Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **WiSe 2023/24**

Hörsaalübungsaufgaben und Lösungen zu

Analysis III

für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Aufgabe 1:

Für die folgenden Funktionen $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ berechne man die Gradienten und erstelle ein Bild im Bereich $[-1, 1] \times [-1, 1]$, auf dem verschiedene Höhenlinien der Funktion angegeben sind. Dies sind Linien, für die $f(x, y) = c$ mit $c \in \mathbb{R}$ gilt.

a) $f(x, y) = 5x^2 - 3y^2$, b) $f(x, y) = 5x + 3y$,

c) $f(x, y) = 5x^2 + 3y^2$, d) $f(x, y) = \sin(6x) + 2y$.

Aufgabe 2:

Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $f(x, y) = x^2 - 4y$.

a) Man berechne von f alle partiellen Ableitungen bis zur 3. Ordnung.

b) Man zeichne die Funktion im Bereich $[-4, 4] \times [-2, 2]$.

c) Man bestimme die Tangentialebene für das gegebene f im Punkt $(x_0, y_0) = (2, 0)$.

d) Man gebe eine Parameterdarstellung der Höhenlinie von f an, die durch den Punkt $(2, 0)$ läuft.

e) Man berechne den Winkel α zwischen $\text{grad} f(2, 0)$ und der Tangentialrichtung der Höhenlinie von f im Punkt $(2, 0)$.

Aufgabe 3:
Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{y^2}{x^4+y^2} & \text{, falls} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 1 & \text{, falls} \quad (x,y) = (0,0)\,. \end{cases}$$

a) Man überprüfe, ob f im Nullpunkt stetig ist.

b) Man zeichne die Funktion im Bereich $[-5,5] \times [-20,20]$.

c) Man berechne die ersten partiellen Ableitungen von f und

d) überprüfe, ob diese im Nullpunkt stetig sind.

Aufgabe 4:

a) Man zeige, dass die Wärmeleitungsgleichung $u_t = \Delta u$ für zwei Ortsvariable von der Funktion
$$u(x,y,t) = \sin(x)\sin(2y)e^{-5t}$$
gelöst wird.

b) Man zeige, dass mit $n \in \mathbb{N}$ die Funktion
$$u(x,y) = (\sin(nx) + 2\cos(nx))\sinh(ny)$$
die Laplace-Gleichung $\Delta u = 0$ löst.

Aufgabe 5:
Man berechne Divergenz und Rotation für folgende Vektorfelder mit $x, y, z \in \mathbb{R}$

a) $\boldsymbol{f}(x,y) = (xe^y, x^2y)^T$,

b) $\boldsymbol{g}(x,y) = (x^3, \sin y)^T$,

c) $3\boldsymbol{f}(x,y) - \boldsymbol{g}(x,y)$,

d) $\boldsymbol{h}(x,y,z) = (x^2+y^2+z^2, x^2+y^2+z^2, x^2+y^2+z^2)^T$,

e) $\boldsymbol{u}(x,y,z) = (x^2-y^2-z^2, y^2-x^2-z^2, z^2-x^2-y^2)^T$,

f) $\boldsymbol{h}(x,y,z) + \boldsymbol{u}(x,y,z)$.

Aufgabe 6:
Gegeben sei das Vektorfeld

$$\boldsymbol{g}(x,y) = (u(x,y), v(x,y))^T = (x, -y)^T \ .$$

a) Man berechne div $\boldsymbol{g}$ und rot $\boldsymbol{g}$ und

b) skizziere das Vektorfeld und einige Stromlinien in $[-1,1] \times [-1,1]$.

Aufgabe 7:
Man berechne die Jacobi-Matrizen der folgenden Funktionen mit den Abbildungsvorschriften

a) $f(x,y) = \ln(y) + \cos(xy)$ und $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}^+$,

b) $\boldsymbol{g}(t) = (t\cos t, t\sin t, t)^T$ und $t \in \mathbb{R}$,

c) $\boldsymbol{h}(\varphi,\psi) = \boldsymbol{h}(2\cos\varphi\cos\psi, 2\sin\varphi\cos\psi, 2\sin\psi)^T$ und $\varphi, \psi \in \mathbb{R}$,

d) $\boldsymbol{u}(x,y,z) = (-3x + y, x - 3y + z, y - 3z)^T$ und $x, y, z \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 8:
Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3y^2}{x^4+y^4} & \text{, falls} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{, falls} \quad (x,y) = (0,0)\ . \end{cases}$$

a) Man zeichne die Funktion im Bereich $[-1,1] \times [-1,1]$.

b) Man berechne die partiellen Ableitungen von f im Punkt $(x_0, y_0) = (0,0)$.

c) Man überprüfe, ob f im Punkt $(x_0, y_0) = (0,0)$ (vollständig) differenzierbar ist.

Aufgabe 9:
Man berechne die Jacobi-Matrix unter Verwendung der Kettenregel und direkt:

a)
$$\begin{array}{ccccc} \boldsymbol{f}: \mathbb{R}^2 & \overset{\boldsymbol{f}_1}{\to} & \mathbb{R}^2 & \overset{\boldsymbol{f}_2}{\to} & \mathbb{R} \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix} r = ye^x \\ s = x^3 \end{pmatrix} & \mapsto & r\cos(s^2)\,. \end{array}$$

b)
$$\begin{array}{ccccc} \boldsymbol{g}: \mathbb{R}^3 & \overset{\boldsymbol{g}_1}{\to} & \mathbb{R}^2 & \overset{\boldsymbol{g}_2}{\to} & \mathbb{R}^3 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix} u = \sin(2yz) \\ v = x^2 \end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix} 2v - 3u \\ e^{2u+v} \\ u^3 v \end{pmatrix}. \end{array}$$

Aufgabe 10:
Man berechne für die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $f(x, y) = xy$ im Punkt (x_0, y_0) die Ableitung in Richtung $\boldsymbol{h} = (h_1, h_2)^T$. Welchen Anstieg besitzt die Funktion im Punkt $(x_0, y_0) = (1, -1)$ in den durch die Gerade $3y - 5x = 7$ gegebenen Richtungen.

Aufgabe 11:

a) Man zeichne folgende Kreise und Ellipsen

(i) $x^2 + y^2 = 3$,

(ii) $4x^2 + 9y^2 = 36$,

(iii) $16x^2 + 3y^2 + 6y + 3 = 48$,

(iv) $x^2 - 6x + 9 + y^2 = 25$

und stelle die (x, y) der Lösungsmengen der obigen Gleichungen jeweils unter Verwendung von Polarkoordinaten dar.

b) Man zeichne die Lösungsmengen folgender Bereiche im $\mathbb{R}^3$

(i) $x \leq 0,\ x^2 + y^2 \leq 4$ und $1 \leq z \leq 3$,

(ii) $x^2 + y^2 + z^2 \leq 16\ ,\ 0 \leq y$.

und stelle sie durch Zylinder- bzw. Kugelkoordinaten dar.

