$$

c)

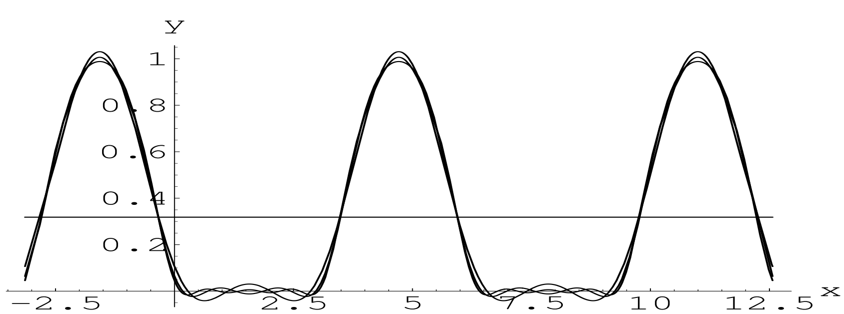

Bild 26 c): Partialsummen $S_0(x), \ldots, S_3(x)$

d) Da f stückweise C^1-Funktion und stetig in $x = 0$ ist, konvergiert die Fourier-Reihe dort gegen f. Es gilt also

$$0 = f(0) = F_f(0) = \frac{1}{\pi} - \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)(2n+1)} \qquad\Rightarrow\qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{1}{2}.$$

Lösung 27:

a)

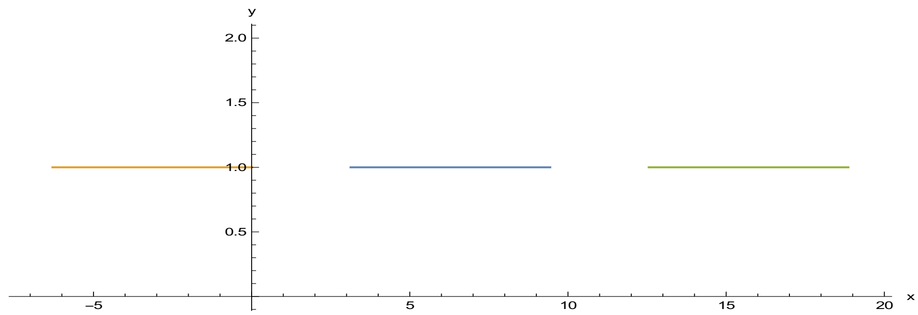

Bild 27 a): 3π-periodischen Fortsetzung von f

b) Mit den Bezeichnungen des Skriptes ist $T = 3\pi \quad \Rightarrow \quad \omega = \dfrac{2\pi}{3\pi} = \dfrac{2}{3}$.

$$\gamma_0 = \frac{1}{T}\int_0^T f(x)\,dx = \frac{1}{3\pi}\int_0^{3\pi} f(x)\,dx = \frac{1}{3\pi}\int_\pi^{3\pi} 1\,dx = \frac{2\pi}{3\pi} = \frac{2}{3}$$

Für $k \neq 0$

$$\begin{aligned}
\gamma_k &= \frac{1}{T}\int_0^T f(x)e^{-ik\omega x}\,dx = \frac{1}{3\pi}\int_\pi^{3\pi} e^{-i2kx/3}\,dx = -\frac{1}{i2k\pi}e^{-i2kx/3}\Big|_\pi^{3\pi} \\
&= -\frac{1}{i2k\pi}\left(1 - e^{-i2k\pi/3}\right) = \frac{i}{2k\pi}\left(1 - e^{-i2k\pi/3}\right) \\
&= \frac{i}{2k\pi}\left(1 - \cos\left(\frac{2k\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{2k\pi}{3}\right)\right) = \gamma_k
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \qquad F_f(x) = \gamma_0 + \sum_{\substack{k\neq 0\\ k=-\infty}}^{\infty} \gamma_k e^{ik\omega x} = \frac{2}{3} + \sum_{\substack{k\neq 0\\ k=-\infty}}^{\infty} \frac{i}{2k\pi}\left(1 - e^{-i2k\pi/3}\right)e^{i2kx/3}$$

c) $a_0 = 2\gamma_0 = \dfrac{4}{3}$

Für $k \neq 0$ gilt

$$\gamma_{-k} = -\frac{i}{2k\pi}\left(1 - e^{i2k\pi/3}\right) = -\frac{i}{2k\pi}\left(1 - \cos\left(\frac{2k\pi}{3}\right) - i\sin\left(\frac{2k\pi}{3}\right)\right).$$

