

Hörsaalübungsaufgaben und Lösungen zu

Analysis III

für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Aufgabe 1:

Gegeben sei die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} x(x+2) & , \quad -2 \leq x \leq 0 \quad , \\ x(2-x) & , \quad 0 \leq x \leq 2 \quad . \end{cases}$$

- a) Man zeichne die Funktion f .
- b) Man berechne die Fourier-Reihe der 4-periodischen direkten Fortsetzung von f .
- c) Man zeichne $S_m(x)$ und die Fehlerfunktionen $f(x) - S_m(x)$ für $m = 1, 3, 5$, wobei $S_m(x)$ die m -te Partialsumme der Fourier-Reihe darstellt.
- d) Man zeige mit Hilfe von b) die Identität
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^3} = \frac{\pi^3}{32} .$$

Aufgabe 2:

Gegeben sei die 2π -periodische direkte Fortsetzung der Funktion f mit

$$f(x) = \begin{cases} -\sin x & , \quad -\pi \leq x \leq 0 \quad , \\ 0 & , \quad 0 \leq x \leq \pi \quad . \end{cases}$$

- a) Man zeichne die direkte Fortsetzung im Intervall $[-\pi, 4\pi]$.
- b) Man berechne die zugehörige Fourier-Reihe.
- c) Man zeichne die Partialsummen $S_0(x), \dots, S_3(x)$ der berechneten Fourierreihe.
- d) Mit Hilfe von b) zeige man die Identität

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{1}{2} .$$

Aufgabe 3:

Für die folgenden Funktionen $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ berechne man die Gradienten und erstelle ein Bild im Bereich $[-1, 1] \times [-1, 1]$, auf dem verschiedene Höhenlinien der Funktion angegeben sind. Dies sind Linien, für die $f(x, y) = c$ mit $c \in \mathbb{R}$ gilt.

- a) $f(x, y) = 5x^2 - 3y^2$, b) $f(x, y) = 5x + 3y$,
c) $f(x, y) = 5x^2 + 3y^2$, d) $f(x, y) = \sin(6x) + 2y$.

Aufgabe 4:

Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x, y) = x^2 - 4y$.

- a) Man berechne von f alle partiellen Ableitungen bis zur 3. Ordnung.
b) Man zeichne die Funktion im Bereich $[-4, 4] \times [-2, 2]$.
c) Man bestimme die Tangentialebene für das gegebene f im Punkt $(x_0, y_0) = (2, 0)$.
d) Man gebe eine Parameterdarstellung der Höhenlinie von f an, die durch den Punkt $(2, 0)$ läuft.
e) Man berechne den Winkel α zwischen $\text{grad}f(2, 0)$ und der Tangentialrichtung der Höhenlinie von f im Punkt $(2, 0)$.

Aufgabe 5:

- a) Man zeige, dass die Wärmeleitungsgleichung $u_t = \Delta u$ für zwei Ortsvariable von der Funktion

$$u(x, y, t) = \sin(x) \sin(2y) e^{-5t}$$

gelöst wird.

- b) Man zeige, dass mit $n \in \mathbb{N}$ die Funktion

$$u(x, y) = (\sin(nx) + 2 \cos(nx)) \sinh(ny)$$

die Laplace-Gleichung $\Delta u = 0$ löst.

Aufgabe 6:

a) Man berechne Divergenz und Rotation für die Vektorfelder mit $x, y, z \in \mathbb{R}$

- (i) $\mathbf{h}(x, y, z) = (x^2 + y^2 + z^2, x^2 + y^2 + z^2, x^2 + y^2 + z^2)^T$,
- (ii) $\mathbf{u}(x, y, z) = (x^2 - y^2 - z^2, y^2 - x^2 - z^2, z^2 - x^2 - y^2)^T$,
- (iii) $\mathbf{h}(x, y, z) + \mathbf{u}(x, y, z)$.

b) Gegeben sei das Vektorfeld

$$\mathbf{g}(x, y) = (u(x, y), v(x, y))^T = (x, -y)^T.$$

- (i) Man berechne $\operatorname{div} \mathbf{g}$ und $\operatorname{rot} \mathbf{g}$ und
- (ii) skizziere das Vektorfeld und einige Stromlinien in $[-1, 1] \times [-1, 1]$.

Aufgabe 7:

Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{2xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} & , \text{ falls } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & , \text{ falls } (x, y) = (0, 0) \end{cases}.$$

- a) Man zeichne die Funktion im Bereich $[-1, 1] \times [-1, 1]$.
- b) Man überprüfe, ob f stetig ist.
- c) Man berechne $\mathbf{J}f(x, y)$.
- d) Man überprüfe, ob f total differenzierbar ist.

Aufgabe 8:

a) Man berechne die Jacobi-Matrizen der folgenden Funktionen mit den Abbildungsvorschriften

- (i) $f(x, y) = \log(y) + \cos(xy)$ und $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}^+$,
- (ii) $\mathbf{g}(t) = (t \cos t, t \sin t, t)^T$ und $t \in \mathbb{R}$,
- (iii) $\mathbf{h}(\varphi, \psi) = \mathbf{h}(2 \cos \varphi \cos \psi, 2 \sin \varphi \cos \psi, 2 \sin \psi)^T$ und $\varphi, \psi \in \mathbb{R}$,
- (iv) $\mathbf{u}(x, y, z) = (-3x + y, x - 3y + z, y - 3z)^T$ und $x, y, z \in \mathbb{R}$.

b) Gegeben sei das Vektorfeld $\mathbf{f}(x, y) = (x + y + 1, x^2 - y - 1)^T$ mit $x, y \in \mathbb{R}$.

Man bestimme $\mathbf{f}(0, 0)$ und berechne damit näherungsweise $\mathbf{f}(0.2, 0.1)$ unter Verwendung des vollständigen Differentials. Anschließend berechne man $\mathbf{f}(0.2, 0.1)$ und ermittle den euklidischen Abstand zur Näherung.

Aufgabe 9:

Man berechne die Jacobi-Matrix unter Verwendung der Kettenregel und direkt:

a) $\mathbf{f} : \mathbb{R}^2 \xrightarrow{\mathbf{f}_1} \mathbb{R}^2 \xrightarrow{\mathbf{f}_2} \mathbb{R}$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} r = ye^x \\ s = x^3 \end{pmatrix} \mapsto r \cos(s^2).$$

b) $\mathbf{g} : \mathbb{R}^3 \xrightarrow{\mathbf{g}_1} \mathbb{R}^2 \xrightarrow{\mathbf{g}_2} \mathbb{R}^3$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} u = \sin(2yz) \\ v = x^2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 2v - 3u \\ e^{2u+v} \\ u^3v \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 10:

Man berechne für die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x, y) = x^2 + y$ im Punkt (x_0, y_0) die Ableitung in Richtung $\mathbf{h} = (h_1, h_2)^T$. Welchen Anstieg besitzt die Funktion im Punkt $(2, -3)$ in den durch die Gerade $2x + 7y = 3$ gegebenen Richtungen.

Aufgabe 11:

a) Gegeben sei die Koordinatentransformation

$$\Phi(x, y) = \begin{pmatrix} u(x, y) \\ v(x, y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - y \\ x + y \end{pmatrix}$$

mit $(x, y) \in Q := [-1, 1] \times [-1, 1]$.

- (i) Man berechne $\mathbf{J}\Phi(x, y)$ und $\det(\mathbf{J}\Phi(x, y))$ sowie
- (ii) $\Phi^{-1}(u, v)$, $\mathbf{J}\Phi^{-1}(u, v)$ und $\det(\mathbf{J}\Phi^{-1}(u, v))$.
- (iii) Man zeichne Q und $\Phi(Q)$.

b) Man zeichne den folgenden Körper und gebe die zugehörige Zylinderkoordinatendarstellung an

$$K = \{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 \mid 9 \leq y^2 + z^2 \leq 25 \wedge 0 \leq x \leq 10 \wedge z \leq 0\}.$$

Aufgabe 12:

Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x, y) = x^2 + y^2$.

- a) Man berechne das Taylor-Polynom ersten Grades $T_1(x, y)$ von f im Punkt $(x_0, y_0) = (-1, -1)$.
- b) Man zeichne f und die Tangentialebene im Quadrat $[-3, 1] \times [-3, 1]$.
- c) Man berechne den Abstand von f zu T_1 im Punkt $(1, 1)$.

Aufgabe 13:

Man berechne das Taylor-Polynom 2. Grades der folgenden Funktion zum Entwicklungspunkt $(x_0, y_0, z_0) = (0, 0, 0)$

$$f(x, y, z) = 1 + z + xy + x^2(1 - y)^2 + (y + z)^3.$$

Aufgabe 14:

Man berechne das Taylor-Polynom 2. Grades zum Entwicklungspunkt $(x_0, y_0) = (0, 0)$ der folgenden Funktion

$$h(x, y) = \cos(x^2 + y^2)$$

und schätze den Fehler, der dadurch entsteht, wenn man T_2 anstelle von f im Rechteck $[0, \pi/4] \times [0, \pi/4]$ verwendet, nach oben ab.

Aufgabe 15:

Man berechne alle stationären Punkte der folgenden Funktionen und klassifiziere diese:

a) $f(x, y) = (x^2 - y^2)e^{-x^2 - y^2},$

b) $f(x, y) = y(y^2 - 3),$

c) $f(x, y) = \sin(x^2 + y^2),$

d) $f(x, y) = |x + y|.$

Aufgabe 16:

Gegeben sei die Funktion $f(x, y) = 8x^4 - 10x^2y + 3y^2.$

- a) Man berechne alle stationären Punkte von f .
- b) Man versuche die hinreichende Bedingung zur Klassifikation der stationären Punkte anzuwenden.
- c) Man weise nach, dass f im Ursprung längs jeder Geraden durch Null ein lokales Minimum besitzt.
- d) Besitzt f auch längs jeder Parabel $y = ax^2$ mit $a \in \mathbb{R}$ ein Minimum im Ursprung?
- e) Man zeichne die Funktion beispielweise mit Hilfe der MATLAB-Routinen 'ezsurf' und 'ezcontour'.

Aufgabe 17:

Man untersuche die durch die Niveaumenge

$$f(x, y) := x^3 + y^3 - xy = 0$$

implizit gegebene Kurve. Im Einzelnen sind gesucht

- a) die Symmetrien der Kurve,
- b) die Kurvenpunkte mit horizontaler und
- c) vertikaler Tangente,
- d) die singulären Punkte der Kurve mit Klassifikation und
- e) eine Zeichnung der Niveaumenge.

Aufgabe 18:

Gegeben sei die Funktion $h : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$h(x, y, z) = z^2 + y^2 - x^2 + 4z - 2x + 3.$$

- a) Man überprüfe, ob die Niveaumenge $h(x, y, z) = c$, die durch den Punkt $(-1, 1, -2)$ festgelegt wird, in der Umgebung dieses Punktes eine glatte Fläche bildet.
- b) Man löse obige Gleichung gegebenenfalls nach einer der Variablen auf, um die Fläche explizit anzugeben.
- c) Man gebe im Punkt $(-1, 1, -2)$ die Tangentialebene bezüglich der Fläche aus a) in Parameterform an.
- d) Man zeichne die Fläche mit Tangentialebene.

Aufgabe 19:

Man berechne die Extremwerte der Funktion $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x, y) = x + y$ auf dem Kreis $x^2 + y^2 = 1$

- a) unter Verwendung der Lagrangeschen Multiplikatorenregel und
- b) über Parametrisierung des Kreises durch $\mathbf{c}$ und anschließendes Lösen der Extremalaufgabe in $h(t) := f(\mathbf{c}(t))$.

Aufgabe 20:

Für die Funktion $f(x, y, z) = z^2$ berechne und klassifiziere man die Extrema auf dem Schnitt des Zylinders $x^2 + y^2 = 9$ mit der Ebene $y = z$ unter Verwendung der Lagrangeschen Multiplikatorenregel.

Aufgabe 21:

Zur Bestimmung eines Extremums der Funktion

$$f(x, y) := (x + y)^2 + \cosh(x) + \cos(y + 1)$$

soll das Newton-Verfahren auf die Funktion $\mathbf{F}(x, y) = \nabla f(x, y)$ angewendet werden.

- Man berechne $\mathbf{F}(x, y)$ und die Jacobi-Matrix $\mathbf{JF}(x, y)$.
- Man stelle das Newton-Verfahren auf.
- Man schreibe ein MATLAB-Programm zur numerischen Durchführung des Newton-Verfahrens unter Verwendung der MATLAB-Routine 'linsolve'.
- Ausgehend vom Startvektor $(x_0, y_0) = (0, 0)$ berechne man damit eine Lösung auf zehn Stellen genau.
- Man klassifiziere den berechneten stationären Punkt und erstelle einen Flächenplot und einen Höhenlinienplot mit Hilfe der MATLAB-Routinen 'ezsurf' und 'ezcontour'.

Aufgabe 22:

Mit $Q := [0, 2] \times [0, 1]$ berechne man für die Funktion

$$f : Q \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x, y) = 2 - x$$

- Riemannsche Unter- und Obersumme zu folgender Zerlegung Z von Q

$$Q_{i,j} = \left[\frac{2(i-1)}{n}, \frac{2i}{n} \right] \times \left[\frac{j-1}{n}, \frac{j}{n} \right], \quad i, j = 1, \dots, n$$

- und das Integral von f über Q nach dem Satz von Fubini.

Aufgabe 23:

Man berechne folgende Integrale

a) $\int_{\pi}^{2\pi} \int_0^{\pi} \cos(x+y) \, dx \, dy,$

b) $\int_0^2 \int_0^1 x^2 - 3y + 1 \, dx \, dy$ und $\int_0^1 \int_0^2 x^2 - 3y + 1 \, dy \, dx,$

c) $\int_Q \frac{y^2 - x}{xy^2} \, d(x, y)$ mit $Q = [1, e] \times [1, 2].$

Aufgabe 24:

Man berechne folgende Integrale

a) $\int_2^9 \int_0^3 \int_0^1 \frac{x^6 \sqrt{y+1}}{z-1} \, dx \, dy \, dz,$

b) $\int_Q \sinh z + \frac{6z^2}{(2x+y)^2} \, d(x, y, z)$ mit $Q = [1, 2] \times [0, 1] \times [-1, 1].$

Aufgabe 25:

a) Man zeichne das Dreieck D mit den Eckpunkten $P_1 = (-1, 1)$, $P_2 = (0, 0)$ und $P_3 = (2, 2)$ und stelle es als Normalbereich dar.

b) Man berechne $\int_D 18y \, d(x, y)$

Aufgabe 26:

a) Man zeichne den durch $x \leq 0$, $z \geq 1$, $z \leq 3$ und $x^2 + y^2 = 4$ eingeschlossenen Bereich Z und stelle ihn als Normalbereich dar.

b) Man berechne $\int_Z 3x \, d(x, y, z)$ in x, y, z -Koordinaten und in Zylinderkoordinaten.

Aufgabe 27:

Man zeichne die durch $y \leq 0$, $z \leq 0$ und $x^2 + y^2 + z^2 \leq 16$ gegebene Viertelkugel K und berechne ihren Schwerpunkt mit der Dichtefunktion $\rho(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 + 1$ unter Verwendung von Kugelkoordinaten.

Aufgabe 28:

Durch $x^2 + y^2 + z^2 \leq 9$ wird eine Kugel K beschrieben. K habe die konstante Dichte ρ .

- a) Man zeichne K unter Verwendung der MATLAB-Routine 'ezgraph3'.
- b) Für K berechne man die Masse und das Trägheitsmoment bezüglich der z -Achse.
- c) Man berechne das Trägheitsmoment von K bezüglich der zur z -Achse parallelen Achse D , die durch den Punkt $(2, 1, 3)^T$ verläuft.

Aufgabe 29:

- a) Für das Vektorfeld $\mathbf{f} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ mit $\mathbf{f}(x, y) = \begin{pmatrix} xy \\ 1 \end{pmatrix}$ berechne man das Kurvenintegral $\oint_{\mathbf{c}} \mathbf{f}(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$.

Dabei ist $\mathbf{c}$ die mathematisch positive durchlaufene Randkurve ∂H der Halbkreisfläche $H : x^2 + y^2 \leq 4$ mit $x \leq y$.

- b) Für das Vektorfeld $\mathbf{f} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ mit

$$\mathbf{f}(x, y, z) = \begin{pmatrix} -y \\ x \\ (x + y)/z \end{pmatrix}$$

berechne man das Kurvenintegral $\int_{\mathbf{c}} \mathbf{f}(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$ mit der Kurve $\mathbf{c} : [4\pi, 16\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3$ und

$$\mathbf{c}(t) = \begin{pmatrix} t \cos t \\ t \sin t \\ t \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 30:

Gegeben sei das Vektorfeld $\mathbf{f} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ mit

$$\mathbf{f}(x, y, z) = \begin{pmatrix} 3x^2y^4z^5 + 1 \\ 4x^3y^3z^5 + 2y \\ 5x^3y^4z^4 + 3z^2 \end{pmatrix}.$$

- a) Man zeige, dass $\mathbf{f}$ ein Potential besitzt, ohne es zu berechnen.
- b) Man berechne ein Potential durch sukzessives Integrieren von $\mathbf{f}$ und
- c) mit Hilfe des Hauptsatzes für Kurvenintegrale.
- d) Längs der Kurve $\mathbf{c} : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^3$ mit

$$\mathbf{c}(t) = (\cos t, \sin t, \sin t + \cos t)^T$$

berechne man für die Fälle $T = \pi$ und $T = 2\pi$ das Kurvenintegral $\int_{\mathbf{c}} \mathbf{f}(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$.

Aufgabe 31:

Man verifiziere den Satz von Green für das Vektorfeld

$$\mathbf{f}(x, y) = (-xy - 2y, 2x + 4y^2)^T$$

und das durch die Kurve $x^2 + 4y^2 = 4$ eingeschlossene Gebiet E .

Lösung 1:

a)

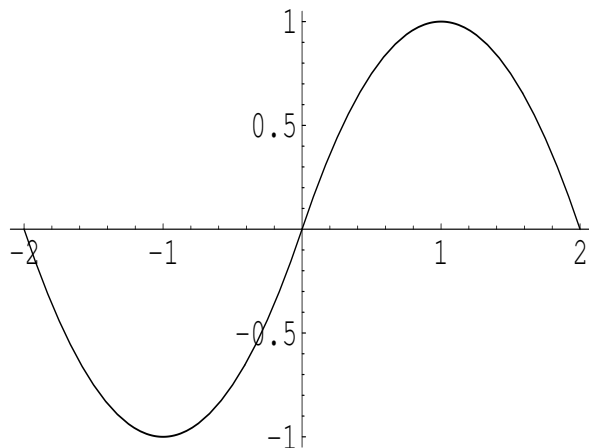


Bild 1 a) $f(x)$

b) Da f ungerade ist

$$0 \leq x \leq 2: \quad -f(x) = -x(2-x) = (-x)(2+(-x)) = f(-x),$$

gilt $a_k = 0$.