Aufgabe 12:
Gegeben sei die Koordinatentransformation

$$\boldsymbol{\Phi}(x,y) = \begin{pmatrix} u(x,y) \\ v(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x-y \\ x+y \end{pmatrix}$$

mit $(x,y) \in Q := [-1,1] \times [-1,1]$.

a) Man berechne $\boldsymbol{J\Phi}(x,y)$ und $\det(\boldsymbol{J\Phi}(x,y))$ sowie

b) $\boldsymbol{\Phi}^{-1}(u,v)$, $\boldsymbol{J\Phi}^{-1}(u,v)$ und $\det(\boldsymbol{J\Phi}^{-1}(u,v))$.

c) Man zeichne Q und $\boldsymbol{\Phi}(Q)$.

Aufgabe 13:

a) Man berechne das Taylor-Polynom 2.Grades der folgenden Funktion

$$f(x,y,z) = 1 + z + xy + x^2(1-y)^2 + (y+z)^3$$

im Entwicklungspunkt $(0,0,0)$.

b) Man berechne das Taylor-Polynom 3.Grades der folgenden Funktion

$$f(x,y) = x\sin(x+y)$$

im Entwicklungspunkt $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

Aufgabe 14:
Man berechne das Taylor-Polynom 2. Grades zum Entwicklungspunkt $(x_0, y_0) = (0,0)$ der folgenden Funktion

$$h(x,y) = \cos(x^2 + y^2)$$

und schätze den Fehler, der dadurch entsteht, wenn man T_2 anstelle von f im Rechteck $[0,\pi/4] \times [0,\pi/4]$ verwendet, nach oben ab.

Aufgabe 15:
Man berechne alle stationären Punkte der folgenden Funktionen und klassifiziere diese:

a) $f(x,y) = (x^2 - y^2)e^{-x^2-y^2}$,

b) $f(x,y) = y(y^2 - 3)$,

c) $f(x,y) = \sin(x^2 + y^2)$,

d) $f(x,y) = |x + y|$.

Aufgabe 16:
Gegeben sei die Funktion $\quad f(x,y) = 8x^4 - 10x^2y + 3y^2$.

a) Man berechne alle stationären Punkte von f.

b) Man versuche die hinreichende Bedingung zur Klassifikation der stationären Punkte anzuwenden.

c) Man weise nach, dass f im Ursprung längs jeder Geraden durch Null ein lokales Minimum besitzt.

d) Besitzt f auch längs jeder Parabel $y = ax^2$ mit $a \in \mathbb{R}$ ein Minimum im Ursprung?

e) Man zeichne die Funktion beispielweise mit Hilfe der MATLAB-Routinen 'ezsurf' und 'ezcontour'.

Aufgabe 17:
Man untersuche die durch die Niveaumenge

$$f(x,y) := x^3 + y^3 - xy = 0$$

implizit gegebene Kurve. Im Einzelnen sind gesucht

a) die Symmetrien der Kurve,

b) die Kurvenpunkte mit horizontaler und

c) vertikaler Tangente,

d) die singulären Punkte der Kurve mit Klassifikation und

e) eine Zeichnung der Niveaumenge.

Aufgabe 18:
Gegeben sei die Funktion $h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ mit

$$h(x, y, z) = z^2 + y^2 - x^2 + 4z - 2x + 3\,.$$

a) Man überprüfe, ob die Niveaumenge $h(x, y, z) = c$, die durch den Punkt $(-1, 1, -2)$ festgelegt wird, in der Umgebung dieses Punktes eine glatte Fläche bildet.

b) Man löse obige Gleichung gegebenenfalls nach einer der Variablen auf, um die Fläche explizit anzugeben.

c) Man gebe im Punkt $(-1, 1, -2)$ die Tangentialebene bezüglich der Fläche aus a) in Parameterform an.

d) Man zeichne die Fläche mit Tangentialebene.

Aufgabe 19:
Man berechne die Extremwerte der Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $f(x, y) = x + y$ auf dem Kreis $x^2 + y^2 = 1$

a) unter Verwendung der Lagrangeschen Multiplikatorenregel und

b) über Parametrisierung des Kreises durch $\boldsymbol{c}$ und anschließendes Lösen der Extremalaufgabe in $h(t) := f(\boldsymbol{c}(t))$.

Aufgabe 20:
Für die Funktion $f(x, y, z) = z^2$ berechne und klassifiziere man die Extrema auf dem Schnitt des Zylinders $x^2 + y^2 = 9$ mit der Ebene $y = z$ unter Verwendung der Lagrangeschen Multiplikatorenregel.

Aufgabe 21:

a) Mit $Q := [0,2] \times [0,1]$ berechne man für die Funktion

$$f : Q \to \mathbb{R}\,, \quad f(x,y) = 2 - x$$

(i) Riemannsche Unter- und Obersumme zu folgender Zerlegung Z von Q

$$Q_{i,j} = \left[\frac{2(i-1)}{n}, \frac{2i}{n}\right] \times \left[\frac{j-1}{n}, \frac{j}{n}\right]\ ,\ i,j = 1,\ldots,n$$

(ii) und das Integral von f über Q nach dem Satz von Fubini.

b) Man berechne die folgenden Integrale:

(i) $\displaystyle\int_{\pi}^{2\pi}\int_{0}^{\pi} \cos(x+y)\,dx\,dy,$

(ii) $\displaystyle\int_R 9x^2\sqrt{y}\,d(x,y) \quad \text{mit} \quad R = [1,2]\times[1,4],$

(iii) $\displaystyle\int_Q \sinh z + \frac{6z^2}{(2x+y)^2}\,d(x,y,z) \quad \text{mit} \quad Q = [1,2]\times[0,1]\times[-1,1].$

Aufgabe 22:

a) (i) Man zeichne das Dreieck D mit den Eckpunkten $P_1 = (-1,1)$, $P_2 = (0,0)$ und $P_3 = (2,2)$ und stelle es als Normalbereich dar.

(ii) Man berechne $\displaystyle\int_D 18y\,d(x,y).$

b) (i) Man zeichne den durch $x \le 0$, $z \ge 1$, $z \le 3$ und $x^2+y^2 \le 4$ beschriebenen Bereich Z und stelle ihn als Normalbereich dar.