Damit erhält man:

$$\begin{aligned}
a_{k\geq 1} &= \gamma_k + \gamma_{-k} \\
&= \frac{i}{2k\pi}\left(1-\cos\left(\frac{2k\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{2k\pi}{3}\right)\right) \\
&\quad -\frac{i}{2k\pi}\left(1-\cos\left(\frac{2k\pi}{3}\right)-i\sin\left(\frac{2k\pi}{3}\right)\right) \\
&= -\frac{1}{k\pi}\sin\left(\frac{2k\pi}{3}\right)
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
b_{k\geq 1} &= i(\gamma_k - \gamma_{-k}) \\
&= i\left(\frac{i}{2k\pi}\left(1-\cos\left(\frac{2k\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{2k\pi}{3}\right)\right)\right. \\
&\quad \left.+\frac{i}{2k\pi}\left(1-\cos\left(\frac{2k\pi}{3}\right)-i\sin\left(\frac{2k\pi}{3}\right)\right)\right) \\
&= \frac{1}{k\pi}\left(\cos\left(\frac{2k\pi}{3}\right)-1\right)
\end{aligned}$$

Wir bestätigen dieses Ergebnis, indem wir die reellen Koeffizienten zur Kontrolle direkt berechnen:

$$a_0 = \frac{2}{T}\int_0^T f(x)\,dx = \frac{2}{3\pi}\int_0^{3\pi} f(x)\,dx = \frac{2}{3\pi}\int_\pi^{3\pi} 1\,dx = \frac{4}{3}$$

$$\begin{aligned}
a_{k\geq 1} &= \frac{2}{T}\int_0^T f(x)\cos(k\omega x)\;dx \;=\; \frac{2}{3\pi}\int_\pi^{3\pi}\cos\left(\frac{2kx}{3}\right)\;dx \\
&= \frac{1}{k\pi}\sin\left(\frac{2kx}{3}\right)\Bigg|_\pi^{3\pi} \;=\; -\frac{1}{k\pi}\sin\left(\frac{2k\pi}{3}\right) \\
b_{k\geq 1} &= \frac{2}{T}\int_0^T f(x)\sin(k\omega x)\;dx \;=\; \frac{2}{3\pi}\int_\pi^{3\pi}\sin\left(\frac{2kx}{3}\right)\;dx \\
&= -\frac{1}{k\pi}\cos\left(\frac{2kx}{3}\right)\Bigg|_\pi^{3\pi} \;=\; \frac{1}{k\pi}\left(\cos\left(\frac{2k\pi}{3}\right)-1\right)
\end{aligned}$$

d) Mit dem Mathematica Befehl

```
Plot[2/3 +
  Sum[(-Sin[2*k*Pi/3]*Cos[2*k*x/3] + (Cos[2*k*Pi/3] - 1)*
        Sin[2*k*x/3]  )/k, {k, 1, 30}]/Pi, {x, -12, 15},
```

```
PlotRange -> {-0.2, 1.2}, AxesLabel -> {"x", "y"}]
```

erhält man

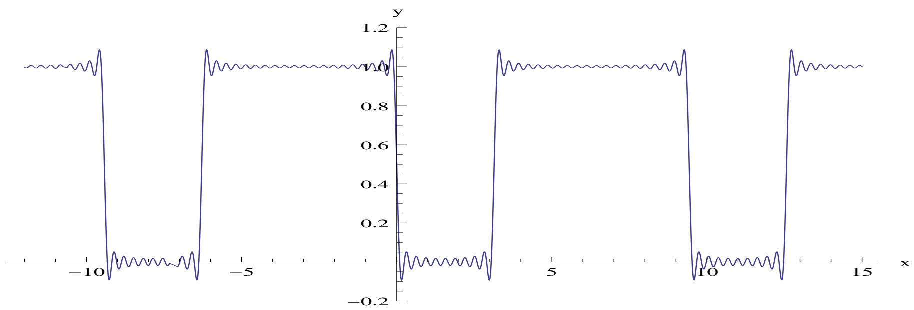

Bild 27 c): Partialsumme $S_{30}(x)$

Lösung 28:

a) Die Lagrange-Darstellung des Polynoms lautet:

$$p_2(x) = 0 \cdot \frac{(x-3)(x-6)}{(0-3)(0-6)} + 10 \cdot \frac{(x-0)(x-6)}{(3-0)(3-6)} + 201.7 \cdot \frac{(x-0)(x-3)}{(6-0)(6-3)}$$

b) Aus dem Schema der dividierten Differenzen erhält man die Koeffizienten der Newtonschen Darstellung des Interpolationspolynoms:

$$\begin{array}{c|ccc} 0 & \boxed{0} & & \\ 3 & 10 & \boxed{3.3} & \\ 6 & 201.7 & 64 & \boxed{10.1} \end{array} \qquad \Rightarrow \qquad p_2(x) = 3.3x + 10.1x(x-3)$$

c) $p_2(4) = 3.3 \cdot 4 + 10.1 \cdot 4 = 53.6$

$|\sinh(4) - p_2(4)| \approx |27.3 - 53.6| = 26.3$

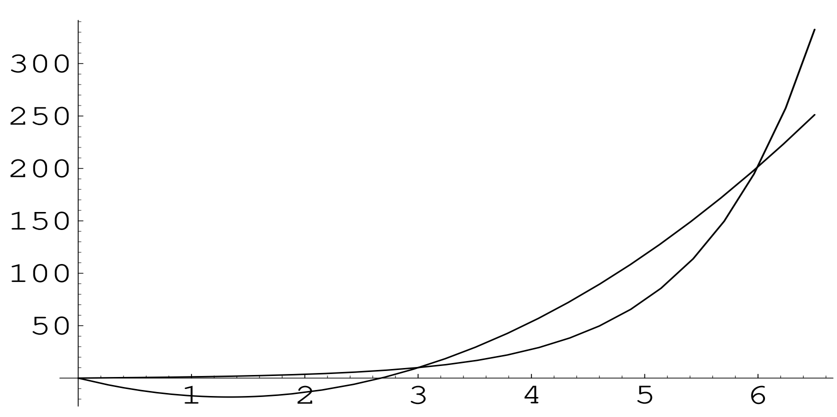

Bild 28.1 $\sinh(x)$ und $p_2(x)$

d) An das Schema der dividierten Differenzen aus a) wird für p_3 eine Zeile angehängt

$$
\begin{array}{c|rrrr}
0 & \boxed{0} & & & \\
3 & 10 & \boxed{3.3} & & \\
6 & 201.7 & 64 & \boxed{10.1} & \\
5 & 74.2 & 127.5 & 31.7 & \boxed{4.3}
\end{array}
$$

$$\Rightarrow \quad p_3(x) = p_2(x) + 4.3x(x-3)(x-6)$$

Die Lagrange-Darstellung von p_2 kann nicht durch Anhängen eines Summanden in p_3 überführt werden. Es ändern sich dann alle Terme.

$p_3(4) = p_2(4) + 4.3 \cdot 4(4-3)(4-6) = 19.2$

$|\sinh(4) - p_3(4)| \approx |27.3 - 19.2| = 8.1$

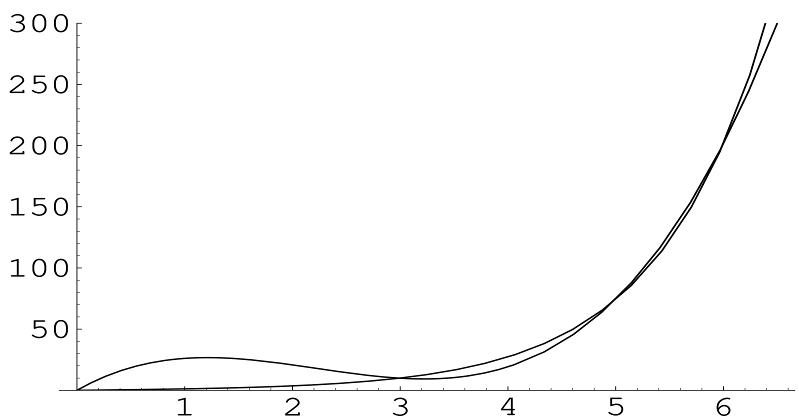

Bild 28.2 $\sinh(x)$ und $p_3(x)$