Mit den Bezeichnungen des Skriptes ist $T = 4 \Rightarrow \omega = 2\pi/T = \pi/2$

$$\begin{aligned} b_{k \geq 1} &= \frac{4}{T} \int_0^{T/2} f(x) \sin\left(\frac{k\pi x}{2}\right) dx = \int_0^2 x(2-x) \sin\left(\frac{k\pi x}{2}\right) dx \\ &= -\frac{2x(2-x)}{k\pi} \cos\left(\frac{k\pi x}{2}\right) \Big|_0^2 + \frac{2}{k\pi} \int_0^2 2(1-x) \cos\left(\frac{k\pi x}{2}\right) dx \\ b_{k \geq 1} &= 2(1-x) \left(\frac{2}{k\pi}\right)^2 \sin\left(\frac{k\pi x}{2}\right) \Big|_0^2 + \left(\frac{2}{k\pi}\right)^2 \int_0^2 2 \sin\left(\frac{k\pi x}{2}\right) dx \\ &= -2 \left(\frac{2}{k\pi}\right)^3 \cos\left(\frac{k\pi x}{2}\right) \Big|_0^2 = \begin{cases} 4 \left(\frac{2}{k\pi}\right)^3 & k = 2n-1 \\ 0 & k = 2n \end{cases} \end{aligned}$$

Damit lautet die Fourier-Reihe

$$F_f(x) = \frac{32}{\pi^3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^3} \sin\left(\frac{(2n-1)\pi x}{2}\right).$$

c)

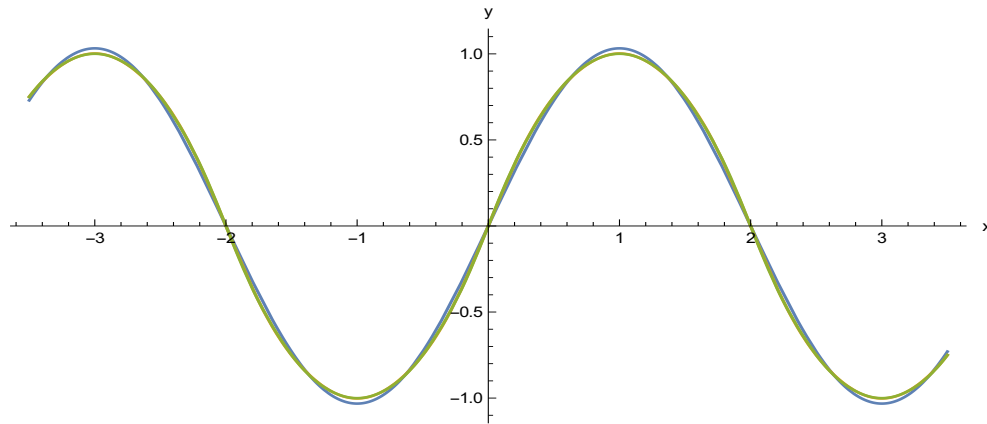


Bild 1 c) (i) $S_m(x)$ für $m = 1, 3, 5$

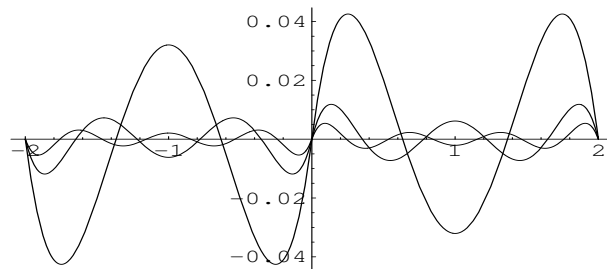


Bild 1 c) (ii) $f(x) - S_m(x)$ für $m = 1, 3, 5$

- d) Da f stückweise C^1 -Funktion und stetig in $x = 1$ ist, konvergiert die Fourier-Reihe dort gegen f . Es gilt also

$$1 = f(1) = F_f(1) = \frac{32}{\pi^3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^3} \sin\left(\frac{(2n-1)\pi}{2}\right) = \frac{32}{\pi^3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^3}$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^3} = \frac{\pi^3}{32}.$$

Lösung 2:

a)

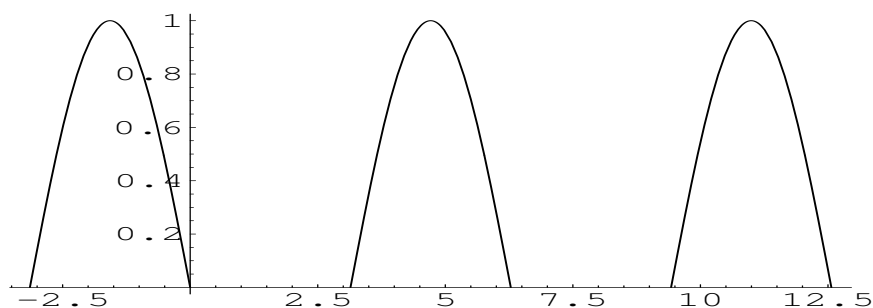


Bild 2 a) 2π -periodische direkte Fortsetzung der Funktion f

b) Mit den Bezeichnungen des Skriptes ist $T = 2\pi \Rightarrow \omega = 1$.

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 -\sin x dx = \frac{1}{\pi} \cos x \Big|_{-\pi}^0 = \frac{2}{\pi}$$

$$\begin{aligned} a_{k \geq 1} &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(kx) dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 -\sin x \cos(kx) dx \\ &= -\frac{1}{\pi} \left(\frac{\sin x \sin(kx)}{k} \Big|_{-\pi}^0 - \frac{1}{k} \int_{-\pi}^0 \cos x \sin(kx) dx \right) \\ &= \frac{1}{k\pi} \left(\frac{-\cos x \cos(kx)}{k} \Big|_{-\pi}^0 - \frac{1}{k} \int_{-\pi}^0 \sin x \cos(kx) dx \right) \\ &= \frac{1}{k^2\pi} (-1 - \cos(k\pi)) + \frac{a_k}{k^2} \end{aligned}$$

Über a_1 kann nach dieser Rechnung nichts ausgesagt werden.

$\Rightarrow$

$$a_{k \geq 2} = -\frac{1 + (-1)^k}{\pi(k^2 - 1)} = \begin{cases} 0 & k = 2n - 1 \quad (\text{ungerade}) \\ -\frac{2}{\pi(k-1)(k+1)} & k = 2n \quad (\text{gerade}) \end{cases}$$

$$a_1 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 -\sin x \cos x dx = -\frac{1}{2\pi} (\sin^2 x) \Big|_{-\pi}^0 = 0$$

$$\begin{aligned} b_{k \geq 1} &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(kx) dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 -\sin x \sin(kx) dx \\ &= -\frac{1}{\pi} \left(-\frac{\sin x \cos(kx)}{k} \Big|_{-\pi}^0 + \frac{1}{k} \int_{-\pi}^0 \cos x \cos(kx) dx \right) \\ &= -\frac{1}{k\pi} \left(\frac{\cos x \sin(kx)}{k} \Big|_{-\pi}^0 + \frac{1}{k} \int_{-\pi}^0 \sin x \sin(kx) dx \right) = \frac{b_k}{k^2} \end{aligned}$$

$\Rightarrow b_{k \geq 2} = 0$, über b_1 kann nach dieser Rechnung nichts ausgesagt werden.

$$b_1 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 -\sin x \sin x \, dx = -\frac{1}{2\pi} (x - \sin x \cos x) \Big|_{-\pi}^0 = -\frac{1}{2}$$

Damit lautet die Fourier-Reihe

$$F_f(x) = \frac{1}{\pi} - \frac{1}{2} \sin x - \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} \cos(2nx)$$

c)

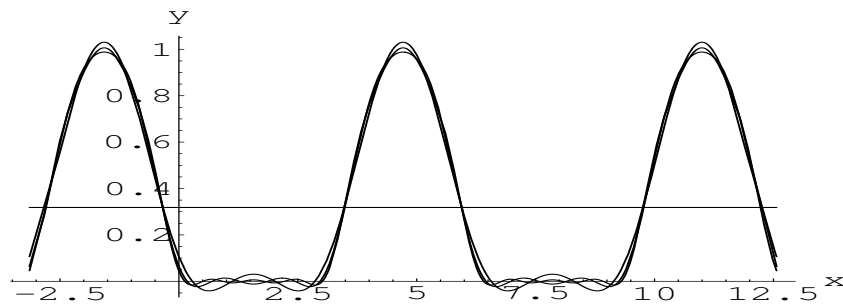


Bild 2 c): Partialsummen $S_0(x), \dots, S_3(x)$

d) Da f stückweise C^1 -Funktion und stetig in $x = 0$ ist, konvergiert die Fourier-Reihe dort gegen f . Es gilt also

$$0 = f(0) = F_f(0) = \frac{1}{\pi} - \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{1}{2}.$$

Lösung 3:

a) $f(x, y) = 5x^2 - 3y^2 \Rightarrow \operatorname{grad} f(x, y) = (10x, -6y)^T$

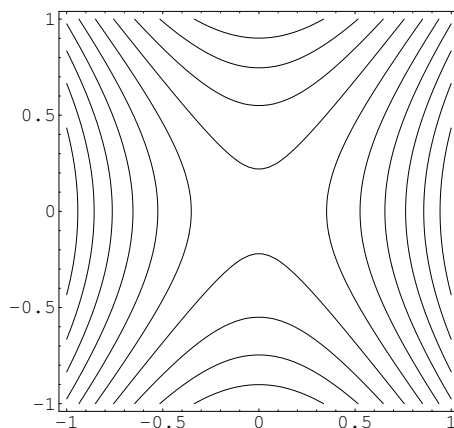


Bild 3 a) $5x^2 - 3y^2 = c$ mit $c \in \mathbb{R}$

b) $f(x, y) = 5x + 3y \Rightarrow \operatorname{grad} f(x, y) = (5, 3)^T$

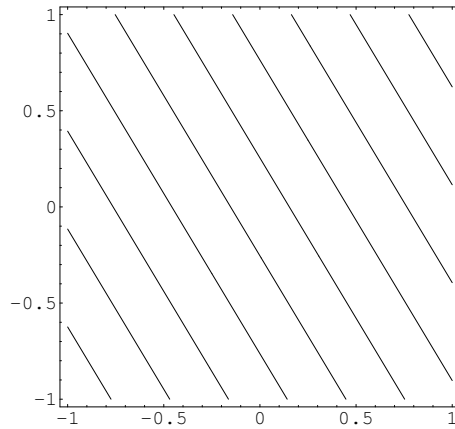


Bild 3 b) $5x + 3y = c$ mit $c \in \mathbb{R}$

c) $f(x, y) = 5x^2 + 3y^2 \Rightarrow \operatorname{grad} f(x, y) = (10x, 6y)^T$

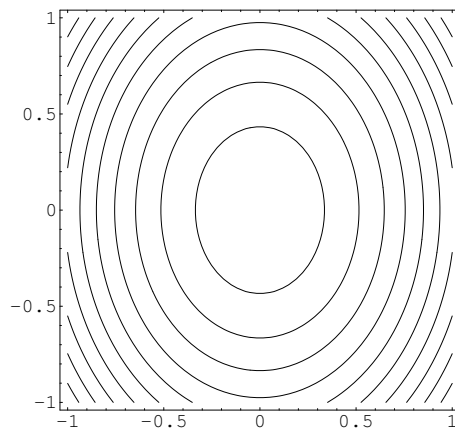


Bild 3 c) $5x^2 + 3y^2 = c$ mit $c \in \mathbb{R}$

d) $f(x, y) = \sin(6x) + 2y \Rightarrow \operatorname{grad} f(x, y) = (6 \cos(6x), 2)^T$

Ein MATLAB-Befehl für den Höhenlinienplot lautet:

```
ezcontour('sin(6*x)+2*y', [-1,1,-1,1])
```

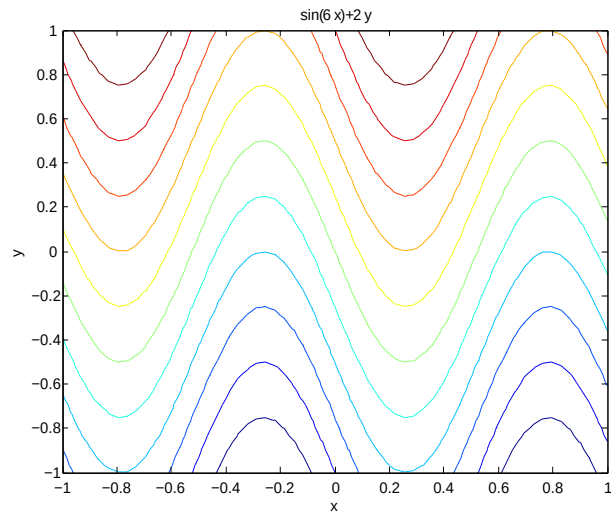


Bild 3 d) $\sin(6x) + 2y = c$ mit $c \in \mathbb{R}$

Lösung 4:

a) $f(x, y) = x^2 - 4y$, $f_x(x, y) = 2x$, $f_y(x, y) = -4$,

$$f_{xx}(x, y) = 2, \quad f_{xy}(x, y) = 0, \quad f_{yy}(x, y) = 0,$$

$$f_{xxx}(x, y) = 0, \quad f_{xxy}(x, y) = 0, \quad f_{xyy}(x, y) = 0, \quad f_{yyy}(x, y) = 0$$

b) Ein MATLAB-Befehl für den Flächenplot lautet:

```
ezsurf('x^2-4*y', [-4,4,-2,2])
```

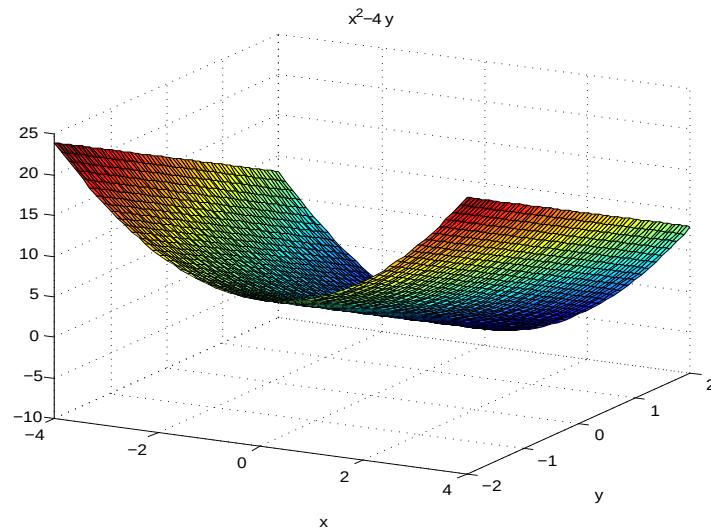



Bild 4 $f(x, y) = x^2 - 4y$

c) $f(2, 0) = 2^2 - 4 \cdot 0 = 4$, $f_x(2, 0) = 4$, $f_y(2, 0) = -4$

Tangentialebene : $z = 4 + 4(x - 2) - 4y$

- d) Es ist $f(2, 0) = 4$. Damit wird die Höhenlinie im Punkt $(2, 0)$ beschrieben durch die implizite Gleichung

$$4 = f(x, y(x)) = x^2 - 4y(x).$$

Man erhält durch Auflösen $y(x) = \frac{x^2}{4} - 1$. Eine die Höhenlinie parametrisierende Kurve ist daher gegeben durch

$$\mathbf{c}(x) = \begin{pmatrix} x \\ y(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ \frac{x^2}{4} - 1 \end{pmatrix}.$$

e) $\text{grad} f(2, 0) = (f_x(2, 0), f_y(2, 0))^T = (4, -4)^T$

Tangentialrichtung der Höhenlinie

$$\mathbf{c}'(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{x}{2} \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{c}'(2) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\cos \alpha = \frac{\text{grad} f(2, 0)^T \cdot \mathbf{c}'(2)}{\|\text{grad} f(2, 0)\|_2 \cdot \|\mathbf{c}'(2)\|_2} = 0 \Rightarrow \alpha = 90^\circ$$

Lösung 5:

a) $u(x, y, t) = \sin(x) \sin(2y) e^{-5t}$

$$u_t(x, y, t) = -5 \sin(x) \sin(2y) e^{-5t}$$

$$u_x(x, y, t) = \cos(x) \sin(2y) e^{-5t}, \quad u_y(x, y, t) = 2 \sin(x) \cos(2y) e^{-5t}$$

$$u_{xx}(x, y, t) = -\sin(x) \sin(2y) e^{-5t}, \quad u_{yy}(x, y, t) = -4 \sin(x) \sin(2y) e^{-5t}$$

Damit löst u die Wärmeleitungsgleichung $u_t = u_{xx} + u_{yy}$.

b) $u(x, y) = (\sin(nx) + 2 \cos(nx)) \sinh(ny)$

$$u_x(x, y) = n(\cos(nx) - 2 \sin(nx)) \sinh(ny),$$

$$u_y(x, y) = n(\sin(nx) + 2 \cos(nx)) \cosh(ny)$$

$$u_{xx}(x, y) = -n^2(\sin(nx) + 2 \cos(nx)) \sinh(ny),$$

$$u_{yy}(x, y) = n^2(\sin(nx) + 2 \cos(nx)) \sinh(ny)$$

Damit löst u die Laplace-Gleichung $\Delta u = 0$.