(ii) Man berechne $\displaystyle\int_Z 3x\,d(x,y,z).$

Aufgabe 23:

a) Man zeichne die durch $y \leq 0$, $z \leq 0$ und $x^2+y^2+z^2 \leq 16$ gegebene Viertelkugel K und berechne ihren Schwerpunkt mit der Dichtefunktion $\rho(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 + 1$ unter Verwendung von Kugelkoordinaten.

b) Durch $x^2 + y^2 + z^2 \leq 9$ wird eine Kugel K beschrieben. K habe die konstante Dichte ρ.

(i) Man zeichne K unter Verwendung der MATLAB-Routine 'ezgraph3'.

(ii) Für K berechne man die Masse und das Trägheitsmoment bezüglich der z-Achse.

(iii) Man berechne das Trägheitsmoment von K bezüglich der zur z-Achse parallelen Achse D, die durch den Punkt $(2,1,3)^T$ verläuft.

Aufgabe 24:

a) Für das Vektorfeld $\boldsymbol{f} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit $\boldsymbol{f}(x,y) = \begin{pmatrix} xy \\ 1 \end{pmatrix}$ berechne man das Kurvenintegral $\oint_{\boldsymbol{c}} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) d\boldsymbol{x}$.

Dabei ist $\boldsymbol{c}$ die mathematisch positive durchlaufene Randkurve ∂H der Halbkreisfläche $H: \; x^2 + y^2 \leq 4$ mit $x \leq y$.

b) Für das Vektorfeld $\boldsymbol{f} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ mit

$$\boldsymbol{f}(x,y,z) = \begin{pmatrix} -y \\ x \\ (x+y)/z \end{pmatrix}$$

berechne man das Kurvenintegral $\int_{\boldsymbol{c}} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) d\boldsymbol{x}$ mit der Kurve $\boldsymbol{c} : [4\pi, 16\pi] \to \mathbb{R}^3$ und

$$\boldsymbol{c}(t) = \begin{pmatrix} t\cos t \\ t\sin t \\ t \end{pmatrix} .$$

Aufgabe 25:
Gegeben sei das Vektorfeld $\boldsymbol{f} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ mit

$$\boldsymbol{f}(x,y,z) = \begin{pmatrix} 3x^2y^4z^5 + 1 \\ 4x^3y^3z^5 + 2y \\ 5x^3y^4z^4 + 3z^2 \end{pmatrix} .$$

a) Man zeige, dass $\boldsymbol{f}$ ein Potential besitzt, ohne es zu berechnen.

b) Man berechne ein Potential durch sukzessives Integrieren von $\boldsymbol{f}$ und

c) mit Hilfe des Hauptsatzes für Kurvenintegrale.

d) Längs der Kurve $\boldsymbol{c} : [0,T] \to \mathbb{R}^3$ mit

$$\boldsymbol{c}(t) = (\cos t, \sin t, \sin t + \cos t)^T$$

berechne man für die Fälle $T = \pi$ und $T = 2\pi$ das Kurvenintegral $\displaystyle\int_{\boldsymbol{c}} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x}$
.

Aufgabe 26:
Man verifiziere den Satz von Green für das Vektorfeld

$$\boldsymbol{f}(x,y) = (-xy - 2y, 2x + 4y^2)^T$$

und das durch die Kurve $x^2 + 4y^2 = 4$ eingeschlossene Gebiet E.

Aufgabe 27:
Gegeben sei die Teilfläche eines parabolischen Zylinders

$$N = \left\{ (x,y,z)^T \in \mathbb{R}^3 \mid -1 \le y \le x \le 1\, ,\ z = 1 - x^2 \right\} .$$

a) Man zeichne N,

b) parametrisiere N und

c) berechne den Flächeninhalt von N.

Aufgabe 28:
Gegeben seien der Körper

$$K = \left\{ (x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x^2 + y^2 + z^2 \leq 9\,,\; x \leq 0 \right\}$$

und das Vektorfeld

$$\boldsymbol{f}(x, y, z) = \left(y, -x, z^3 \right)^T \;.$$

a) Man skizziere K.

b) Der Rand von K ist beschreibbar durch ein ebenes Flächenstücke S und ein nicht ebenes Flächenstück H.

   Man gebe jeweils Parametrisierungen für die beiden Randflächenstücke S und H an.

c) Man berechne jeweils den Fluss von $\boldsymbol{f}$ durch die beiden Randflächenstücke S und H.

d) Man berechne das Volumenintegral $\displaystyle\int_E \operatorname{div} \boldsymbol{f}(x, y, z)\, d(x, y, z)\,.$

Lösung 1:

a) $f(x,y) = 5x^2 - 3y^2 \quad \Rightarrow \quad \mathrm{grad} f(x,y) = (10x, -6y)^T$

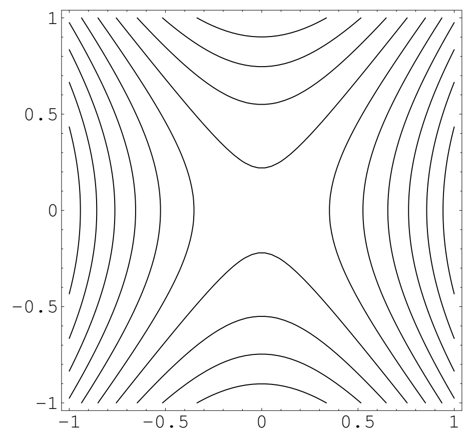


Bild 1 a) $5x^2 - 3y^2 = c \quad \text{mit} \quad c \in \mathbb{R}$

b) $f(x,y) = 5x + 3y \quad \Rightarrow \quad \mathrm{grad} f(x,y) = (5,3)^T$

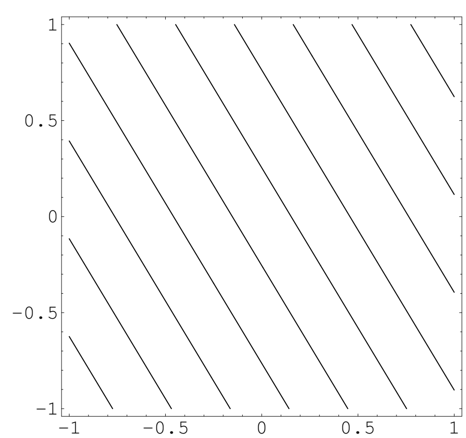


Bild 1 b) $5x + 3y = c \quad \text{mit} \quad c \in \mathbb{R}$

c) $f(x,y) = 5x^2 + 3y^2 \quad \Rightarrow \quad \mathrm{grad} f(x,y) = (10x, 6y)^T$

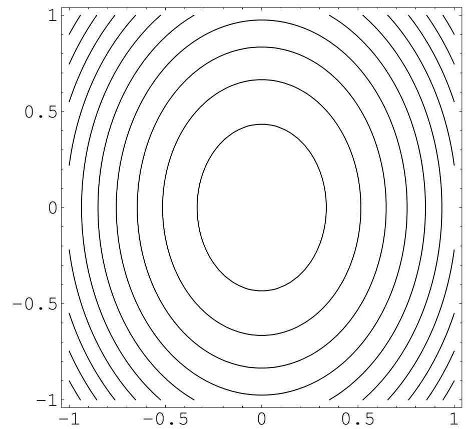


Bild 1 c) $5x^2 + 3y^2 = c$ mit $c \in \mathbb{R}$

d) $f(x, y) = \sin(6x) + 2y \quad \Rightarrow \quad \operatorname{grad} f(x, y) = (6\cos(6x), 2)^T$

Ein MATLAB-Befehl für den Höhenlinienplot lautet:

```
ezcontour('sin(6*x)+2*y',[-1,1,-1,1])
```

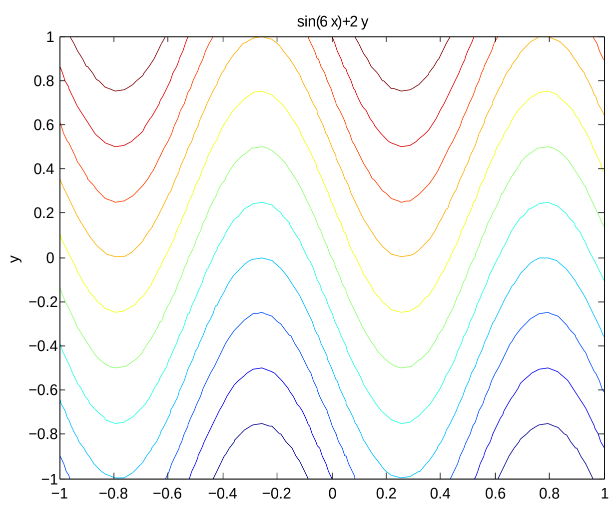


Bild 1 d) $\sin(6x) + 2y = c$ mit $c \in \mathbb{R}$

Lösung 2:

a) $f(x, y) = x^2 - 4y\,, \quad f_x(x, y) = 2x\,, \quad f_y(x, y) = -4\,,$

$f_{xx}(x, y) = 2\,, \quad f_{xy}(x, y) = 0\,, \quad f_{yy}(x, y) = 0\,,$

$f_{xxx}(x, y) = 0\,, \quad f_{xxy}(x, y) = 0\,, \quad f_{xyy}(x, y) = 0\,, \quad f_{yyy}(x, y) = 0$

b) Ein MATLAB-Befehl für den Flächenplot lautet:

```
ezsurf('x^2-4*y',[-4,4,-2,2])
```

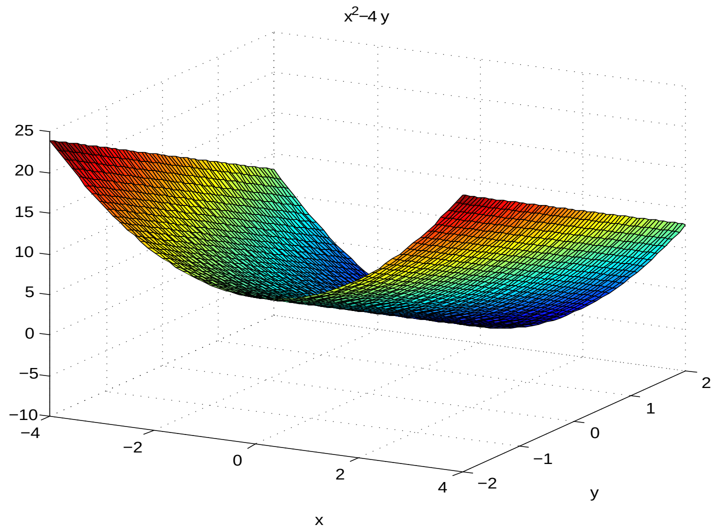


Bild 2 $\quad f(x,y)=x^2-4y$

c) $f(2,0)=2^2-4\cdot 0=4\,,\quad f_x(2,0)=4\,,\quad f_y(2,0)=-4$

Tangentialebene : $\quad z=4+4(x-2)-4y$

d) Es ist $f(2,0)=4$. Damit wird die Höhenlinie im Punkt $(2,0)$ beschrieben durch die implizite Gleichung

$$4=f(x,y(x))=x^2-4y(x)\,.$$

Man erhält durch Auflösen $y(x)=\dfrac{x^2}{4}-1$. Eine die Höhenlinie parametrisierende Kurve ist daher gegeben durch

$$\boldsymbol{c}(x)=\begin{pmatrix} x \\ y(x)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x \\ \dfrac{x^2}{4}-1\end{pmatrix}.$$

e) $\operatorname{grad} f(2,0)=(f_x(2,0),f_y(2,0))^T=(4,-4)^T$

Tangentialrichtung der Höhenlinie

$$\boldsymbol{c}'(x)=\begin{pmatrix} 1 \\ \dfrac{x}{2}\end{pmatrix}\quad\Rightarrow\quad \boldsymbol{c}'(2)=\begin{pmatrix} 1 \\ 1\end{pmatrix}$$

$$\cos\alpha=\frac{\operatorname{grad} f(2,0)^T\cdot\boldsymbol{c}'(2)}{||\operatorname{grad} f(2,0)||_2\cdot\ ||\boldsymbol{c}'(2)||_2}=0\quad\Rightarrow\quad\alpha=90^\circ$$

Lösung 3:

a) Man betrachte die Nullfolge $\left(\frac{1}{k}, 0\right)$ mit $k \in \mathbb{N}$. Dann gilt

$$\lim_{k\to\infty} f\left(\frac{1}{k}, 0\right) = \lim_{k\to\infty} \frac{0}{1/k^4} = 0 \neq 1\,.$$

Die Funktion f ist im Nullpunkt daher nicht stetig.

b)