Lösung 6:

a) (i) $\mathbf{h}(x, y, z) = (x^2 + y^2 + z^2, x^2 + y^2 + z^2, x^2 + y^2 + z^2)^T$

$$\operatorname{div} \mathbf{h} = h_{1x} + h_{2y} + h_{3z} = 2x + 2y + 2z$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{h} = (h_{3y} - h_{2z}, h_{1z} - h_{3x}, h_{2x} - h_{1y})^T = (2y - 2z, 2z - 2x, 2x - 2y)^T$$

alternativ:

$$\mathbf{h}(x, y, z) = \varphi(x, y, z) \mathbf{v} \quad \text{mit} \quad \varphi(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 \quad \text{und} \quad \mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Man erhält

$$\nabla \varphi = (2x, 2y, 2z)^T, \quad \operatorname{div} \mathbf{v} = 0, \quad \operatorname{rot} \mathbf{v} = \mathbf{0} \quad \text{und}$$

$$(\nabla \varphi) \times \mathbf{v} = (2y - 2z, 2z - 2x, 2x - 2y)^T.$$

Damit ergibt sich

$$\operatorname{div} \mathbf{h} = (\nabla \varphi, \mathbf{v}) + \varphi \operatorname{div} \mathbf{v} = (\nabla \varphi, \mathbf{v}) = 2x + 2y + 2z$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{h} = (\nabla \varphi) \times \mathbf{v} + \varphi \operatorname{rot} \mathbf{v} = (\nabla \varphi) \times \mathbf{v} = (2y - 2z, 2z - 2x, 2x - 2y)^T.$$

$$(ii) \quad \mathbf{u}(x, y, z) = (x^2 - y^2 - z^2, y^2 - x^2 - z^2, z^2 - x^2 - y^2)^T$$

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = u_{1x} + u_{2y} + u_{3z} = 2x + 2y + 2z$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{u} = (u_{3y} - u_{2z}, u_{1z} - u_{3x}, u_{2x} - u_{1y})^T = (-2y + 2z, -2z + 2x, -2x + 2y)$$

$$(iii) \quad \operatorname{div}(\mathbf{h} + \mathbf{u}) = \operatorname{div} \mathbf{h} + \operatorname{div} \mathbf{u} = 2(2x + 2y + 2z)$$

$$\operatorname{rot}(\mathbf{h} + \mathbf{u}) = \operatorname{rot} \mathbf{h} + \operatorname{rot} \mathbf{u} = \mathbf{0}$$

alternativ:

$$\mathbf{h}(x, y, z) + \mathbf{u}(x, y, z) = (2x^2, 2y^2, 2z^2)$$

$$\operatorname{div}(\mathbf{h} + \mathbf{u}) = (h_1 + u_1)_x + (h_2 + u_2)_y + (h_3 + u_3)_z = 4x + 4y + 4z$$

$$\operatorname{rot}(\mathbf{h} + \mathbf{u}) = (0 - 0, 0 - 0, 0 - 0)^T = \mathbf{0}$$

$$b) \quad (i) \quad \mathbf{g}(x, y) = (u(x, y), v(x, y))^T = (x, -y)^T$$

$$\operatorname{div} \mathbf{g} = u_x + v_y = 1 - 1 = 0, \quad \operatorname{rot} \mathbf{g} = v_x - u_y = 0 - 0 = 0$$

(ii) Die MATLAB-Befehle für das Vektorfeld lauten:

```
[X,Y] = meshgrid(-1:.2:1);
U=X.^1;
V=-Y.^1;
quiver(X,Y,U,V)
```

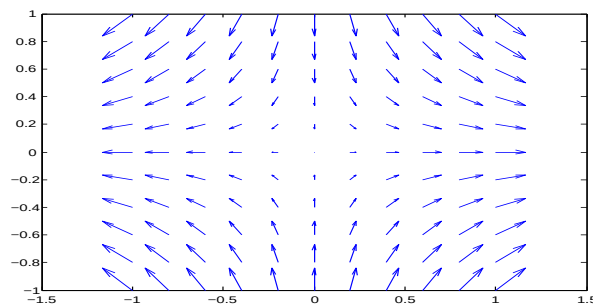


Bild 6 b) Vektorfeld $\mathbf{g}(x, y) = (x, -y)^T$

Stromlinien sind die Kurven $\mathbf{c}(t) = (x(t), y(t))^T$, deren Tangentialvektoren durch das Vektorfeld $\mathbf{g}$ gegeben sind

$$\dot{\mathbf{c}}(t) = \begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \end{pmatrix} = \mathbf{g}(x(t), y(t)) = \begin{pmatrix} u(x(t), y(t)) \\ v(x(t), y(t)) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(t) \\ -y(t) \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \mathbf{c}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ae^t \\ be^{-t} \end{pmatrix} \Rightarrow e^t = \frac{x}{a} \Rightarrow \mathbf{c}(x) = \begin{pmatrix} x \\ \frac{ab}{x} \end{pmatrix}$$

oder alternativ die Differentialgleichung $y'(x) = \frac{v(x, y(x))}{u(x, y(x))}$ erfüllen.

$$y'(x) = \frac{-y(x)}{x} \Rightarrow \int \frac{dy}{y} = - \int \frac{dx}{x} \Rightarrow y(x) = \frac{c}{x}$$

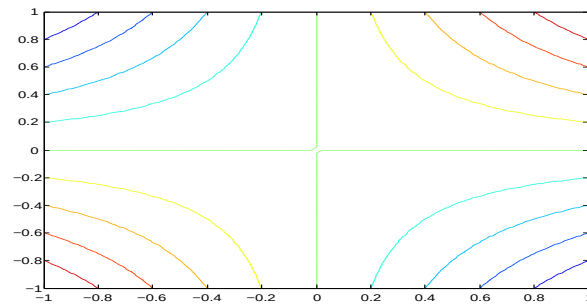


Bild 6 b) Stromlinien $\mathbf{c}(x) = (x, c/x)^T$, $c \in \mathbb{R}$, (Höhenlinien von $xy = c$)

Lösung 7:

a) MATLAB-Befehl für den Flächenplot:

```
ezsurf('2*x*y/sqrt(x^2+y^2)', [-1,1,-1,1])
```

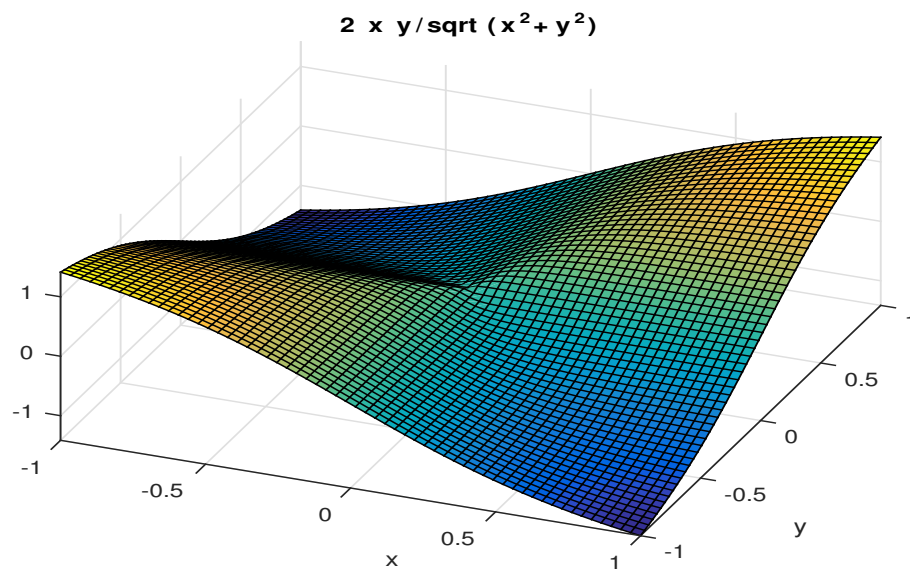


Bild 7: $f(x, y) = \frac{2xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$

b) Als Komposition stetiger Funktionen ist f für $(x, y) \neq (0, 0)$ stetig.

Mit $0 \leq (x - y)^2 = x^2 - 2xy + y^2 \Rightarrow 2xy \leq x^2 + y^2$ erhält man:

$$\begin{aligned} 0 &\leq \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} |f(x, y)| = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{|2xy|}{\sqrt{x^2 + y^2}} \\ &\leq \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 + y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \sqrt{x^2 + y^2} = 0. \end{aligned}$$

Also gilt $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = 0 = f(0, 0)$. Damit ist f in $\mathbb{R}^2$ stetig.

c) Die Jacobi-Matrix $\mathbf{J}f(x, y) = (f_x(x, y), f_y(x, y))$ lautet für $(x, y) \neq (0, 0)$:

$$\mathbf{J}f = \left(\frac{2y^3}{(x^2 + y^2)^{3/2}}, \frac{2x^3}{(x^2 + y^2)^{3/2}} \right).$$

Für $(x, y) = (0, 0)$ erhält man

$$f_x(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h, 0) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0 - 0}{h} = 0.$$

Analog berechnet man $f_y(0, 0) = 0$.

Also gilt $\mathbf{J}f(0, 0) = (f_x(0, 0), f_y(0, 0)) = (0, 0)$

d) Für $(x, y) \neq (0, 0)$ ist f eine C^1 -Funktion und damit total differenzierbar.

Für $(x_0, y_0) = (0, 0)$ und mit $\left\| \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{x^2 + y^2}$ erhält man

$$\frac{f(x, y) - f(0, 0) - \mathbf{J}f(0, 0) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}{\left\| \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right\|} = \frac{\frac{2xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{2xy}{x^2 + y^2}.$$

Für die Nullfolgen $(x_n, y_n) = \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)$ und $(\tilde{x}_n, \tilde{y}_n) = \left(\frac{1}{n}, 0\right)$ berechnet man

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2x_n y_n}{x_n^2 + y_n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2/n^2}{2/n^2} = 1, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2\tilde{x}_n \tilde{y}_n}{\tilde{x}_n^2 + \tilde{y}_n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{0}{1/n^2} = 0.$$

Also existiert der folgende Grenzwert nicht

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{f(x, y) - f(0, 0) - \mathbf{J}f(0, 0) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}{\left\| \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right\|}.$$

Damit ist f in $(x, y) = (0, 0)$ nicht total differenzierbar.

Lösung 8:

a) (i) $f(x, y) = \log(y) + \cos(xy)$,

$$\mathbf{J}f(x, y) = (f_x, f_y) = \text{grad}f(x, y) = \left(-y \sin(xy), \frac{1}{y} - x \sin(xy) \right)$$

(ii) $\mathbf{g}(t) = (t \cos t, t \sin t, t)^T$,

$$\mathbf{J}\mathbf{g}(t) = (g'_1(t), g'_2(t), g'_3(t))^T = \mathbf{g}'(t) = (\cos t - t \sin t, \sin t + t \cos t, 1)^T$$

(iii) $\mathbf{h}(\varphi, \psi) = \mathbf{h}(2 \cos \varphi \cos \psi, 2 \sin \varphi \cos \psi, 2 \sin \psi)^T$,

$$\mathbf{J}\mathbf{h}(\varphi, \psi) = \begin{pmatrix} h_{1\varphi} & h_{1\psi} \\ h_{2\varphi} & h_{2\psi} \\ h_{3\varphi} & h_{3\psi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \sin \varphi \cos \psi & -2 \cos \varphi \sin \psi \\ 2 \cos \varphi \cos \psi & -2 \sin \varphi \sin \psi \\ 0 & 2 \cos \psi \end{pmatrix}$$

(iv) $\mathbf{u}(x, y, z) = (-3x + y, x - 3y + z, y - 3z)^T$, und $x, y, z \in \mathbb{R}$,

$$\mathbf{J}\mathbf{u}(x, y, z) = \begin{pmatrix} u_{1x} & u_{1y} & u_{1z} \\ u_{2x} & u_{2y} & u_{2z} \\ u_{3x} & u_{3y} & u_{3z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

- b) Für $\mathbf{f}(x, y) = (x + y + 1, x^2 - y - 1)^T$ und $\mathbf{x}^0 = (x_0, y_0)^T = (0, 0)^T$ erhält man $\mathbf{f}(\mathbf{x}^0) = \mathbf{f}(0, 0) = (1, -1)^T$.

Die Auswertung des vollständigen Differentials

$$d\mathbf{f}(\mathbf{x}^0) = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x_1}(\mathbf{x}^0)dx_1 + \cdots + \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x_n}(\mathbf{x}^0)dx_n$$

erfolgt durch $d\mathbf{f}(\mathbf{x}^0)(\mathbf{x} - \mathbf{x}^0) = \mathbf{J}\mathbf{f}(\mathbf{x}^0)(\mathbf{x} - \mathbf{x}^0)$.

Für $\mathbf{x} = (0.2, 0.1)^T$ folgt $\mathbf{x} - \mathbf{x}^0 = (0.2, 0.1)^T$.

$$\mathbf{J}\mathbf{f}(x, y) = \begin{pmatrix} f_{1,x}(x, y) & f_{1,y}(x, y) \\ f_{2,x}(x, y) & f_{2,y}(x, y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2x & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{J}\mathbf{f}(0, 0) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Näherungsweise Berechnung von $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ durch $\mathbf{f}(\mathbf{x}) \approx \mathbf{f}(\mathbf{x}^0) + \mathbf{J}\mathbf{f}(\mathbf{x}^0)(\mathbf{x} - \mathbf{x}^0)$:

$$\Rightarrow \mathbf{f}(0.2, 0.1) \approx \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.2 \\ 0.1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.3 \\ -1.1 \end{pmatrix}$$

Die exakte Auswertung:

$$\mathbf{f}(0.2, 0.1) = (0.2 + 0.1 + 1, (0.2)^2 - 0.1 - 1)^T = (1.3, -1.06)^T$$

Der Abstand zur Näherung:

$$\|\mathbf{f}(0.2, 0.1) - \mathbf{f}(0, 0)\| = \left\| \begin{pmatrix} 1.3 \\ -1.06 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1.3 \\ -1.1 \end{pmatrix} \right\| = 0.04$$

Lösung 9:

a) Kettenregel:

$$\mathbf{J}\mathbf{f}_1(x, y) = \begin{pmatrix} ye^x & e^x \\ 3x^2 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{J}\mathbf{f}_2(r, s) = \begin{pmatrix} \cos(s^2) & -2rs \sin(s^2) \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{J}\mathbf{f}(x, y) &= \mathbf{J}(\mathbf{f}_2 \circ \mathbf{f}_1)(x, y) = \mathbf{J}\mathbf{f}_2(\mathbf{f}_1(x, y)) \cdot \mathbf{J}\mathbf{f}_1(x, y) \\ &= \begin{pmatrix} \cos((x^3)^2) & -2ye^x x^3 \sin((x^3)^2) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} ye^x & e^x \\ 3x^2 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} ye^x \cos(x^6) - 6x^5 ye^x \sin(x^6) & e^x \cos(x^6) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\text{direkt: } \mathbf{f}_2(\mathbf{f}_1(x, y)) = \mathbf{f}_2(r(x, y), s(x, y)) = \mathbf{f}(x, y) = ye^x \cos(x^6)$$

$$\Rightarrow \mathbf{J}\mathbf{f}(x, y) = \begin{pmatrix} ye^x \cos(x^6) - 6x^5 ye^x \sin(x^6) & e^x \cos(x^6) \end{pmatrix}$$

b) Kettenregel:

$$\mathbf{J}\mathbf{g}_1(x, y, z) = \begin{pmatrix} 0 & 2z \cos(2yz) & 2y \cos(2yz) \\ 2x & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{J}\mathbf{g}_2(u, v) = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2e^{2u+v} & e^{2u+v} \\ 3u^2v & u^3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{J}\mathbf{g}(x, y, z) &= \mathbf{J}(\mathbf{g}_2 \circ \mathbf{g}_1)(x, y, z) = \mathbf{J}\mathbf{g}_2(\mathbf{g}_1(x, y, z)) \cdot \mathbf{J}\mathbf{g}_1(x, y, z) \\ &= \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2e^{2 \sin(2yz)+x^2} & e^{2 \sin(2yz)+x^2} \\ 3(\sin(2yz))^2 x^2 & (\sin(2yz))^3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2z \cos(2yz) & 2y \cos(2yz) \\ 2x & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 4x & -6z \cos(2yz) & -6y \cos(2yz) \\ 2xe^{2 \sin(2yz)+x^2} & 4z \cos(2yz)e^{2 \sin(2yz)+x^2} & 4y \cos(2yz)e^{2 \sin(2yz)+x^2} \\ 2x \sin^3(2yz) & 6x^2 z \cos(2yz) \sin^2(2yz) & 6x^2 y \cos(2yz) \sin^2(2yz) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

direkt:

$$\mathbf{g}_2(\mathbf{g}_1(x, y, z)) = \mathbf{g}_2(u(x, y, z), v(x, y, z)) = \mathbf{g}(x, y, z) = \begin{pmatrix} 2x^2 - 3 \sin(2yz) \\ e^{2 \sin(2yz)+x^2} \\ \sin^3(2yz) \cdot x^2 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{J}\mathbf{g} = \begin{pmatrix} 4x & -6z \cos(2yz) & -6y \cos(2yz) \\ 2xe^{2 \sin(2yz)+x^2} & 4z \cos(2yz)e^{2 \sin(2yz)+x^2} & 4y \cos(2yz)e^{2 \sin(2yz)+x^2} \\ 2x \sin^3(2yz) & 6x^2 z \cos(2yz) \sin^2(2yz) & 6x^2 y \cos(2yz) \sin^2(2yz) \end{pmatrix}$$

Lösung 10:

Da f stetig partiell differenzierbar ist, ist sie auch total differenzierbar und die Richtungsableitung in (x_0, y_0) kann folgendermaßen berechnet werden:

$$D_{\mathbf{h}}f(x_0, y_0) = \langle \nabla f(x_0, y_0), \mathbf{h} \rangle = (2x_0, 1) \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} = 2x_0h_1 + h_2$$

Die Gerade $2x + 7y = 3$ in Parameterform lautet:

$$\mathbf{g}(x) = \begin{pmatrix} x \\ y(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 3/7 - 2x/7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3/7 \end{pmatrix} + x \begin{pmatrix} 1 \\ -2/7 \end{pmatrix}$$

Zur Berechnung des Anstieges ist der in der Richtungsableitung verwendete Richtungsvektor $\mathbf{h}$ aus der Geradengleichung noch zu normieren:

$$\mathbf{h} = \pm \frac{7}{\sqrt{53}} \begin{pmatrix} 1 \\ -2/7 \end{pmatrix} = \pm \frac{1}{\sqrt{53}} \begin{pmatrix} 7 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Der An- bzw. Abstieg im Punkt $(x_0, y_0) = (2, -3)$ lautet daher

$$D_{\mathbf{h}}f(2, -3) = 4h_1 + h_2 = \pm \left(\frac{28}{\sqrt{53}} - \frac{2}{\sqrt{53}} \right) = \pm \frac{26}{\sqrt{53}}.$$

Lösung 11:

a) (i)

$$\Phi(x, y) = \begin{pmatrix} u(x, y) \\ v(x, y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - y \\ x + y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

ist eine lineare Transformation, genauer sogar eine Drehstreckung um 45° mit dem Faktor $\sqrt{2}$, denn:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \sqrt{2} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} = \sqrt{2} \begin{pmatrix} \cos 45^\circ & -\sin 45^\circ \\ \sin 45^\circ & \cos 45^\circ \end{pmatrix}.$$

$$\mathbf{J}\Phi(x, y) = \begin{pmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \det(\mathbf{J}\Phi(x, y)) = 2$$

(ii)

$$\Phi^{-1}(u, v) = \begin{pmatrix} x(u, v) \\ y(u, v) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (u+v)/2 \\ (v-u)/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{J}\Phi^{-1}(u, v) = \begin{pmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{pmatrix} = (\mathbf{J}\Phi)^{-1},$$

$$\det(\mathbf{J}\Phi^{-1}(u, v)) = 1/2$$

(iii)

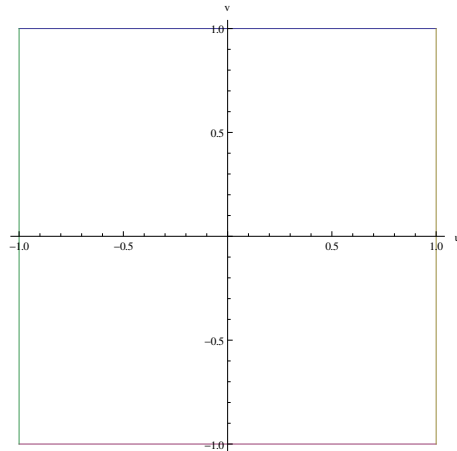


Bild 11.1: Q

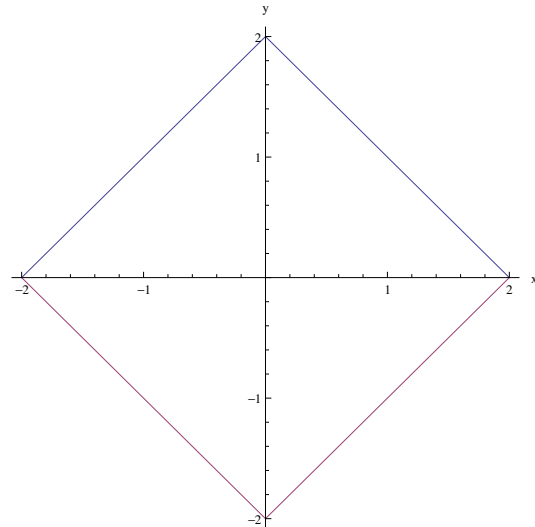


Bild 11.2: $\Phi(Q)$

- b) $9 \leq y^2 + z^2 \leq 25$
ist ein unbeschränkter Hohlzylinder
um die x -Achse mit Radius $3 \leq r \leq 5$.