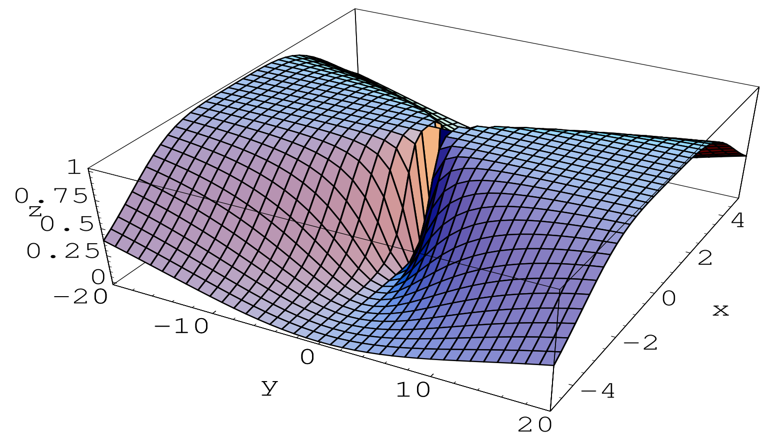


Bild 3: $f(x,y) = \dfrac{y^2}{x^4 + y^2}$

c) Für $(x,y) \neq (0,0)$ gilt:

$$f_x(x,y) = \frac{-4y^2x^3}{(x^4+y^2)^2}\,, \qquad f_y(x,y) = \frac{2yx^4}{(x^4+y^2)^2}$$

für $(x,y) = (0,0)$ gilt:

$$f_x(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0-1}{h} \qquad \text{existiert nicht}$$

$$f_y(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0,h) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1-1}{h} = 0$$

d) Man betrachte die Nullfolge $\left(\frac{1}{k}, \frac{1}{k^2}\right)$ mit $k \in \mathbb{N}$, um zu überprüfen, ob die partielle Ableitung f_y im Nullpunkt unstetig ist.

$$\lim_{k\to\infty} f_y\left(\frac{1}{k}, \frac{1}{k^2}\right) = \lim_{k\to\infty} \frac{2/k^6}{(1/k^4 + 1/k^4)^2} = \lim_{k\to\infty} \frac{k^2}{2} = \infty$$

Damit ist die partielle Ableitung f_y im Nullpunkt nicht stetig.

Lösung 4:

a) $u(x,y,t) = \sin(x)\sin(2y)e^{-5t}$

$u_t(x,y,t) = -5\sin(x)\sin(2y)e^{-5t}$

$u_x(x,y,t) = \cos(x)\sin(2y)e^{-5t}\,, \quad u_y(x,y,t) = 2\sin(x)\cos(2y)e^{-5t}$

$u_{xx}(x,y,t) = -\sin(x)\sin(2y)e^{-5t}\,, \quad u_{yy}(x,y,t) = -4\sin(x)\sin(2y)e^{-5t}$

Damit löst u die Wärmeleitungsgleichung $u_t = u_{xx} + u_{yy}$.

b) $u(x,y) = (\sin(nx) + 2\cos(nx))\sinh(ny)$

$u_x(x,y) = n(\cos(nx) - 2\sin(nx))\sinh(ny)\,,$
$u_y(x,y) = n(\sin(nx) + 2\cos(nx))\cosh(ny)$

$u_{xx}(x,y) = -n^2(\sin(nx) + 2\cos(nx))\sinh(ny)\,,$
$u_{yy}(x,y) = n^2(\sin(nx) + 2\cos(nx))\sinh(ny)$

Damit löst u die Laplace-Gleichung $\Delta u = 0$.

Lösung 5:

a) $\boldsymbol{f}(x,y) = \ (xe^y, x^2y)^T$

$\text{div}\boldsymbol{f} = f_{1x} + f_{2y} = e^y + x^2$
$\text{rot}\boldsymbol{f} = f_{2x} - f_{1y} = 2xy - xe^y$

b) $\boldsymbol{g}(x,y) = \ (x^3, \sin y)^T$

$\text{div}\boldsymbol{g} = g_{1x} + g_{2y} = 3x^2 + \cos y$
$\text{rot}\boldsymbol{g} = g_{2x} - g_{1y} = 0$

c) $\text{div}(3\boldsymbol{f} - \boldsymbol{g}) = 3\text{div}\boldsymbol{f} - \text{div}\boldsymbol{g}$
$= 3(e^y + x^2) - (3x^2 + \cos y) = 3e^y - \cos y$

$\text{rot}(3\boldsymbol{f} - \boldsymbol{g}) = 3\text{rot}\boldsymbol{f} - \text{rot}\boldsymbol{g}$

$= 3(2xy - xe^y) - 0 = 6xy - 3xe^y$

alternativ:

$3\boldsymbol{f}(x,y) - \boldsymbol{g}(x,y) = (3xe^y - x^3, 3x^2y - \sin y)^T$

$\text{div}(3\boldsymbol{f} - \boldsymbol{g}) = 3e^y - 3x^2 + 3x^2 - \cos y = 3e^y - \cos y$

$\text{rot}(3\boldsymbol{f} - \boldsymbol{g}) = 6xy - 3xe^y$

d) $\boldsymbol{h}(x,y,z) = (x^2+y^2+z^2, x^2+y^2+z^2, x^2+y^2+z^2)^T$

$\text{div}\boldsymbol{h} = h_{1x} + h_{2y} + h_{3z} = 2x + 2y + 2z$

$\text{rot}\boldsymbol{h} = (h_{3y} - h_{2z}, h_{1z} - h_{3x}, h_{2x} - h_{1y})^T = (2y-2z, 2z-2x, 2x-2y)^T$

alternativ:

$\boldsymbol{h}(x,y,z) = \varphi(x,y,z)\boldsymbol{v}$ mit $\varphi(x,y,z) = x^2+y^2+z^2$ und $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Man erhält

$\nabla\varphi = (2x, 2y, 2z)^T$, $\text{div}\boldsymbol{v} = 0$, $\text{rot}\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$ und

$(\nabla\varphi) \times \boldsymbol{v} = (2y-2z, 2z-2x, 2x-2y)^T$.

Damit ergibt sich

$\text{div}\boldsymbol{h} = (\nabla\varphi, \boldsymbol{v}) + \varphi\ \text{div}\boldsymbol{v} = (\nabla\varphi, \boldsymbol{v}) = 2x + 2y + 2z$

$\text{rot}\boldsymbol{h} = (\nabla\varphi) \times \boldsymbol{v} + \varphi\ \text{rot}\boldsymbol{v} = (\nabla\varphi) \times \boldsymbol{v} = (2y-2z, 2z-2x, 2x-2y)^T$.

e) $\boldsymbol{u}(x,y,z) = (x^2-y^2-z^2, y^2-x^2-z^2, z^2-x^2-y^2)^T$

$\text{div}\boldsymbol{u} = u_{1x} + u_{2y} + u_{3z} = 2x + 2y + 2z$

$\text{rot}\boldsymbol{u} = (u_{3y} - u_{2z}, u_{1z} - u_{3x}, u_{2x} - u_{1y})^T = (-2y+2z, -2z+2x, -2x+2y)$

f) $\text{div}(\boldsymbol{h} + \boldsymbol{u}) = \text{div}\boldsymbol{h} + \text{div}\boldsymbol{u} = 2(2x + 2y + 2z)$

$\text{rot}(\boldsymbol{h} + \boldsymbol{u}) = \text{rot}\boldsymbol{h} + \text{rot}\boldsymbol{u} = \mathbf{0}$

alternativ:

$\boldsymbol{h}(x, y, z) + \boldsymbol{u}(x, y, z) = (2x^2, 2y^2, 2z^2)$

$\text{div}(\boldsymbol{h} + \boldsymbol{u}) = (h_1 + u_1)_x + (h_2 + u_2)_y + (h_3 + u_3)_z = 4x + 4y + 4z$

$\text{rot}(\boldsymbol{h} + \boldsymbol{u}) = (0 - 0, 0 - 0, 0 - 0)^T = \mathbf{0}$

Lösung 6:

a) $\boldsymbol{g}(x, y) = (u(x, y), v(x, y))^T = (x, -y)^T$

$\text{div } \boldsymbol{g} = u_x + v_y = 1 - 1 = 0,$

$\text{rot } \boldsymbol{g} = v_x - u_y = 0 - 0 = 0$

b) Die MATLAB-Befehle für das Vektorfeld lauten:

```
[X,Y] = meshgrid(-1:.2:1);
U=X.^1;
V=-Y.^1;
quiver(X,Y,U,V)
```

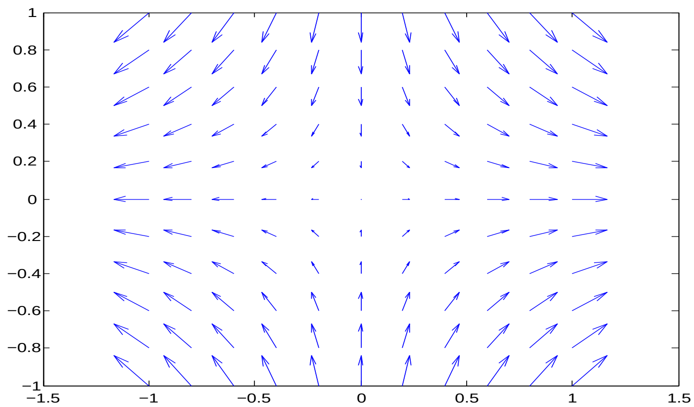


Bild 6 b) (i) Vektorfeld $\boldsymbol{g}(x,y) = (x,-y)^T$

Stromlinien sind die Kurven $\boldsymbol{c}(t) = (x(t), y(t))^T$, deren Tangentialvektoren durch das Vektorfeld $\boldsymbol{g}$ gegeben sind

$$\dot{\boldsymbol{c}}(t) = \begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \end{pmatrix} = \boldsymbol{g}(x(t), y(t)) = \begin{pmatrix} u(x(t), y(t)) \\ v(x(t), y(t)) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(t) \\ -y(t) \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{c}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ae^t \\ be^{-t} \end{pmatrix} \Rightarrow e^t = \frac{x}{a} \Rightarrow \boldsymbol{c}(x) = \begin{pmatrix} x \\ \dfrac{ab}{x} \end{pmatrix}$$

oder alternativ die Differentialgleichung $y'(x) = \dfrac{v(x, y(x))}{u(x, y(x))}$ erfüllen.

$$y'(x) = \frac{-y(x)}{x} \quad \Rightarrow \quad \int \frac{dy}{y} = -\int \frac{dx}{x} \quad \Rightarrow \quad y(x) = \frac{c}{x}$$

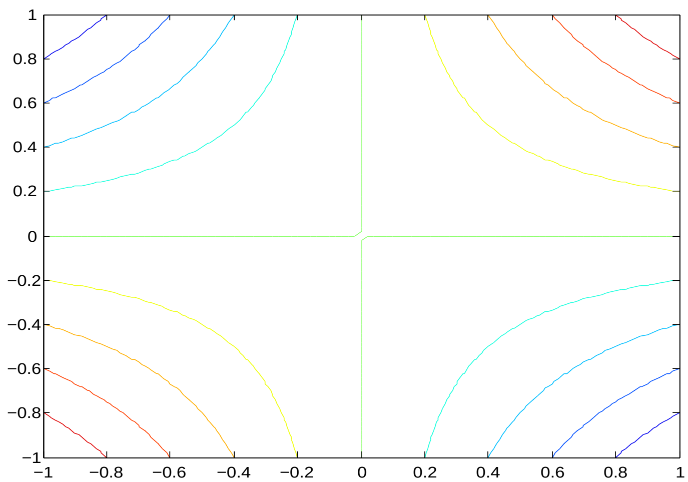


Bild 6 b) (ii) Stromlinien $\boldsymbol{c}(x) = (x, c/x)^T,\ c \in \mathbb{R},$ (Höhenlinien von $xy = c$)

Lösung 7:

a) $f(x, y) = \ln(y) + \cos(xy),$

$$\boldsymbol{J} f(x, y) = (f_x, f_y) = \ \mathrm{grad} f(x, y) = \left(-y\sin(xy), \frac{1}{y} - x\sin(xy)\right)$$

b) $\boldsymbol{g}(t) = (t\cos t, t\sin t, t)^T,$

$$\boldsymbol{J}\boldsymbol{g}(t) = (g_1'(t), g_2'(t), g_3'(t))^T = \boldsymbol{g}'(t) = (\cos t - t\sin t, \sin t + t\cos t, 1)^T$$

c) $\boldsymbol{h}(\varphi, \psi) = \boldsymbol{h}(2\cos\varphi\cos\psi, 2\sin\varphi\cos\psi, 2\sin\psi)^T,$

$$\boldsymbol{J}\boldsymbol{h}(\varphi, \psi) = \begin{pmatrix} h_{1\varphi} & h_{1\psi} \\ h_{2\varphi} & h_{2\psi} \\ h_{3\varphi} & h_{3\psi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2\sin\varphi\cos\psi & -2\cos\varphi\sin\psi \\ 2\cos\varphi\cos\psi & -2\sin\varphi\sin\psi \\ 0 & 2\cos\psi \end{pmatrix}$$

d) $\boldsymbol{u}(x,y,z) = (-3x+y, x-3y+z, y-3z)^T$, und $x,y,z \in \mathbb{R}$,

$$\boldsymbol{J}\boldsymbol{u}(x,y,z) = \begin{pmatrix} u_{1x} & u_{1y} & u_{1z} \\ u_{2x} & u_{2y} & u_{2z} \\ u_{3x} & u_{3y} & u_{3z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

Lösung 8:

a)