$0 \leq x \leq 10$ ergibt einen Hohlzylinder
der Länge 10.

$z \leq 0$ ergibt einen halben Hohlzylinder
der Länge 10.

Die Zylinderkoordinaten lauten:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \Phi(x, r, \varphi) = \begin{pmatrix} x \\ r \cos \varphi \\ r \sin \varphi \end{pmatrix}$$

mit $0 \leq x \leq 10$, $3 \leq r \leq 5$
und $\pi \leq \varphi \leq 2\pi$

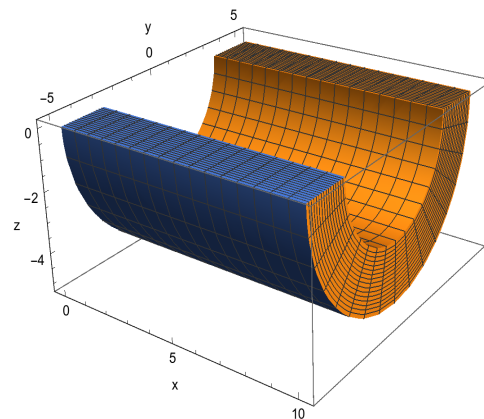


Bild 11.3: halber Hohlzylinder

Lösung 12:

- a) $f(x, y) = x^2 + y^2 \Rightarrow (f_x(x, y), f_y(x, y)) = (2x, 2y)$, $(x_0, y_0) = (-1, -1)$
 $T_1(x, y) = f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0)$
 $= 2 - 2(x + 1) - 2(y + 1)$

- b) MATLAB-Befehle für die Flächenplots:

```
>>ezgraph3('surf','x','y','x^2+y^2',[-3,1,-3,1])
```

```
>>hold
>>ezgraph3('surf','x','y','2-2*(x+1+y+1)',[-3,1,-3,1])
```

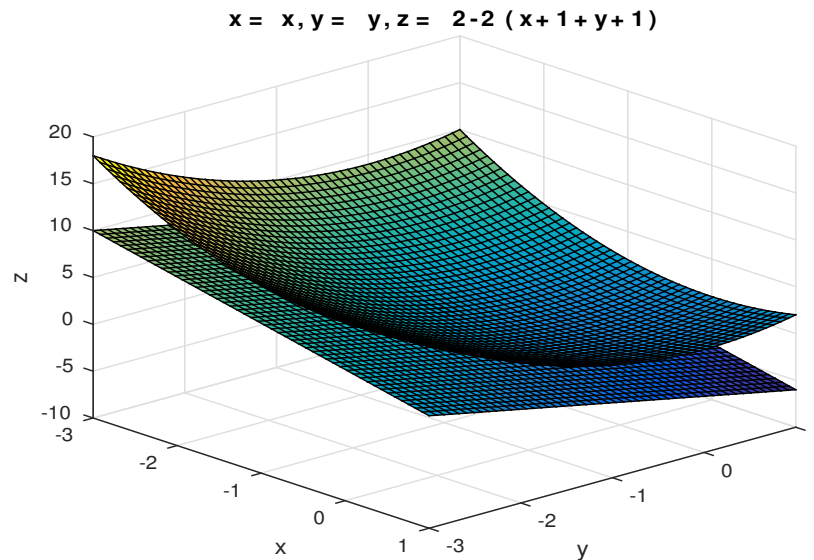


Bild 12: $f(x, y) = x^2 + y^2$ und $T_1(x, y) = 2 - 2(x + 1) - 2(y + 1)$

c) $|f(1, 1) - T_1(1, 1)| = |2 - (2 - 2(1 + 1) - 2(1 + 1))| = 8$

Lösung 13:

$$\begin{aligned}
 f(x, y, z) &= 1 + z + xy + x^2(1 - y)^2 + (y + z)^3 &\Rightarrow f(0, 0, 0) &= 1 \\
 f_x(x, y, z) &= y + 2x(1 - y)^2 &\Rightarrow f_x(0, 0, 0) &= 0 \\
 f_y(x, y, z) &= x - 2x^2(1 - y) + 3(y + z)^2 &\Rightarrow f_y(0, 0, 0) &= 0 \\
 f_z(x, y, z) &= 1 + 3(y + z)^2 &\Rightarrow f_z(0, 0, 0) &= 1 \\
 f_{xx}(x, y, z) &= 2(1 - y)^2 &\Rightarrow f_{xx}(0, 0, 0) &= 2 \\
 f_{xy}(x, y, z) &= 1 - 4x(1 - y) &\Rightarrow f_{xy}(0, 0, 0) &= 1 \\
 f_{xz}(x, y, z) &= 0 &\Rightarrow f_{xz}(0, 0, 0) &= 0 \\
 f_{yy}(x, y, z) &= 2x^2 + 6(y + z) &\Rightarrow f_{yy}(0, 0, 0) &= 0 \\
 f_{yz}(x, y, z) &= 6(y + z) &\Rightarrow f_{yz}(0, 0, 0) &= 0 \\
 f_{zz}(x, y, z) &= 6(y + z) &\Rightarrow f_{zz}(0, 0, 0) &= 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \Rightarrow T_2(x, y, z; 0, 0, 0) &= f(0, 0, 0) + f_x(0, 0, 0)x + f_y(0, 0, 0)y + f_z(0, 0, 0)z \\
 &\quad + \frac{1}{2} (f_{xx}(0, 0, 0)x^2 + f_{yy}(0, 0, 0)y^2 + f_{zz}(0, 0, 0)z^2 \\
 &\quad + 2f_{xy}(0, 0, 0)xy + 2f_{xz}(0, 0, 0)xz + 2f_{yz}(0, 0, 0)yz) \\
 &= 1 + z + xy + x^2
 \end{aligned}$$

$$f(x, y, z) = 1 + z + xy + x^2 - 2yx^2 + x^2y^2 + y^3 + 3y^2z + 3yz^2 + z^3.$$

Lösung 14:

$$h(x, y) = \cos(x^2 + y^2) \quad \Rightarrow \quad h(0, 0) = 1$$

$$h_x(x, y) = -2x \sin(x^2 + y^2) \quad \Rightarrow \quad h_x(0, 0) = 0$$

$$h_y(x, y) = -2y \sin(x^2 + y^2) \quad \Rightarrow \quad h_y(0, 0) = 0$$

$$h_{xx}(x, y) = -2 \sin(x^2 + y^2) - 4x^2 \cos(x^2 + y^2) \quad \Rightarrow \quad h_{xx}(0, 0) = 0$$

$$h_{xy}(x, y) = -4xy \cos(x^2 + y^2) \quad \Rightarrow \quad h_{xy}(0, 0) = 0$$

$$h_{yy}(x, y) = -2 \sin(x^2 + y^2) - 4y^2 \cos(x^2 + y^2) \quad \Rightarrow \quad h_{yy}(0, 0) = 0$$

$$\begin{aligned}
 \Rightarrow T_2(x, y; 0, 0) &= h(0, 0) + h_x(0, 0)x + h_y(0, 0)y \\
 &\quad + \frac{1}{2} (h_{xx}(0, 0)x^2 + h_{xy}(0, 0)xy + h_{yy}(0, 0)y^2) = 1
 \end{aligned}$$

MATLAB-Befehl für den Flächenplot:

`ezsurf('cos(x^2+y^2)', [-2.5, 2.5, -2.5, 2.5])`

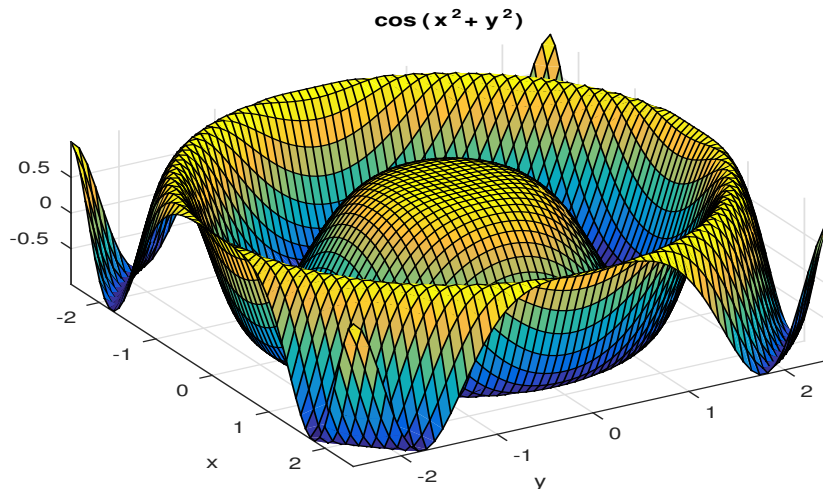


Bild 14: $h(x, y) = \cos(x^2 + y^2)$

Für die Fehlerabschätzung sind die dritten Ableitungen erforderlich

$$\begin{aligned} h_{xxx}(x, y) &= -12x \cos(x^2 + y^2) + 8x^3 \sin(x^2 + y^2) \\ h_{xxy}(x, y) &= -4y \cos(x^2 + y^2) + 8x^2 y \sin(x^2 + y^2) \\ h_{xyy}(x, y) &= -4x \cos(x^2 + y^2) + 8y^2 x \sin(x^2 + y^2) \\ h_{yyy}(x, y) &= -12y \cos(x^2 + y^2) + 8y^3 \sin(x^2 + y^2). \end{aligned}$$

Die Fehlerabschätzung für beliebiges $(x, y) \in [0, \pi/4] \times [0, \pi/4]$ zieht mit $\theta \in]0, 1[$ ein beliebiges $(\xi_1, \xi_2) := (0, 0) + \theta(x, y) \in]0, \pi/4[\times]0, \pi/4[$ nach sich. Mit der Hilfe der Dreiecksungleichung erhält man:

$$\begin{aligned} |h(x, y) - T_2(x, y; 0, 0)| &= |R_2(x, y; 0, 0)| \\ &= \frac{1}{3!} |h_{xxx}(\xi_1, \xi_2)x^3 + 3h_{xxy}(\xi_1, \xi_2)x^2y + 3h_{xyy}(\xi_1, \xi_2)xy^2 + h_{yyy}(\xi_1, \xi_2)y^3| \\ &\leq \frac{1}{3!} (|h_{xxx}(\xi_1, \xi_2)| \cdot |x|^3 + 3|h_{xxy}(\xi_1, \xi_2)| \cdot |x^2y| \\ &\quad + 3|h_{xyy}(\xi_1, \xi_2)| \cdot |xy^2| + |h_{yyy}(\xi_1, \xi_2)| \cdot |y^3|). \end{aligned}$$

Jeder der vier Summanden kann nun jeweils noch oben abgeschätzt werden. Dabei wird $|\sin t| \leq 1$ und $|\cos t| \leq 1$ verwendet.

$$\begin{aligned} |h_{xxx}(\xi_1, \xi_2)| \cdot |x|^3 &= |-12\xi_1 \cos(\xi_1^2 + \xi_2^2) + 8\xi_1^3 \sin(\xi_1^2 + \xi_2^2)| \cdot |x|^3 \\ &\leq (|-12\xi_1| \cdot |\cos(\xi_1^2 + \xi_2^2)| + |8\xi_1^3| \cdot |\sin(\xi_1^2 + \xi_2^2)|) \cdot |x|^3 \\ &\leq \left(12 \cdot \frac{\pi}{4} + 8 \cdot \left(\frac{\pi}{4}\right)^3\right) \left(\frac{\pi}{4}\right)^3 \end{aligned}$$

Entsprechend erhält man

$$3 |h_{xxy}(\xi_1, \xi_2)| \cdot |x^2 y| \leq 3 \left(4 \cdot \frac{\pi}{4} + 8 \cdot \left(\frac{\pi}{4} \right)^3 \right) \left(\frac{\pi}{4} \right)^3$$

$$3 |h_{xyy}(\xi_1, \xi_2)| \cdot |xy^2| \leq 3 \left(4 \cdot \frac{\pi}{4} + 8 \cdot \left(\frac{\pi}{4} \right)^3 \right) \left(\frac{\pi}{4} \right)^3$$

$$|h_{yyy}(\xi_1, \xi_2)| \cdot |y^3| \leq \left(12 \cdot \frac{\pi}{4} + 8 \cdot \left(\frac{\pi}{4} \right)^3 \right) \left(\frac{\pi}{4} \right)^3$$

Insgesamt erhält man also

$$|h(x, y) - T_2(x, y; 0, 0)| \leq \frac{\pi^3}{3!4^3} \left(48 \cdot \frac{\pi}{4} + 64 \cdot \left(\frac{\pi}{4} \right)^3 \right) = 5.5476...$$

Der tatsächliche Maximalfehler wird angenommen für $x = y = \frac{\pi}{4}$.

$$|h\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right) - T_2\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}; 0, 0\right)| = |\cos\left(2 \cdot \frac{\pi^2}{4^2}\right) - 1| = 0.669252...$$

Lösung 15:

a) $\text{grad } f(x, y) = e^{-x^2-y^2} (2x(1-x^2+y^2), 2y(-1-x^2+y^2))^T = (0, 0)^T$

Zur Berechnung der stationären Punkte werden für $f_x(x, y) = 0$ alle Fälle untersucht.

1. Fall: $x = 0 \Rightarrow 0 = f_y(0, y) = e^{-y^2} 2y(-1 + y^2)$

$\Rightarrow y = 0, y = 1, y = -1$

$\Rightarrow$ stationäre Punkte: $P_1 = (0, 0), P_2 = (0, 1), P_3 = (0, -1)$

2. Fall: $1 - x^2 + y^2 = 0 \Rightarrow x^2 = 1 + y^2$

$\Rightarrow 0 = f_y(x, y) = e^{-(1+y^2)-y^2} 2y(-1 - (1 + y^2) + y^2) = -4ye^{-1-2y^2}$

$\Rightarrow y = 0 \Rightarrow x = 1, x = -1$

$\Rightarrow$ stationäre Punkte: $P_4 = (1, 0), P_5 = (-1, 0)$

$Hf(x, y) =$

$$2e^{-x^2-y^2} \begin{pmatrix} 1 - 5x^2 + 2x^4 + y^2 - 2x^2y^2 & 2xy(x^2 - y^2) \\ 2xy(x^2 - y^2) & -1 + 5y^2 - 2y^4 - x^2 + 2x^2y^2 \end{pmatrix}$$

$Hf(0, 0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ ist indefinit

$\Rightarrow P_1 = (0, 0)$ ist Sattelpunkt.

$Hf(0, \pm 1) = 2e^{-1} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ ist positiv definit

$\Rightarrow P_{2,3} = (0, \pm 1)$ sind Minima.

$$\mathbf{H}f(\pm 1, 0) = -2e^{-1} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \text{ ist negativ definit}$$

$\Rightarrow P_{4,5} = (\pm 1, 0)$ sind Maxima.

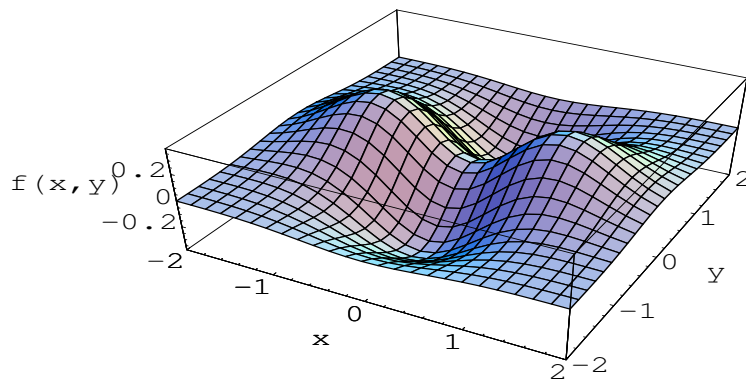


Bild 15 a): $f(x, y) = (x^2 - y^2)e^{-x^2 - y^2}$

b) $\text{grad } f(x, y) = (0, 3y^2 - 3)^T = (0, 0)^T \Rightarrow y = \pm 1, x \in \mathbb{R}$

Die stationären Punkte liegen auf den Geraden $P_1(x) = (x, 1)$ und $P_2(x) = (x, -1)$.

$$\mathbf{H}f(x, y) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 6y \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{H}f(x, 1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} \text{ ist positiv semidefinit}$$

$\Rightarrow P_1(x) = (x, 1)$ sind keine lokalen Maxima.

$$\mathbf{H}f(x, -1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -6 \end{pmatrix} \text{ ist negativ semidefinit}$$

$\Rightarrow P_2(x) = (x, -1)$ sind keine lokalen Minima.

f ist unabhängig von x , d.h. für festes $y = c$ gilt $f(x, c) = \text{konstant}$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Die Extrema sind also die von $g(y) = y(y^2 - 3)$, d.h. alle Punkte der Geraden $P_1(x) = (x, 1)$ sind lokale Minima und für $P_2(x) = (x, -1)$ erhält man lokale Maxima.

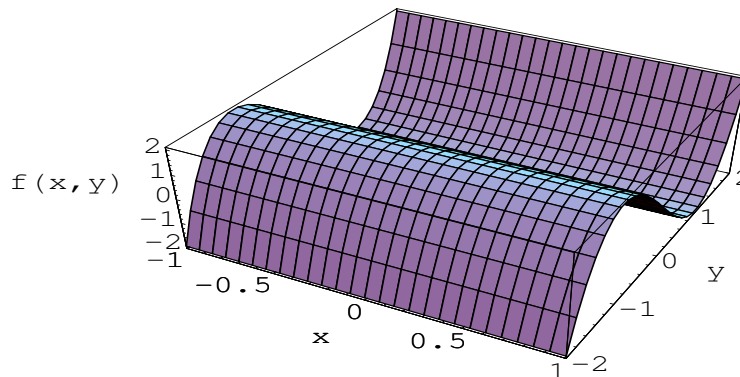


Bild 15 b): $f(x, y) = y(y^2 - 3)$

c) $\text{grad } f(x, y) = 2 \cos(x^2 + y^2)(x, y)^T = (0, 0)^T$

Die stationären Punkte sind also gegeben durch $(0, 0)$ und alle Punkte P , für die $x^2 + y^2 = \pi/2 + n\pi$ mit $n \in \mathbb{N}_0$ gilt.

$\mathbf{H}f(x, y) =$

$$\begin{pmatrix} 2 \cos(x^2 + y^2) - 4x^2 \sin(x^2 + y^2) & -4xy \sin(x^2 + y^2) \\ -4xy \sin(x^2 + y^2) & 2 \cos(x^2 + y^2) - 4y^2 \sin(x^2 + y^2) \end{pmatrix}$$

$\mathbf{H}f(0, 0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ ist positiv definit

$\Rightarrow (0, 0)$ ist Minimum.

$$\mathbf{H}f(P) = \begin{pmatrix} -4x^2 \sin(x^2 + y^2) & -4xy \sin(x^2 + y^2) \\ -4xy \sin(x^2 + y^2) & -4y^2 \sin(x^2 + y^2) \end{pmatrix}$$

ist semidefinit, denn $\det \mathbf{H}f(P) = 0$.

Wir klassifizieren daher anders:

Für die Punkte P auf den Kreisen $x^2 + y^2 = \pi/2 + n\pi$ gilt $\sin(\pi/2 + n\pi) = (-1)^n$. Deshalb liegen für gerades n Maxima und für ungerades n Minima auf diesen Kreisen vor.

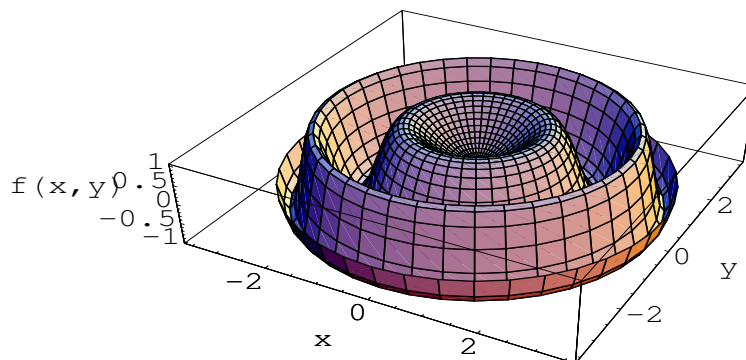


Bild 15 c): $f(x, y) = \sin(x^2 + y^2)$

d) Für $x + y \neq 0$ ist $f(x, y) = |x + y|$ stetig differenzierbar und es gilt

$$\text{grad } f(x, y) = \begin{cases} (1, 1)^T & , \quad x + y > 0 \\ -(1, 1)^T & , \quad x + y < 0. \end{cases}$$

In den offenen Halbebenen liegen also keine Extrema vor, da die notwendige Bedingung verletzt ist.

Es gilt $f(x, y) = |x + y| \geq 0$ und $f(x, -x) = 0$. Also nimmt f auf der Geraden $y = -x \Leftrightarrow x + y = 0$ den global kleinsten Funktionswert an.

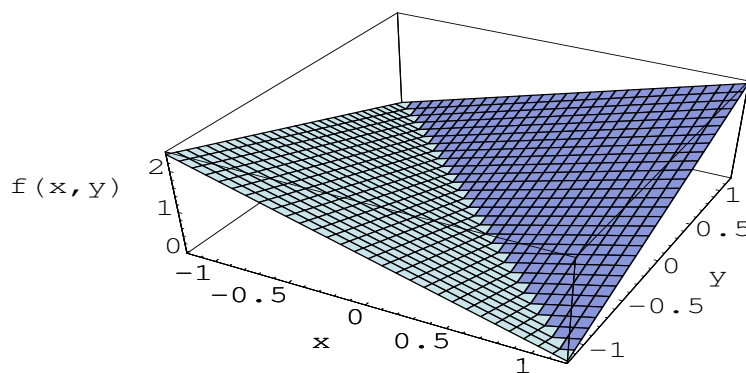


Bild 15 d): $f(x, y) = |x + y|$

Lösung 16:

a) $\text{grad } f(x, y) = (4x(8x^2 - 5y), -10x^2 + 6y)^T = 0$

1. Fall: $x = 0 \Rightarrow 6y = 0 \Rightarrow$ stationärer Punkt $(x_0, y_0) = (0, 0)$.

2. Fall: $8x^2 - 5y = 0 \Rightarrow y = 8x^2/5 \Rightarrow -10x^2 + 6 \cdot 8x^2/5 = 0 \Rightarrow x = 0$

Einzigster stationärer Punkt ist also $(0, 0)$.

b) $\mathbf{H}f(x, y) = \begin{pmatrix} 96x^2 - 20y & -20x \\ -20x & 6 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{H}f(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$

ist positiv semidefinit, und das hinreichende Kriterium ist nicht anwendbar.

Die notwendige Bedingung II lässt für den stationären Punkt $(x_0, y_0) = (0, 0)$ noch die Möglichkeiten Minimum oder Sattelpunkt zu.

c) Auf der Geraden $x = 0$ wird die Funktion beschrieben durch

$$g(y) := f(0, y) = 3y^2.$$

Für $y = 0$ besitzt g ein striktes lokales Minimum.

Alle anderen Ursprungsgeraden können durch $y = ax$ mit $a \in \mathbb{R}$ dargestellt werden, und die Funktion wird dann durch

$$h(x) := f(x, ax) = 8x^4 - 10ax^3 + 3a^2x^2$$

beschrieben. Für $a = 0$ wird h in $x = 0$ minimal. Für $a \neq 0$ erhält man in $x = 0$ auch ein Minimum, denn es gilt

$$h'(x) = 32x^3 - 30ax^2 + 6a^2x \Rightarrow h'(0) = 0$$

und

$$h''(x) = 96x^2 - 60ax + 6a^2 \Rightarrow h''(0) = 6a^2 > 0.$$

d) Auf der Parabel $y = ax^2$ hat die Funktion die Gestalt

$$p(x) := f(x, ax^2) = 8x^4 - 10ax^4 + 3a^2x^4 = x^4(3a^2 - 10a + 8) = x^4(a - 2)(3a - 4).$$

Damit erhält man

$$\begin{aligned} p'(x) &= 4x^3(a - 2)(3a - 4) \Rightarrow p'(0) = 0 \\ p''(x) &= 12x^2(a - 2)(3a - 4) \Rightarrow p''(0) = 0 \\ p'''(x) &= 24x(a - 2)(3a - 4) \Rightarrow p'''(0) = 0 \\ p''''(x) &= 24(a - 2)(3a - 4) \Rightarrow p''''(0) = 24(a - 2)(3a - 4). \end{aligned}$$

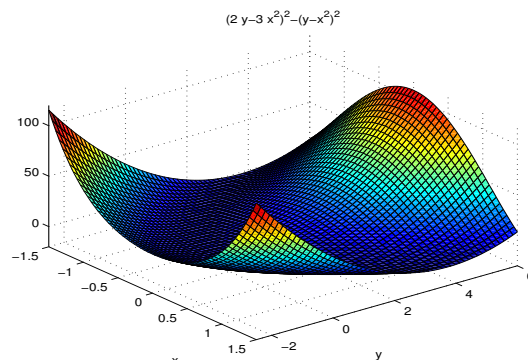
Für $a \in]4/3, 2[$ ist $p''''(0) < 0$ und in $x = 0$ liegt ein striktes Maximum vor.

Für $a \notin [4/3, 2]$ ist $p''''(0) > 0$ und in $x = 0$ liegt ein striktes Minimum vor.

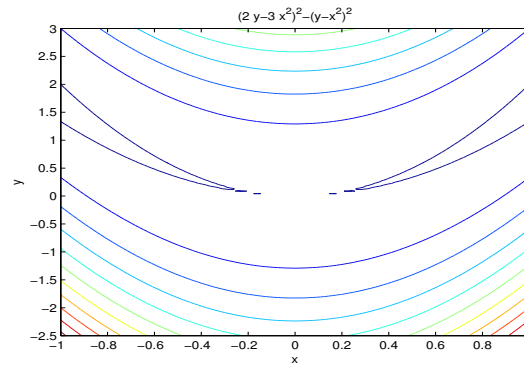
Bei dem stationären Punkt $(0, 0)$ handelt es sich also um einen Sattelpunkt.

Hätte man gewusst, dass $f(x, y) = (2y - 3x^2)^2 - (y - x^2)^2$ gilt, hätte man auf der Ursprungsparabel $2y - 3x^2 = 0$ in $x = 0$ sofort ein Maximum und auf $y - x^2 = 0$ in $x = 0$ sofort ein Minimum erkannt und hätte dann sofort auf den Sattelpunkt schließen können.

e)



`ezsurf('8*x^4-10*x^2*y+3*y^2', [-1.5, 1.5, -2.5, 6])`



`ezcontour('8*x^4-10*x^2*y+3*y^2', [-1,1,-2.5,3])`

Bild 16 $f(x, y) = 8x^4 - 10x^2y + 3y^2$

Lösung 17:

$$f(x, y) := x^3 + y^3 - xy = 0, \quad \text{grad } f(x, y) = (3x^2 - y, 3y^2 - x)^T$$

- a) Die Kurve ist symmetrisch zur Winkelhalbierenden, d.h. es gilt $f(x, y) = f(y, x)$. Wir erinnern uns dabei an die Spiegelungsmatrix $\mathbb{S}_\alpha$:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \cos(2 \cdot \pi/4) & \sin(2 \cdot \pi/4) \\ \sin(2 \cdot \pi/4) & -\cos(2 \cdot \pi/4) \end{pmatrix}}_{=\mathbb{S}_{\pi/4}} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix}.$$

- b) Kurvenpunkte mit horizontaler Tangente ergeben sich aus den Bedingungen

$$f_x(x, y) = 0 \quad \wedge \quad f(y, x) = 0 \quad \wedge \quad f_y(x, y) \neq 0.$$

$$0 = f_x(x, y) = 3x^2 - y \quad \Rightarrow \quad y = 3x^2 \quad \Rightarrow$$

$$0 = f(x, 3x^2) = x^3 + (3x^2)^3 - x3x^2 = x^3(27x^3 - 2)$$

$$\Rightarrow \quad x = 0 \vee x = \frac{2^{1/3}}{3}$$

$$\Rightarrow \quad P_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad P_1 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2^{1/3} \\ 2^{2/3} \end{pmatrix}.$$

Nur für P_1 gilt die Bedingung $f_y(P_1) \neq 0$. Also ist P_1 ein Punkt mit horizontaler Tangente.

- c) Kurvenpunkte mit vertikaler Tangente ergeben sich aus den Bedingungen

$$f_y(x, y) = 0 \quad \wedge \quad f(x, y) = 0 \quad \wedge \quad f_x(x, y) \neq 0.$$

$$\begin{aligned}
 0 &= f_y(x, y) = 3y^2 - x \Rightarrow x = 3y^2 \Rightarrow \\
 0 &= f(3y^2, y) = (3y^2)^3 + y^3 - 3y^2y = y^3(27y^3 - 2) \\
 \Rightarrow y &= 0 \vee y = \frac{2^{1/3}}{3}
 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow P_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, P_2 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2^{2/3} \\ 2^{1/3} \end{pmatrix}.$$

Nur für P_2 gilt die Bedingung $f_x(P_2) \neq 0$. Also ist P_2 ein Punkt mit vertikaler Tangente. Dieses ergibt sich auch ohne Rechnung aus der Symmetrie.

d) Für $P_0 = (0, 0)^T$ gilt $\text{grad}f(0, 0) = \mathbf{0}$, damit ist P_0 ein singulärer Punkt.

$$\mathbf{H}f(x, y) = \begin{pmatrix} 6x & -1 \\ -1 & 6y \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{H}f(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Wegen $\det \mathbf{H}f(0, 0) = -1 < 0$ handelt es sich bei P_0 um einen Doppelpunkt.

e)

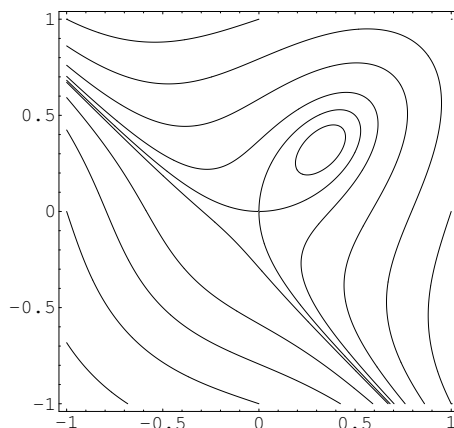
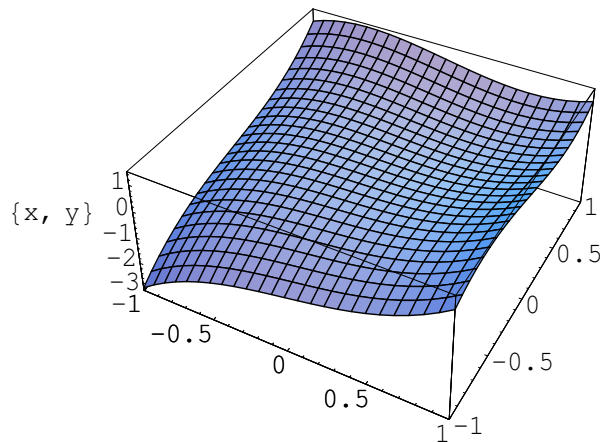


Bild 17 $f(x, y) = x^3 + y^3 - xy = c$ für $c = -2, -1, -0.5, -0.2, -0.025, 0, 0.05, 0.2, 0.5, 1$

Lösung 18:

- a) Durch quadratische Ergänzungen kann
- h
- übersichtlicher dargestellt werden:

$$h(x, y, z) = z^2 + y^2 - x^2 + 4z - 2x + 3 = (z + 2)^2 + y^2 - (x + 1)^2$$

Wegen $h(-1, 1, -2) = 1$ stellt sich die Niveaumenge als einschaliges Hyperboloid heraus und wird damit durch die standardisierte implizite Gleichung

$$g(x, y, z) := (z + 2)^2 + y^2 - (x + 1)^2 - 1 = 0$$

beschrieben. Um festzustellen, ob $g(x, y, z) = 0$ in der Umgebung des Punktes $(-1, 1, -2)$ eine glatte Fläche bildet muss die Voraussetzung des Satzes über implizite Funktionen überprüft werden:

$$\text{grad } g(x, y, z) = (-2(x + 1), 2y, 2(z + 2))^T \Rightarrow \text{grad } g(-1, 1, -2) = (0, 2, 0)^T.$$

Damit ist nur $g_y(-1, 1, -2) = 2$ invertierbare 1×1 Untermatrix. Nach dem Satz über implizite Funktionen bildet die Niveaumenge also eine glatte Fläche, die durch Auflösen von $g(x, y, z) = 0$ nach y beschreibbar ist, d.h. es gilt in einer Umgebung von $(-1, 1, -2)$

$$y = f(x, z), \quad \text{mit} \quad f(-1, -2) = 1 \quad \text{und} \quad g(x, f(x, z), z) = 0.$$

- b) Auflösen der impliziten Gleichung
- $g(x, y, z) = 0$
- ergibt zunächst

$$y = \pm \sqrt{1 + (x + 1)^2 - (z + 2)^2}.$$

Aus diesen beiden Möglichkeiten folgt wegen $y = f(-1, -2) = 1$

$$f(x, z) = \sqrt{1 + (x + 1)^2 - (z + 2)^2}.$$

- c) In
- $(-1, 1, -2)$
- wird die Fläche
- f
- näherungsweise beschrieben durch die zugehörige Tangentialebene
- T_1
- , in vektorwertiger Schreibweise bedeutet dies:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ f(x, z) \\ z \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} x \\ T_1(x, z; -1, -2) \\ z \end{pmatrix}$$

Zur Darstellung der Tangentialebene wird die durch implizites Differenzieren der Gleichung $g(x, f(x, z), z) = 0$ mittels Kettenregel entstehende Jacobimatrix von f benötigt:

$$\begin{aligned} \mathbf{J}f(x, z) &= (f_x, f_z) = -(g_y)^{-1}(g_x, g_z) \\ &= -\frac{1}{2y}(-2x - 2, 2z + 4) \\ \Rightarrow \mathbf{J}f(-1, -2) &= -\frac{1}{2 \cdot 1}(0, 0) = (0, 0). \end{aligned}$$

Damit lautet die Parameterform der Tangentialebene

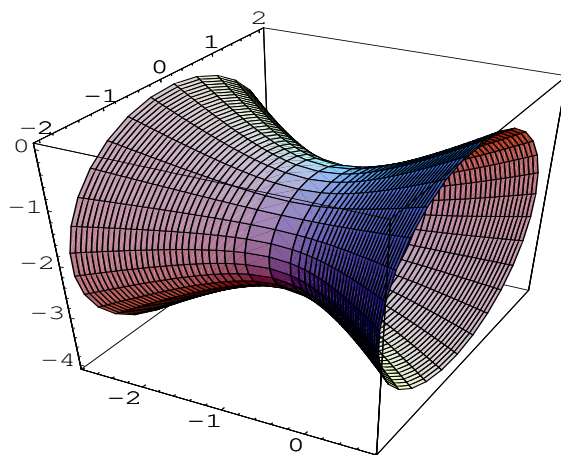
$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x \\ T_1(x, z; -1, -2) \\ z \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} x \\ f(-1, -2) + \mathbf{J}f(-1, -2) \begin{pmatrix} x+1 \\ z+2 \end{pmatrix} \\ z \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x \\ 1 \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + (x+1) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + (z+2) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

d) Unter Verwendung von Polarkoordinaten kann die Fläche

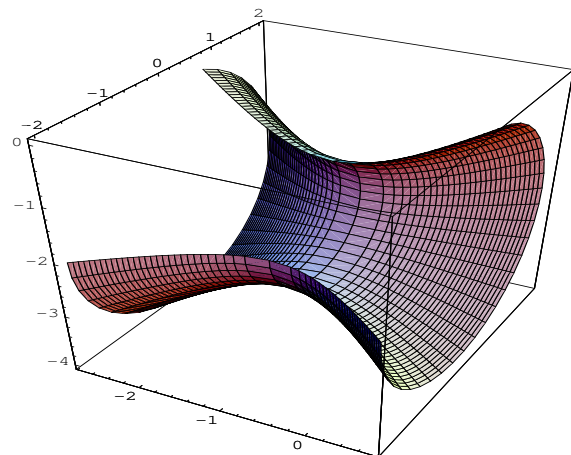
$$h(x, y, z) = (z+2)^2 + y^2 - (x+1)^2 = 1$$

folgendermaßen durch $(r, \varphi) \in [1, R] \times [0, 2\pi]$ parametrisiert werden:

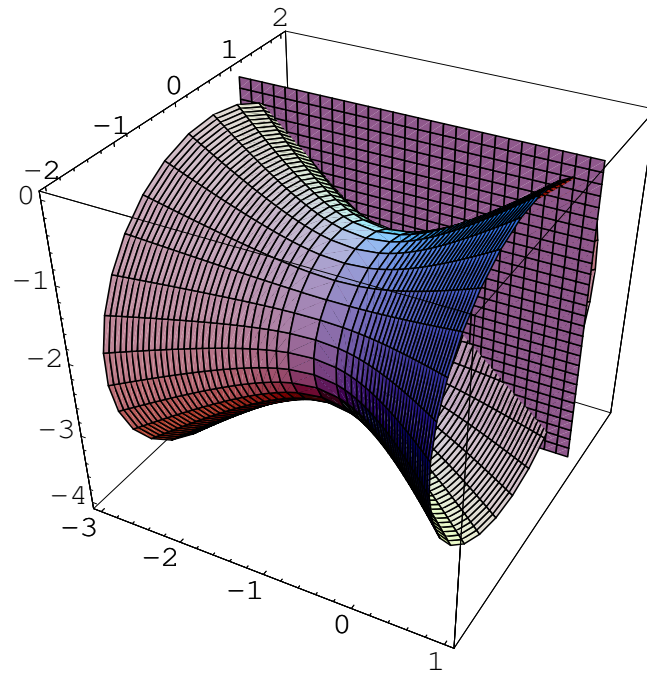
$$y = r \cos \varphi, \quad z = r \sin \varphi - 2 \Rightarrow p_{\pm}(r, \varphi) = \begin{pmatrix} -1 \pm \sqrt{r^2 - 1} \\ r \cos \varphi \\ r \sin \varphi - 2 \end{pmatrix}$$



ohne Tangentialebene



aufgeschnitten



mit Tangentialebene

Bild 18 einschaliges Hyperboloid $(z + 2)^2 + y^2 - (x + 1)^2 = 1$

Lösung 19:

Unter der Nebenbedingung $g(x, y) := x^2 + y^2 - 1 = 0$ sollen die Extrempunkte der Funktion $f(x, y) = x + y$ bestimmt werden.

a) Regularitätsbedingung:

$$\text{grad } g(x, y) = (2x, 2y) = (0, 0) \Rightarrow (x, y) = (0, 0)$$

Da $g(0, 0) = -1$ gilt, $(0, 0)$ also nicht auf dem Kreis liegt, erfüllen alle zulässigen Punkte $(g(x, y) = 0)$ die Regularitätsbedingung

$$\text{Rang}(\mathbf{J}g(x, y)) = 1.$$

Lagrange-Funktion: $F(x, y) = x + y + \lambda(x^2 + y^2 - 1)$

Lagrange-Multiplikatorenregel:

$$\begin{pmatrix} \nabla F(x, y) \\ g(x, y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + 2\lambda x \\ 1 + 2\lambda y \\ x^2 + y^2 - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Multipliziert man die erste Gleichung mit y und die zweite mit x und subtrahiert beide, so erhält man $x - y = 0 \Rightarrow x = y$.

Aus der dritten Gleichung ergibt sich dann $x^2 + x^2 = 1$

$$\Rightarrow x_{1,2} = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad y_{1,2} = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Extremalkandidaten:

$$P_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad P_2 = -\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Da die Menge $g(x, y) = 0$ einen Kreis beschreibt, ist sie kompakt. Damit nimmt die stetige Funktion f auf $g(x, y) = 0$ Maximum und Minimum an. Es ist $f(P_1) = \sqrt{2}$ und $f(P_2) = -\sqrt{2}$. Also ist P_1 Maximum und P_2 Minimum.

Alternative Begründung über die hinreichende Bedingung 2. Ordnung:

Für die Extremalkandidaten $P_{1,2}$ wird die Definitheitseigenschaft der Hesse-Matrix

$$\text{Hess}F(x, y) = \begin{pmatrix} 2\lambda & 0 \\ 0 & 2\lambda \end{pmatrix}$$

auf dem Kern von $\mathbf{J}g(x, y) = \text{grad } g(x, y) = (2x, 2y)$ überprüft.

$$P_{1,2} = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1)^T \Rightarrow \mathbf{J}g(P_{1,2}) = \pm(\sqrt{2}, \sqrt{2}) \Rightarrow TG(P_{1,2}) = \text{spann} \left\{ \mathbf{y} := \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

Aus $1 + 2\lambda x = 0$ erhält man $\lambda_1 = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ für P_1 und $\lambda_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}$ für P_2 .

Damit ergibt sich

$$\text{Hess}F(P_1) = \begin{pmatrix} -\sqrt{2} & 0 \\ 0 & -\sqrt{2} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \text{Hess}F(P_2) = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

Wegen $\mathbf{y}^T \text{Hess}F(P_1) \mathbf{y} = -2\sqrt{2} < 0$ ist P_1 ein strenges lokales Maximum. Für P_2 erhält man $\mathbf{y}^T \text{Hess}F(P_2) \mathbf{y} = 2\sqrt{2} > 0$. Damit ist P_2 ein strenges lokales Minimum.

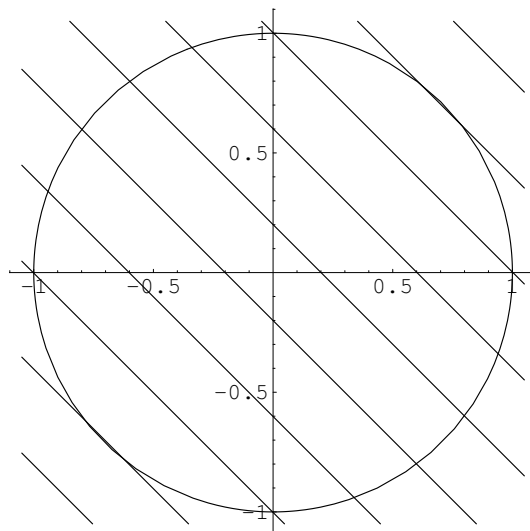


Bild 19 a) Nebenbedingung $g(x, y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$ mit
Höhenlinien der Funktion $f(x, y) = x + y$

- b) Der Kreis $g(x, y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$ kann durch Polarkoordinaten parametrisiert werden

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix} =: \mathbf{c}(t), \quad 0 \leq t < 2\pi,$$

d.h. es gilt $g(\cos t, \sin t) = 0$. Man muss jetzt also nur noch die Extrema der Funktion

$$h(t) := f(\mathbf{c}(t)) = \cos t + \sin t$$

finden.

$$h'(t) = -\sin t + \cos t = 0 \quad \Rightarrow \quad t_1 = \frac{\pi}{4}, \quad t_2 = \frac{5\pi}{4}$$

$$h''(t) = -\cos t - \sin t \quad \Rightarrow \quad h''(t_1) = -\sqrt{2} < 0, \quad h''(t_2) = \sqrt{2}.$$

Damit liegt für $t_1 = \pi/4$ ein Maximum mit dem Funktionswert $h(t_1) = \sqrt{2}$ und für $t_2 = 5\pi/4$ ein Minimum mit dem Funktionswert $h(t_2) = -\sqrt{2}$ vor.

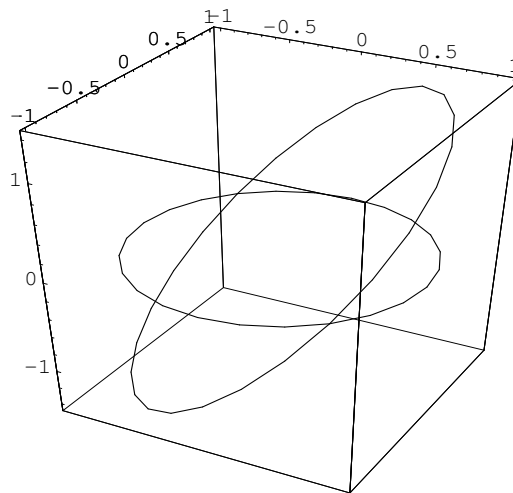


Bild 19 b) $\mathbf{c}(t)$ und $f(\mathbf{c}(t)) = \cos t + \sin t$

Lösung 20:

Nebenbedingungen: $g_1(x, y, z) := x^2 + y^2 - 9$ und $g_2(x, y, z) = y - z$.

Regularitätsbedingung: $\mathbf{J}g(x, y, z) = \begin{pmatrix} 2x & 2y & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

besitzt den Rang < 2 , wenn die erste Zeile gleich dem Nullvektor ist, d.h. für die Punkte $(0, 0, z)$. Diese sind wegen $g_1(0, 0, z) = -9$ jedoch nicht zulässig.

Alle zulässigen Punkte erfüllen also die Regularitätsbedingung und die Lagrangesche Multiplikatorregel kann angewendet werden:

Lagrange-Funktion: $F(x, y, z) = z^2 + \lambda_1(x^2 + y^2 - 9) + \lambda_2(y - z)$

Lagrange-Multiplikatorenregel:

$$\begin{pmatrix} \nabla F(x, y, z) \\ g(x, y, z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\lambda_1 x \\ 2\lambda_1 y + \lambda_2 \\ 2z - \lambda_2 \\ x^2 + y^2 - 9 \\ y - z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

1. Gleichung:

1.Fall: $x = 0 \Rightarrow 0 = g_1(0, y, z) = y^2 - 9 \Rightarrow y = 3 = z \vee y = -3 = z$

Extremalkandidaten: $P_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}, P_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix}$

2.Fall: $\lambda_1 = 0 \Rightarrow \lambda_2 = 0 \Rightarrow z = 0 = y \Rightarrow x = 3 \vee x = -3$

Extremalkandidaten: $P_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, P_4 = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Die stetige Funktion f nimmt auf dem Schnitt des Zylinders $x^2 + y^2 = 9$ mit der Ebene $y = z$ ihr absolutes Maximum und Minimum an, da diese Schnittmenge eine Ellipse und damit kompakt ist. Unter den Extremalkandidaten befinden sich also absolutes Maximum und Minimum.

Für die Funktionswerte der Extremalkandidaten berechnet man

$$f(P_{1,2}) = 9, \quad f(P_{3,4}) = 0.$$

Also sind $P_{1,2}$ absolute Maxima und $P_{3,4}$ absolute Minima.

Alternative Begründung über die hinreichende Bedingung 2. Ordnung:

Für die Extremalkandidaten $P_{1,2,3,4}$ wird die Definitheitseigenschaft der Hesse-Matrix

$$\text{Hess}F(x, y) = \begin{pmatrix} 2\lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & 2\lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

auf dem Kern von $\mathbf{J}g(x, y) = \begin{pmatrix} 2x & 2y & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ überprüft.

Für $P_{1,2}$ erhält man

$$P_{1,2} = \pm(0, 3, 3)^T \Rightarrow \mathbf{Jg}(P_{1,2}) = \begin{pmatrix} 0 & \pm 6 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow TG(P_{1,2}) = \text{spann} \left\{ \mathbf{y} := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$0 = 2z - \lambda_2 = \pm 6 - \lambda_2 \Rightarrow \lambda_2 = \pm 6 \Rightarrow 0 = 2\lambda_1 y + \lambda_2 = \pm 6\lambda_1 \pm 6 \Rightarrow \lambda_1 = -1$$

Damit ergeben sich $P_{1,2}$ als strenge lokale Maxima, denn

$$\text{Hess}F(P_{1,2}) = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{y}^T \text{Hess}F(P_{1,2}) \mathbf{y} = -2 < 0.$$

Für $P_{3,4}$ mit $\lambda_1 = 0 = \lambda_2 = 0$ erhält man

$$P_{3,4} = (\pm 3, 0, 0)^T \Rightarrow \mathbf{Jg}(P_{3,4}) = \begin{pmatrix} \pm 6 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow TG(P_{3,4}) = \text{spann} \left\{ \mathbf{y} := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Damit ergeben sich $P_{3,4}$ als strenge lokale Minima, denn

$$\text{Hess}F(P_{3,4}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{y}^T \text{Hess}F(P_{3,4}) \mathbf{y} = 2 > 0.$$

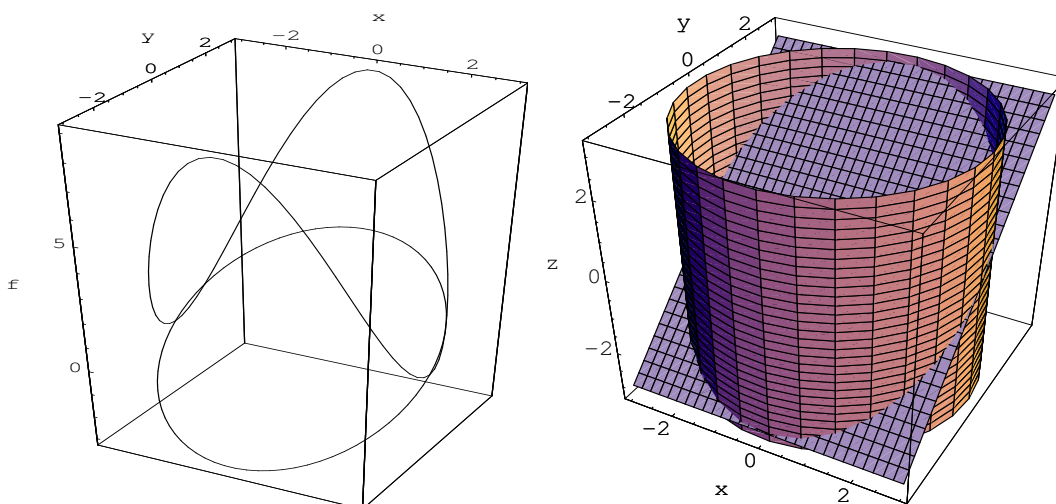


Bild 20: f auf dem Schnitt des Zylinders $x^2 + y^2 = 9$ mit der Ebene $y = z$

Lösung 21:

$$\text{a) } \nabla f(x, y) = \mathbf{F}(x, y) = \begin{pmatrix} 2(x + y) + \sinh(x) \\ 2(x + y) - \sin(y + 1) \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{H}f(x, y) = \mathbf{JF}(x, y) = \begin{pmatrix} 2 + \cosh(x) & 2 \\ 2 & 2 - \cos(y + 1) \end{pmatrix}$$

b) Das Newton-Verfahren

$$\mathbf{JF}(\mathbf{x}^k) \Delta \mathbf{x}^k = -\mathbf{F}(\mathbf{x}^k)$$

mit $\mathbf{x}^k = (x_k, y_k)^T$ und $\Delta \mathbf{x}^k = (x_{k+1} - x_k, y_{k+1} - y_k)^T$ sowie $\mathbf{x}^{k+1} = \mathbf{x}^k + \Delta \mathbf{x}^k$ lautet hier:

$$\begin{pmatrix} 2 + \cosh(x_k) & 2 \\ 2 & 2 - \cos(y_k + 1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{k+1} - x_k \\ y_{k+1} - y_k \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 2(x_k + y_k) + \sinh(x_k) \\ 2(x_k + y_k) - \sin(y_k + 1) \end{pmatrix}.$$

c) function [x] = newtonverfahren(n)

```
%-----
% Berechnet die Lösung des nichtlinearen Gleichungssystems
%
%   grad f(x)=0
%
% mit Hilfe des Newtonverfahrens.
%
% Input:           n   Anzahl der Iterationen
%
% Output:          x   Lösung
%
% Kai Rothe, Oktober-2007.
%-----
%
% Startwert
%
format long
x= [0 0]';
%
% Newtoniteration
%
for i=1:n
%
% Berechnung der Newtondaten
%
[A,b]=newtondaten(x);
%
```

```
% Lösen des Gleichungssystems
%
d= linsolve(A,b);
%
% Berechnung der nächsten Iterierten
%
x=x+d
end

function [A,b] = newtondaten(x)
%-----
% Für das Newtonverfahren zur Lösung von
%
%      grad f = 0
%
% werden die Daten bereitgestellt.
%
% Input:  x = Wert für den die Newton Daten berechnet werden.
%
% Output: A = Hess f(x)
%          b = -grad f(x)
%
% Kai Rothe, Oktober-2007.
%-----
% f= @(x,y) (x+y)^2+cosh(x)+cos(y+1)
%-----
%
fx= @(x,y) (2*(x+y)+sinh(x));
fy= @(x,y) (2*(x+y)-sin(y+1));
fxx= @(x,y) (2+cosh(x));
fyy= @(x,y) (2-cos(y+1));
fxy= @(x,y) (2);
%
% rechte Seite:
%
b(1)=-fx(x(1),x(2));
b(2)=-fy(x(1),x(2));
b=b';
%
% Newtonmatrix
%
A(1,1)=fxx(x(1),x(2));
A(1,2)=fxy(x(1),x(2));
A(2,1)=fxy(x(1),x(2));
A(2,2)=fyy(x(1),x(2));
```

```
%
end
```

d) Der MATLAB-Funktionsaufruf:

```
newtonverfahren(10)
```

k	x_k	y_k
0	0.000000000 00000	0.000000000 00000
1	-4.439389816 82513	6.659084725 23770
2	-3.449060735 74839	3.648025573 49758
3	-2.394655233 59035	1.950288881 70317
4	-1.489158729 03652	1.704755385 99186
5	-0.920832169 34858	1.310834722 92832
6	-0.763781704 52020	1.177842461 21565
7	-0.753841072 54155	1.167468313 38200
8	-0.753797371 39895	1.167416903 97919
9	-0.753797370 45256	1.167416902 81365
10	-0.753797370 45256	1.167416902 81365

e) Die Hessematrix

$$\mathbf{H}f(-0.753797370, 1.167416902) = \begin{pmatrix} 3.297815268 & 2 \\ 2 & 2.561850095 \end{pmatrix}$$

ist im stationären Punkt positiv definit, da ihre Hauptunterdeterminanten positiv sind. Der gefundene stationäre Punkt ist also ein Minimum.

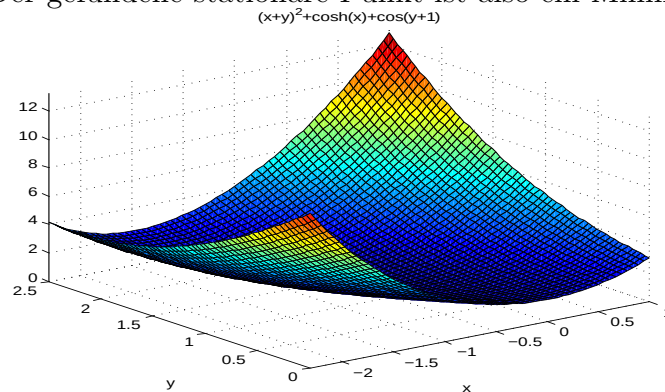


Bild 21 a)

```
ezsurf('(x+y)^2+cosh(x)+cos(y+1)', [-2.3 1.0 0. 2.5])
```

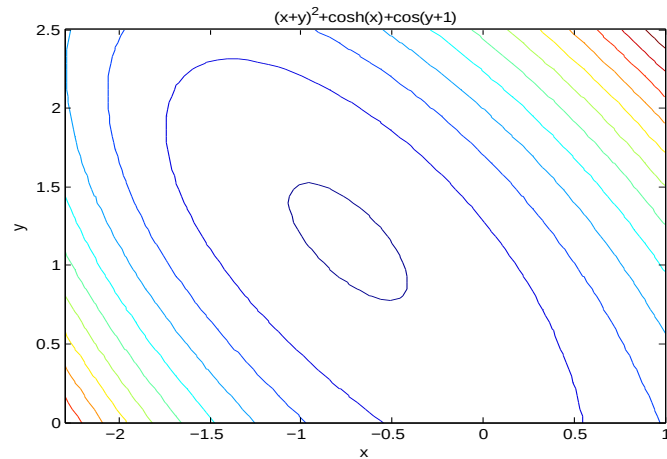


Bild 21 b)

`ezcontour('(x+y)^2+cosh(x)+cos(y+1)', [-2.3 1.0 0. 2.5])`

Lösung 22:

$$\begin{aligned}
 \text{a)} \quad U_f(Z) &= \sum_{i,j=1}^n \inf_{(x,y) \in Q_{i,j}} (f(x,y)) \cdot \text{Vol}(Q_{i,j}) \\
 &= \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n \left(2 - \frac{2i}{n} \right) \cdot \frac{2}{n^2} \right) = \frac{4}{n^2} \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n \left(1 - \frac{i}{n} \right) \right) \\
 &= \frac{4}{n^2} \sum_{i=1}^n (n - i) = \frac{4}{n^2} \left(n^2 - \frac{n(n+1)}{2} \right) \\
 &= \frac{2(n^2 - n)}{n^2} = 2 \left(1 - \frac{1}{n} \right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 O_f(Z) &= \sum_{i,j=1}^n \sup_{(x,y) \in Q_{i,j}} (f(x,y)) \cdot \text{Vol}(Q_{i,j}) \\
 &= \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n \left(2 - \frac{2(i-1)}{n} \right) \cdot \frac{2}{n^2} \right) = 2 \left(1 + \frac{1}{n} \right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{b)} \quad \int_Q f(x,y) d(x,y) &= \int_0^1 \left(\int_0^2 2 - x dx \right) dy = \int_0^1 2x - \frac{x^2}{2} \Big|_0^2 dy \\
 &= \int_0^1 2 dy = 2y \Big|_0^1 = 2
 \end{aligned}$$

Man erhält natürlich:

$$2 \left(1 - \frac{1}{n}\right) = U_f(Z) \leq \int_Q f(x, y) d(x, y) = 2 \leq O_f(Z) = 2 \left(1 + \frac{1}{n}\right).$$

Lösung 23:

$$\begin{aligned} \text{a) } \int_{\pi}^{2\pi} \int_0^{\pi} \cos(x+y) dx dy &= \int_{\pi}^{2\pi} \sin(x+y)|_0^{\pi} dy = \int_{\pi}^{2\pi} \sin(\pi+y) - \sin y dy \\ &= (\cos y - \cos(\pi+y))|_{\pi}^{2\pi} = 4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } \int_0^2 \int_0^1 x^2 - 3y + 1 dx dy &= \int_0^2 x^3/3 - 3yx + x|_0^1 dy \\ &= \int_0^2 4/3 - 3y dy = 4y/3 - 3y^2/2|_0^2 \\ &= 8/3 - 12/2 = -10/3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_0^1 \int_0^2 x^2 - 3y + 1 dy dx &= \int_0^1 x^2 y - 3y^2/2 + y|_0^2 dx \\ &= \int_0^1 2x^2 - 4 dx = 2x^3/3 - 4x|_0^1 \\ &= 2/3 - 4 = -10/3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c) } \int_Q \frac{y^2 - x}{xy^2} d(x, y) &= \int_1^2 \int_1^e \frac{y^2 - x}{xy^2} dx dy = \int_1^2 \int_1^e \frac{1}{x} - \frac{1}{y^2} dx dy \\ &= \int_1^2 \ln|x| - \frac{x}{y^2} \Big|_1^e dy = \int_1^2 1 - \frac{e-1}{y^2} dy \\ &= y + \frac{e-1}{y} \Big|_1^2 = 1 + (e-1) \left(\frac{1}{2} - 1\right) = \frac{3-e}{2} \end{aligned}$$

Lösung 24:

$$\begin{aligned}
\text{a) } \int_2^9 \int_0^3 \int_0^1 \frac{x^6 \sqrt{y+1}}{z-1} dx dy dz &= \int_2^9 \int_0^3 \int_0^1 \frac{\sqrt{y+1}}{z-1} \cdot x^6 dx dy dz \\
&= \int_2^9 \int_0^3 \frac{\sqrt{y+1}}{z-1} \left(\int_0^1 x^6 dx \right) dy dz \\
&= \left(\int_0^1 x^6 dx \right) \cdot \left(\int_2^9 \int_0^3 \frac{\sqrt{y+1}}{z-1} dy dz \right) \\
&= \left(\int_0^1 x^6 dx \right) \cdot \left(\int_2^9 \frac{1}{z-1} \left(\int_0^3 \sqrt{y+1} dy \right) dz \right) \\
&= \left(\int_0^1 x^6 dx \right) \cdot \left(\int_0^3 \sqrt{y+1} dy \right) \cdot \left(\int_2^9 \frac{1}{z-1} dz \right) \\
&= \left(\frac{x^7}{7} \Big|_0^1 \right) \cdot \left(\frac{2}{3} (y+1)^{3/2} \Big|_0^3 \right) \cdot (\ln |z-1| \Big|_2^9) \\
&= \frac{1}{7} \cdot \frac{2}{3} \cdot 7 \cdot \ln(8) = \ln(4)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{b) } \int_Q \sinh z + \frac{6z^2}{(2x+y)^2} d(x,y,z) &= \int_1^2 \int_0^1 \int_{-1}^1 \sinh z + \frac{6z^2}{(2x+y)^2} dz dy dx \\
&= \int_1^2 \int_0^1 \left(\cosh z + \frac{2z^3}{(2x+y)^2} \right) \Big|_{-1}^1 dy dx \\
&= \int_1^2 \int_0^1 \frac{4}{(2x+y)^2} dy dx = \int_1^2 -\frac{4}{2x+y} \Big|_0^1 dx \\
&= \int_1^2 -\frac{4}{2x+1} + \frac{2}{x} dx = (-2 \ln |2x+1| + 2 \ln |x|) \Big|_1^2 \\
&= -2 \ln 5 + 2 \ln 2 + 2 \ln 3 = \ln \frac{36}{25}
\end{aligned}$$

Lösung 25:

a) Die Geraden durch folgende Punkte lauten:

$$P_1, P_3: g(x) = (x+4)/3, \quad P_1, P_2: f_1(x) = -x, \quad P_2, P_3: f_2(x) = x.$$

$$D = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid -1 \leq x \leq 2, |x| \leq y \leq (x+4)/3 \right\}$$

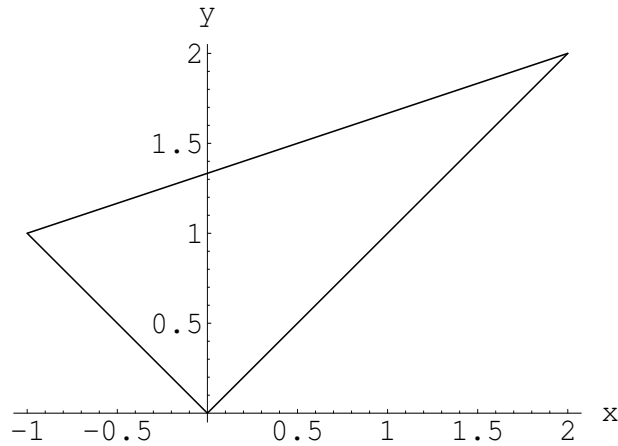


Bild 25 Dreieck D

$$\begin{aligned} \text{b) } \int_D 18y \, d(x, y) &= \int_{-1}^2 \int_{|x|}^{(x+4)/3} 18y \, dy \, dx = \int_{-1}^2 9y^2 \Big|_{|x|}^{(x+4)/3} dx \\ &= \int_{-1}^2 (x+4)^2 - 9x^2 \, dx = \frac{(x+4)^3}{3} - 3x^3 \Big|_{-1}^2 = 36 \end{aligned}$$

Lösung 26:

a) $x \leq 0$, $z \geq 1$, $z \leq 3$ und $x^2 + y^2 = 4$ beschreibt einen halben Zylinder

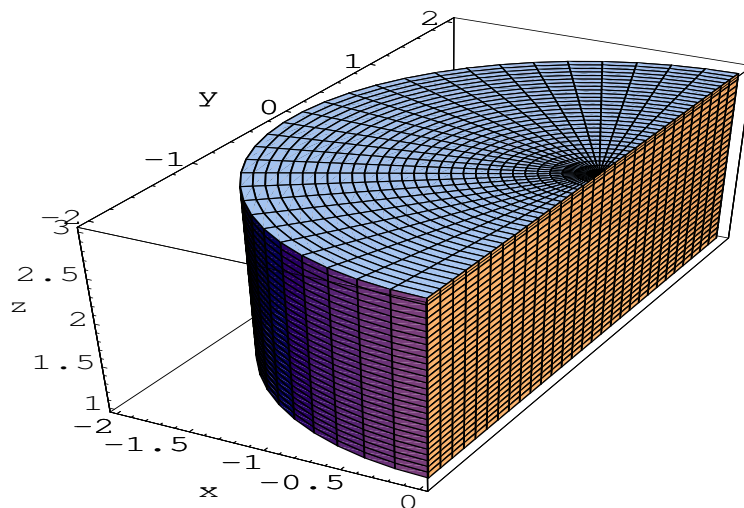


Bild 26 halber Zylinder Z

$$Z = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid -2 \leq x \leq 0, -\sqrt{4-x^2} \leq y \leq \sqrt{4-x^2}, 1 \leq z \leq 3 \right\}$$

b)

$$\begin{aligned} \int_Z 3x \, d(x, y, z) &= \int_{-2}^0 \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} \int_1^3 3x \, dz \, dy \, dx \\ &= \int_1^3 dz \int_{-2}^0 \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} 3x \, dy \, dx \\ &= 2 \int_{-2}^0 3xy \Big|_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} dx = 2 \int_{-2}^0 6x\sqrt{4-x^2} \, dx \\ &= -4(4-x^2)^{3/2} \Big|_{-2}^0 = -32 \end{aligned}$$

oder alternativ mit Transformation auf Zylinderkoordinaten:

$$\begin{aligned} \int_Z 3x \, d(x, y, z) &= \int_1^3 \int_{\pi/2}^{3\pi/2} \int_0^2 3r \cos(\varphi) r \, dr \, d\varphi \, dz \\ &= \int_0^2 3r^2 \, dr \int_{\pi/2}^{3\pi/2} \cos(\varphi) \, d\varphi \int_1^3 dz \\ &= \left(r^3 \Big|_0^2 \right) \left(\sin(\varphi) \Big|_{\pi/2}^{3\pi/2} \right) \left(z \Big|_1^3 \right) \\ &= 8 \cdot (-2) \cdot 2 = -32 \end{aligned}$$

Lösung 27:

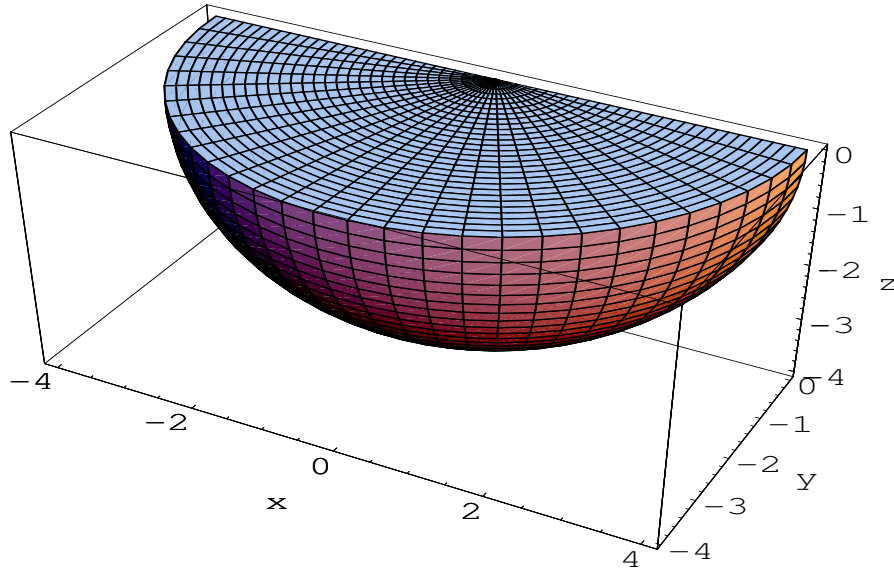


Bild 27 Viertelkugel K

Kugelkoordinaten für K : $0 \leq r \leq 4$, $\pi \leq \varphi \leq 2\pi$, $-\pi/2 \leq \theta \leq 0$ mit

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cos(\varphi) \cos(\theta) \\ r \sin(\varphi) \cos(\theta) \\ r \sin(\theta) \end{pmatrix} = \Phi(r, \varphi, \theta), \quad \det \mathbf{J}\Phi(r, \varphi, \theta) = r^2 \cos(\theta)$$

Berechnung der Masse M in Kugelkoordinaten unter Verwendung des Transformationssatzes mit $\rho(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 + 1$:

$$\begin{aligned} M &= \int_K x^2 + y^2 + z^2 + 1 \, d(x, y, z) = \int_0^4 \int_\pi^{2\pi} \int_{-\pi/2}^0 (r^2 + 1) r^2 \cos(\theta) \, d\theta \, d\varphi \, dr \\ &= \int_0^4 \int_\pi^{2\pi} r^4 + r^2 \, d\varphi \, dr = \int_0^4 \pi(r^4 + r^2) \, dr = \left. \frac{(3 \cdot r^5 + 5 \cdot r^3)\pi}{15} \right|_0^4 = \frac{3392\pi}{15} \end{aligned}$$

Berechnung der Schwerpunktkoordinaten (x_s, y_s, z_s) :

$$\begin{aligned}
 x_s &= \frac{1}{M} \int_K (x^2 + y^2 + z^2 + 1)x \, d(x, y, z) \\
 &= \frac{1}{M} \int_0^4 \int_\pi^{2\pi} \int_{-\pi/2}^0 (r^2 + 1)r \cos(\varphi) \cos(\theta) r^2 \cos(\theta) \, d\theta \, d\varphi \, dr \\
 &= \frac{1}{M} \int_0^4 \int_\pi^{2\pi} (r^5 + r^3) \cos(\varphi) \left. \frac{\theta + \sin(\theta) \cos(\theta)}{2} \right|_{-\pi/2}^0 d\varphi \, dr \\
 &= \frac{\pi}{4M} \int_0^4 (r^5 + r^3) \sin(\varphi) \Big|_\pi^{2\pi} dr = 0
 \end{aligned}$$

Dies Ergebnis ergibt sich auch auf Grund der Symmetrie.

$$\begin{aligned}
 y_s &= \frac{1}{M} \int_K (x^2 + y^2 + z^2 + 1)y \, d(x, y, z) \\
 &= \frac{1}{M} \int_0^4 \int_\pi^{2\pi} \int_{-\pi/2}^0 (r^2 + 1)r \sin(\varphi) \cos(\theta) r^2 \cos(\theta) \, d\theta \, d\varphi \, dr \\
 &= \frac{1}{M} \int_0^4 \int_\pi^{2\pi} (r^5 + r^3) \sin(\varphi) \left. \frac{\theta + \sin(\theta) \cos(\theta)}{2} \right|_{-\pi/2}^0 d\varphi \, dr \\
 &= -\frac{\pi}{4M} \int_0^4 (r^5 + r^3) \cos(\varphi) \Big|_\pi^{2\pi} dr = -\frac{\pi(2 \cdot r^6 + 3 \cdot r^4) \Big|_0^4}{24M} = -\frac{1120\pi}{3M} = -\frac{175}{106}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 z_s &= \frac{1}{M} \int_K (x^2 + y^2 + z^2 + 1)z \, d(x, y, z) \\
 &= \frac{1}{M} \int_0^4 \int_\pi^{2\pi} \int_{-\pi/2}^0 (r^2 + 1)r \sin(\theta) r^2 \cos(\theta) \, d\theta \, d\varphi \, dr \\
 &= \frac{1}{M} \int_0^4 \int_\pi^{2\pi} (r^5 + r^3) \left. \frac{\sin^2(\theta)}{2} \right|_{-\pi/2}^0 d\varphi \, dr \\
 &= -\frac{1}{2M} \int_0^4 (r^5 + r^3) \varphi \Big|_\pi^{2\pi} dr = -\frac{\pi(2 \cdot r^6 + 3 \cdot r^4) \Big|_0^4}{24M} = -\frac{1120\pi}{3M} = -\frac{175}{106}
 \end{aligned}$$

Lösung 28:

a) Der MATLAB-Plotbefehl lautet

```
ezgraph3('surf','3*cos(s)*cos(t)','3*sin(s)*cos(t)','3*sin(t)',  
[0,2*pi,-pi/2,pi/2])
```

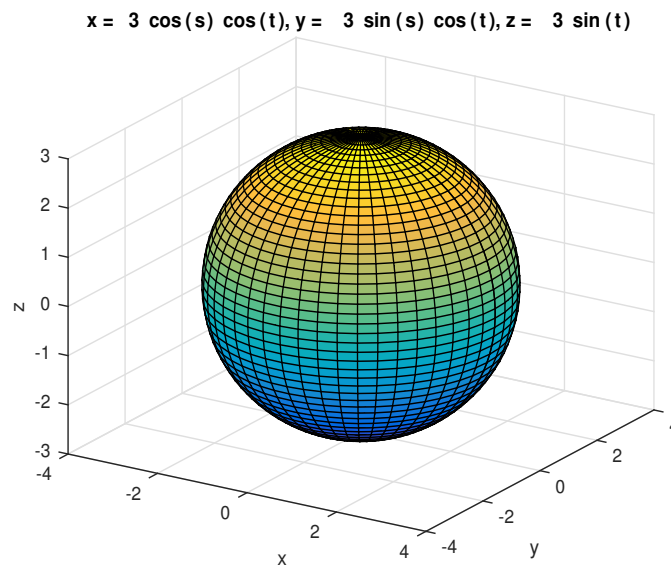


Bild 28 Kugel K mit Radius $R = 3$

b) Berechnung der Masse M in Kugelkoordinaten unter Verwendung des Transformationssatzes mit konstanter Dichte ρ :

$$\begin{aligned} M &= \int_K \rho \, d(x, y, z) = \rho \int_0^3 \int_0^{2\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} r^2 \cos(\theta) \, d\theta \, d\varphi \, dr \\ &= \rho \int_0^3 r^2 \, dr \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos(\theta) \, d\theta \\ &= \rho \left(\frac{r^3}{3} \right) \Big|_0^3 (\varphi) \Big|_0^{2\pi} (\sin(\theta)) \Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} \\ &= \rho \frac{3^3}{3} \cdot 2\pi \cdot 2 = \rho \frac{4\pi 3^3}{3} = 36\pi\rho \end{aligned}$$

Berechnung des Trägheitsmoments bezüglich der z -Achse in Kugelkoordinaten unter Verwendung des Transformationssatzes mit konstanter Dichte ρ und des

Additionstheorems $\cos^3(\theta) = (3 \cos(\theta) + \cos(3\theta))/4$

$$\begin{aligned}
 \Theta_{z\text{-Achse}} &= \int_K \rho(x^2 + y^2) d(x, y, z) \\
 &= \rho \int_0^3 \int_0^{2\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (r^2 \cos^2(\varphi) \cos^2(\theta) + r^2 \sin^2(\varphi) \cos^2(\theta)) r^2 \cos(\theta) d\theta d\varphi dr \\
 &= \rho \int_0^3 r^4 dr \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^3(\theta) d\theta \\
 &= \rho \left(\frac{r^5}{5} \right) \Big|_0^3 (\varphi) \Big|_0^{2\pi} \frac{1}{4} \left(3 \sin(\theta) + \frac{1}{3} \sin(3\theta) \right) \Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} \\
 &= \rho \frac{3^5}{5} \cdot 2\pi \cdot \frac{4}{3} = \frac{648\pi\rho}{5}
 \end{aligned}$$

- c) Da der Schwerpunkt von P aus Symmetriegründen im Ursprung liegt, gilt nach dem Steinerschen Satz

$$\Theta_D = M d^2 + \Theta_{z\text{-Achse}} = 36\pi\rho(2^2 + 1^2) + \frac{648\pi\rho}{5} = \frac{1548\pi\rho}{5}.$$

Lösung 29:

- a) Die Randkurve setzt sich aus zwei glatten Teilkurven zusammen:

$\partial H = \mathbf{c}_1 + \mathbf{c}_2$, mit

$$\mathbf{c}_1(t) = \begin{pmatrix} 2 \cos t \\ 2 \sin t \end{pmatrix}, \quad \frac{\pi}{4} \leq t \leq \frac{5\pi}{4} \quad \text{und} \quad \mathbf{c}_2(t) = \begin{pmatrix} t \\ t \end{pmatrix}, \quad -\sqrt{2} \leq t \leq \sqrt{2}.$$

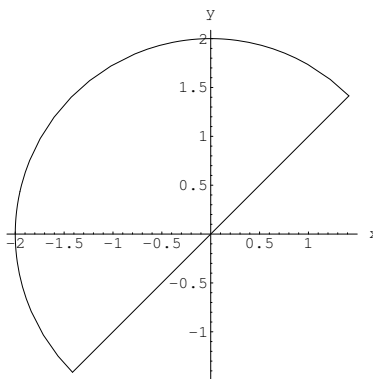


Bild 29 a) Halbkreisrandkurve ∂G

Zur Berechnung des Kurvenintegrals 2. Art werden die Tangentialvektoren benötigt:

$$\dot{\mathbf{c}}_1(t) = \begin{pmatrix} -2 \sin t \\ 2 \cos t \end{pmatrix}, \quad \dot{\mathbf{c}}_2(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{aligned}
\oint_{\partial H} \mathbf{f}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} &= \int_{\mathbf{c}_1} \mathbf{f}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} + \int_{\mathbf{c}_2} \mathbf{f}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \\
&= \int_{\pi/4}^{5\pi/4} \mathbf{f}(\mathbf{c}_1(t)) \dot{\mathbf{c}}_1(t) dt + \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \mathbf{f}(\mathbf{c}_2(t)) \dot{\mathbf{c}}_2(t) dt \\
&= \int_{\pi/4}^{5\pi/4} \left\langle \begin{pmatrix} 4 \cos t \sin t \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \sin t \\ 2 \cos t \end{pmatrix} \right\rangle dt \\
&\quad + \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \left\langle \begin{pmatrix} t^2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle dt \\
&= \int_{\pi/4}^{5\pi/4} -8 \cos t \sin^2 t + 2 \cos t dt + \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} t^2 + 1 dt \\
&= \left(-\frac{8 \sin^3 t}{3} + 2 \sin t \right) \Big|_{\pi/4}^{5\pi/4} + \left(\frac{t^3}{3} + t \right) \Big|_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \\
&= -\frac{2\sqrt{2}}{3} + \frac{10\sqrt{2}}{3} = \frac{8\sqrt{2}}{3}
\end{aligned}$$

Alternative Berechnung:

Mit dem Integralsatz von Green und Polarkoordinaten gilt

$$\begin{aligned}
\oint_{\partial H} \mathbf{f}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} &= \int_H \operatorname{rot} \mathbf{f}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \int_H \int_H -x d(x, y) \\
&= - \int_0^2 \int_{\pi/4}^{5\pi/4} r \cos(\varphi) \cdot r d\varphi dr = - \int_0^2 r^2 dr \int_{\pi/4}^{5\pi/4} \cos \varphi d\varphi \\
&= - \left(\frac{r^3}{3} \Big|_0^2 \right) \left(\sin \varphi \Big|_{\pi/4}^{5\pi/4} \right) = -\frac{8}{3} \cdot \left(-2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = \frac{8\sqrt{2}}{3}.
\end{aligned}$$

b)

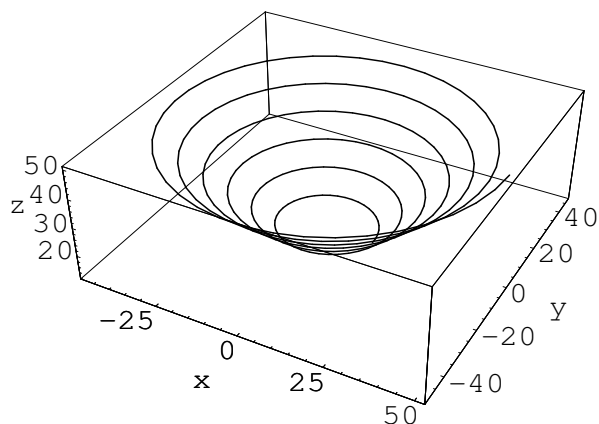


Bild 29 b) Kurve c

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbf{c}} \mathbf{f}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} &= \int_{4\pi}^{16\pi} \mathbf{f}(\mathbf{c}(t)) \dot{\mathbf{c}}(t) dt \\
&= \int_{4\pi}^{16\pi} \left\langle \begin{pmatrix} -t \sin t \\ t \cos t \\ (t \sin t + t \cos t)/t \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \cos t - t \sin t \\ \sin t + t \cos t \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle dt \\
&= \int_{4\pi}^{16\pi} t^2 + \sin t + \cos t dt = \int_{4\pi}^{16\pi} t^2 dt \\
&= \left. \frac{t^3}{3} \right|_{4\pi}^{16\pi} = \frac{\pi^3(16^3 - 4^3)}{3} = 1344\pi^3
\end{aligned}$$

Lösung 30:

a) Der $\mathbb{R}^3$ ist einfach zusammenhängend und die Integrabilitätsbedingung

$$\operatorname{rot} \mathbf{f}(x, y, z) = \begin{pmatrix} f_{3y} - f_{2z} \\ f_{1z} - f_{3x} \\ f_{2x} - f_{1y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20x^3y^3z^4 - 20x^3y^3z^4 \\ 15x^2y^4z^4 - 15x^2y^4z^4 \\ 12x^2y^3z^5 - 12x^2y^3z^5 \end{pmatrix} = \mathbf{0}$$

ist erfüllt. Daher besitzt $\mathbf{f}(x, y, z)$ ein Potential $v(x, y, z)$, d.h. es gilt $\mathbf{f} = \operatorname{grad} v = (v_x, v_y, v_z)$.

$$\text{b) } v_x(x, y, z) = 3x^2y^4z^5 + 1 \Rightarrow v(x, y, z) = x^3y^4z^5 + x + c(y, z)$$

$$\Rightarrow v_y(x, y, z) = 4x^3y^3z^5 + c_y(y, z) \stackrel{!}{=} 4x^3y^3z^5 + 2y$$

$$\Rightarrow c_y(y, z) = 2y \Rightarrow c(y, z) = y^2 + k(z)$$

$$\Rightarrow v(x, y, z) = x^3y^4z^5 + x + y^2 + k(z)$$

$$\Rightarrow v_z(x, y, z) = 5x^3y^4z^4 + k'(z) \stackrel{!}{=} 5x^3y^4z^4 + 3z^2$$

$$\Rightarrow k'(z) = 3z^2 \Rightarrow k(z) = z^3 + K \quad \text{mit } K \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow v(x, y, z) = x^3y^4z^5 + x + y^2 + z^3 + K$$

c) Wählt man als Kurve $\mathbf{k}$ die direkte Verbindungslinie vom Punkt $(0, 0, 0)$ zum Punkt (x, y, z) , d.h. $\mathbf{k}(t) = t(x, y, z)^T$, so lässt sich ein Potential v zu $\mathbf{f}$ be-

rechnen nach dem Hauptsatz für Kurvenintegrale durch

$$\begin{aligned}
 v(x, y, z) &= \int_{\mathbf{k}} \mathbf{f}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} + K = \int_0^1 \mathbf{f}(\mathbf{k}(t)) \dot{\mathbf{k}}(t) dt + K \\
 &= \int_0^1 \left\langle \begin{pmatrix} 3(tx)^2(ty)^4(tz)^5 + 1 \\ 4(tx)^3(ty)^3(tz)^5 + 2ty \\ 5(tx)^3(ty)^4(tz)^4 + 3(tz)^2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right\rangle dt + K \\
 &= \int_0^1 12t^{11}x^3y^4z^5 + x + 2ty^2 + 3t^2z^3 dt + K \\
 &= t^{12}x^3y^4z^5 + xt + t^2y^2 + t^3z^3 \Big|_0^1 + K \\
 &= x^3y^4z^5 + x + y^2 + z^3 + K
 \end{aligned}$$

- d) Mit $\mathbf{c}(t) = (\cos t, \sin t, \sin t + \cos t)^T$ ergibt sich nach dem Hauptsatz für Kurvenintegrale

$$\begin{aligned}
 \int_{\mathbf{c}} \mathbf{f}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} &= \int_0^\pi \mathbf{f}(\mathbf{c}(t)) \dot{\mathbf{c}}(t) dt = v(\mathbf{c}(\pi)) - v(\mathbf{c}(0)) \\
 &= v(-1, 0, -1) - v(1, 0, 1) = -1 - 1 - (1 + 1) = -4
 \end{aligned}$$

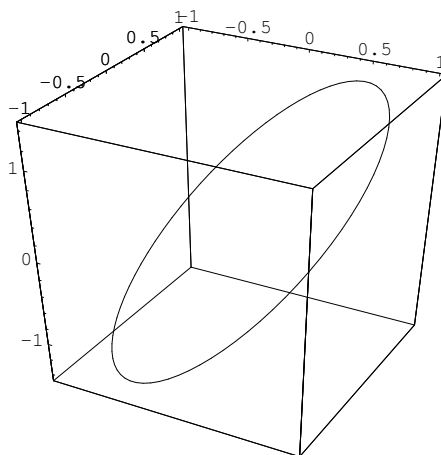


Bild 30 Kurve $\mathbf{c}$ für $T = 2\pi$

$$\begin{aligned}
 \int_{\mathbf{c}} \mathbf{f}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} &= \int_0^{2\pi} \mathbf{f}(\mathbf{c}(t)) \dot{\mathbf{c}}(t) dt = v(\mathbf{c}(2\pi)) - v(\mathbf{c}(0)) \\
 &= v(1, 0, 1) - v(1, 0, 1) = 0 \quad (\text{geschlossene Kurve})
 \end{aligned}$$

Lösung 31:

Die Ellipse E kann durch kartesische oder Polarkoordinaten beschrieben werden:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \Phi(r, \varphi) = \begin{pmatrix} 2r \cos \varphi \\ r \sin \varphi \end{pmatrix}, \quad 0 \leq r \leq 1, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi, \quad \Rightarrow \det \mathbf{J}\Phi(r, \varphi) = 2r$$

$$E = \left\{ (x, y)^T \in \mathbb{R}^2 \mid -2 \leq x \leq 2, -\sqrt{1 - (x/2)^2} \leq y \leq \sqrt{1 - (x/2)^2} \right\},$$

$$Q = \left\{ (r, \varphi)^T \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq r \leq 1, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi \right\} \quad \text{mit} \quad \Phi(Q) = E$$

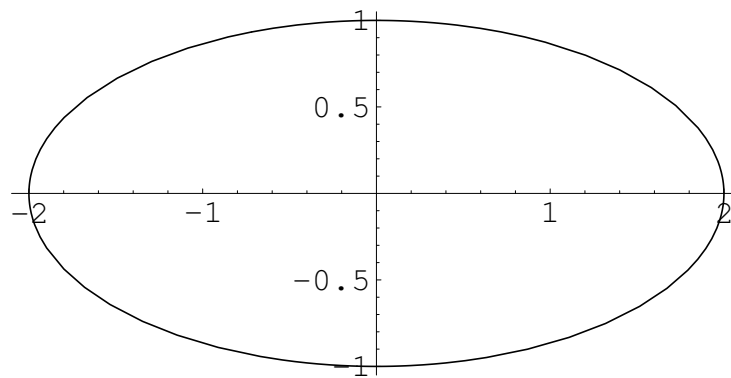


Bild 31: Ellipse E

Parametrisierung des Ellipsenrandes ∂E durch:

$$\mathbf{c}(\varphi) = \begin{pmatrix} 2 \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{pmatrix}, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi$$

$$\begin{aligned} \oint_{\partial E} \mathbf{f}(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} &= \oint_{\mathbf{c}} \mathbf{f}(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = \int_0^{2\pi} \langle \mathbf{f}(\mathbf{c}(\varphi)), \dot{\mathbf{c}}(\varphi) \rangle \, d\varphi \\ &= \int_0^{2\pi} \left\langle \begin{pmatrix} -2 \cos \varphi \sin \varphi - 2 \sin \varphi \\ 4 \cos \varphi + 4 \sin^2 \varphi \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \sin \varphi \\ \cos \varphi \end{pmatrix} \right\rangle \, d\varphi \\ &= \int_0^{2\pi} 4 \cos \varphi \sin^2 \varphi + 4 \sin^2 \varphi + 4 \cos^2 \varphi + 4 \cos \varphi \sin^2 \varphi \, d\varphi \\ &= \int_0^{2\pi} 4 + 8 \cos \varphi \sin^2 \varphi \, d\varphi = 4\varphi + \frac{8}{3} \sin^3 \varphi \Big|_0^{2\pi} = 8\pi \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \int_E \operatorname{rot} \mathbf{f}(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} &= \int_E (2x + 4y^2)_x - (-xy - 2y)_y \, d(x, y) \\
 &= \int_E 4 + x \, d(x, y) = \int_0^1 \int_0^{2\pi} (4 + 2r \cos \varphi) 2r \, d\varphi dr \\
 &= 8 \int_0^1 r \, dr \int_0^{2\pi} d\varphi + 4 \int_0^1 r^2 \, dr \int_0^{2\pi} \cos \varphi \, d\varphi \\
 &= 8\pi r^2 \Big|_0^1 + \frac{4r^3}{3} \Big|_0^1 \cdot \sin \varphi \Big|_0^{2\pi} = 8\pi
 \end{aligned}$$

Integralsatz von Green: $\oint_{\partial E} \mathbf{f}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = 8\pi = \int_E \operatorname{rot} \mathbf{f}(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$