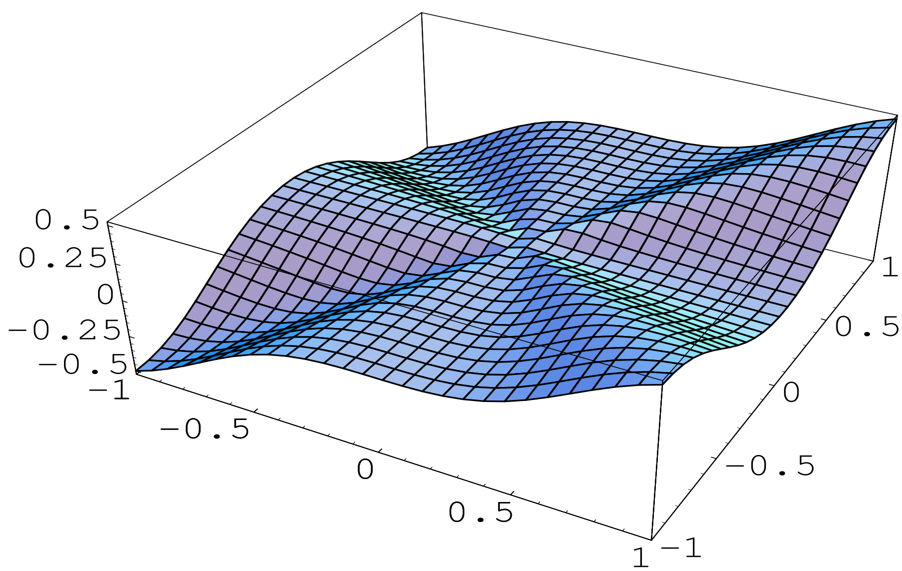


Bild 8: $f(x,y) = \dfrac{x^3y^2}{x^4+y^4}$

b) Wegen der Nennernullstelle von f in $(x_0,y_0) = (0,0)$ können wir dort keine Differenzierbarkeit voraussetzen, d.h. die partiellen Ableitungen müssen elementar über die Definition berechnet werden.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(t,0)-f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{\frac{t^3\cdot 0^2}{t^4+0^4} - 0}{t} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(0,t)-f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{\frac{0^3\cdot t^2}{0^4+t^4} - 0}{t} = 0$$

c) Wäre f im Punkt $(x_0,y_0) = (0,0)$ (vollständig) differenzierbar, so würde eine lineare Abbildung $\boldsymbol{A}$ existieren, mit

$$\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{0}} \frac{f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{0}) - \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}}{||\boldsymbol{x}||} = 0\,.$$

$\boldsymbol{A}$ wäre dann die Jacobi-Matrix

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{J}f(0,0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(0,0), \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)\right) = (0,0)\,.$$

Damit ergibt sich beispielsweise für die Nullfolge $\boldsymbol{x}_n = (1/n, 1/n)^T$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(\boldsymbol{x}_n) - f(\boldsymbol{0}) - \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_n}{||\boldsymbol{x}_n||} = \lim_{n\to\infty} \frac{1/n^5}{2/n^4\sqrt{2/n^2}} = \frac{1}{2\sqrt{2}}\,.$$

Also ist f im Nullpunkt nicht differenzierbar.

Lösung 9:

a) Kettenregel:

$$\boldsymbol{J}\boldsymbol{f}_1(x,y) = \begin{pmatrix} ye^x & e^x \\ 3x^2 & 0 \end{pmatrix}\,,$$

$$\boldsymbol{J}\boldsymbol{f}_2(r,s) = \begin{pmatrix} \cos(s^2)\,, & -2rs\sin(s^2) \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{J}\boldsymbol{f}(x,y) &= \boldsymbol{J}(\boldsymbol{f}_2 \circ \boldsymbol{f}_1)(x,y) = \boldsymbol{J}\boldsymbol{f}_2(\boldsymbol{f}_1(x,y)) \cdot \boldsymbol{J}\boldsymbol{f}_1(x,y) \\ &= \begin{pmatrix} \cos((x^3)^2)\,, & -2ye^x x^3 \sin((x^3)^2) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} ye^x & e^x \\ 3x^2 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} ye^x\cos(x^6) - 6x^5ye^x\sin(x^6)\,, & e^x\cos(x^6) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

direkt: $\quad \boldsymbol{f}_2(\boldsymbol{f}_1(x,y)) = \boldsymbol{f}_2(r(x,y)), s(x,y)) = \boldsymbol{f}(x,y) = ye^x\cos(x^6)$

$\Rightarrow \quad \boldsymbol{J}\boldsymbol{f}(x,y) = \begin{pmatrix} ye^x\cos(x^6) - 6x^5ye^x\sin(x^6)\,, & e^x\cos(x^6) \end{pmatrix}$

b) Kettenregel:

$$\boldsymbol{J}\boldsymbol{g}_1(x,y,z) = \begin{pmatrix} 0 & 2z\cos(2yz) & 2y\cos(2yz) \\ 2x & 0 & 0 \end{pmatrix}\,,$$

$$\boldsymbol{J}\boldsymbol{g}_2(u,v) = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2e^{2u+v} & e^{2u+v} \\ 3u^2v & u^3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{J}\boldsymbol{g}(x,y,z) &= \boldsymbol{J}(\boldsymbol{g}_2 \circ \boldsymbol{g}_1)(x,y,z) = \boldsymbol{J}\boldsymbol{g}_2(\boldsymbol{g}_1(x,y,z)) \cdot \boldsymbol{J}\boldsymbol{g}_1(x,y,z) \\ &= \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2e^{2\sin(2yz)+x^2} & e^{2\sin(2yz)+x^2} \\ 3(\sin(2yz))^2x^2 & (\sin(2yz))^3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2z\cos(2yz) & 2y\cos(2yz) \\ 2x & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 4x & -6z\cos(2yz) & -6y\cos(2yz) \\ 2xe^{2\sin(2yz)+x^2} & 4z\cos(2yz)e^{2\sin(2yz)+x^2} & 4y\cos(2yz)e^{2\sin(2yz)+x^2} \\ 2x\sin^3(2yz) & 6x^2z\cos(2yz)\sin^2(2yz) & 6x^2y\cos(2yz)\sin^2(2yz) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

direkt:

$$\boldsymbol{g}_2(\boldsymbol{g}_1(x,y,z)) = \boldsymbol{g}_2(u(x,y,z),v(x,y,z)) = \boldsymbol{g}(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2x^2 - 3\sin(2yz) \\ e^{2\sin(2yz)+x^2} \\ \sin^3(2yz)\cdot x^2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{J}\boldsymbol{g}(x,y,z) = \begin{pmatrix} 4x & -6z\cos(2yz) & -6y\cos(2yz) \\ 2xe^{2\sin(2yz)+x^2} & 4z\cos(2yz)e^{2\sin(2yz)+x^2} & 4y\cos(2yz)e^{2\sin(2yz)+x^2} \\ 2x\sin^3(2yz) & 6x^2z\cos(2yz)\sin^2(2yz) & 6x^2y\cos(2yz)\sin^2(2yz) \end{pmatrix}$$

Lösung 10:

Da f stetig partiell differenzierbar ist, kann die Richtungsableitung folgendermaßen berechnet werden:

$$D_{\boldsymbol{h}}f(x_0,y_0) = \text{grad } f(x_0,y_0)\cdot\boldsymbol{h} = (y_0,x_0)\begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} = y_0h_1 + x_0h_2$$

Die Gerade $3y - 5x = 7$ in Parameterform lautet:

$$\boldsymbol{g}(x) = \begin{pmatrix} x \\ y(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 7/3 + 5x/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 7/3 \end{pmatrix} + x\begin{pmatrix} 1 \\ 5/3 \end{pmatrix}$$

Zur Berechnung des Anstieges ist der in der Richtungsableitung verwendete Richtungsvektor $\boldsymbol{h}$ aus der Geradengleichung noch zu normieren:

$$\boldsymbol{h} = \pm\frac{1}{\sqrt{34}/3}\begin{pmatrix} 1 \\ 5/3 \end{pmatrix} = \pm\frac{1}{\sqrt{34}}\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Der An- bzw. Abstieg im Punkt $(x_0,y_0) = (1,-1)$ lautet daher

$$D_{\boldsymbol{h}}f(1,-1) = -h_1 + h_2 = \pm\left(\frac{5}{\sqrt{34}} - \frac{3}{\sqrt{34}}\right) = \pm\frac{2}{\sqrt{34}}\,.$$

Lösung 11:

a) (i) $x^2 + y^2 = 3$

beschreibt einen Kreis

vom Radius $r = \sqrt{3}$

mit Mittelpunkt $(0,0)$

$(x,y) = (\sqrt{3}\cos(\varphi), \sqrt{3}\sin(\varphi))$

mit $-\pi \le \varphi < \pi$

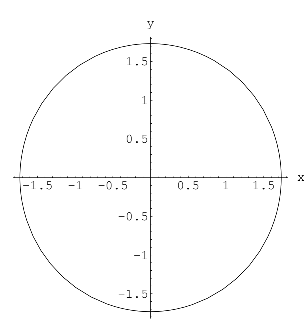


Bild 11.1 Kreis $x^2 + y^2 = 3$

(ii) $4x^2 + 9y^2 = 36$

$\Leftrightarrow \quad \dfrac{x^2}{3^2} + \dfrac{y^2}{2^2} = 1$

beschreibt eine Ellipse

mit den Halbachsen

$a = 3$ und $b = 2$

um $(0, 0)$

$(x, y) = (3\cos(\varphi), 2\sin(\varphi))$

mit $-\pi \le \varphi < \pi$

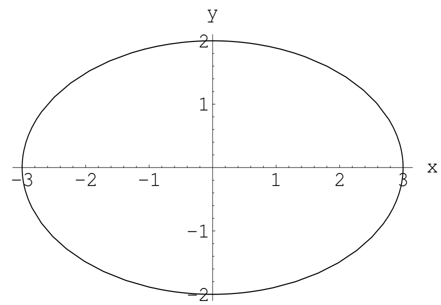


Bild 11.2 Ellipse $\dfrac{x^2}{3^2} + \dfrac{y^2}{2^2} = 1$

(iii) Durch quadratische Ergänzungen ergibt sich

$16x^2 + 3y^2 + 6y + 3$
$= 16x^2 + 3(y+1)^2 = 48$

$\Leftrightarrow \ \dfrac{x^2}{(\sqrt{3})^2} + \dfrac{(y+1)^2}{4^2} = 1$

Dies ist eine Ellipse

um den Mittelpunkt $(0, -1)$

mit den Halbachsen
$a = \sqrt{3}$ und $b = 4$

$(x, y) = (\sqrt{3}\cos(\varphi), 4\sin(\varphi) - 1)$

mit $-\pi \le \varphi < \pi$

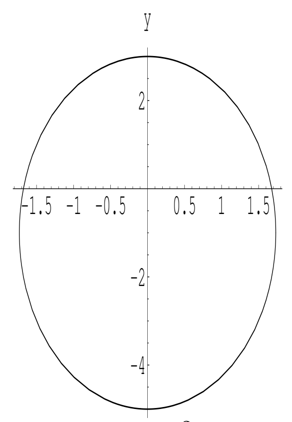


Bild 11.3 Ellipse $\dfrac{x^2}{(\sqrt{3})^2} + \dfrac{(y+1)^2}{4^2} = 1$

(iv) Durch quadratische Ergänzung ergibt sich

$x^2 - 6x + 9 + y^2$
$= (x-3)^2 + y^2 = 5^2.$

Dies ist ein Kreis um den Mittelpunkt $(3, 0)$ mit Radius $r = 5$

$(x, y) = (5\cos(\varphi) + 3, 5\sin(\varphi))$

mit $-\pi \le \varphi < \pi$

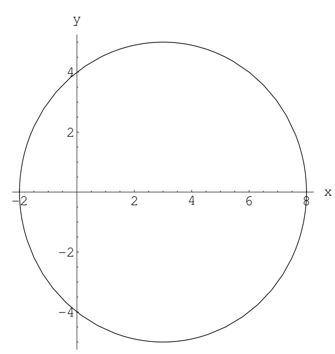


Bild 11.4 Kreis $(x-3)^2 + y^2 = 5^2$

b) (i) $x \le 0,\ x^2 + y^2 \le 4$ und $1 \le z \le 3$,

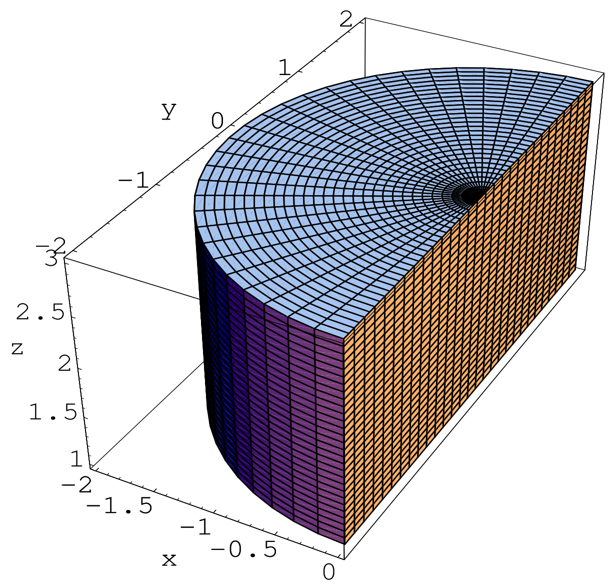


Bild 11.5 halber Zylinder Z

Zylinderkoordinaten für Z: $\boldsymbol{u} = (r, \varphi, z)^T$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos(\varphi) \\ r\sin(\varphi) \\ z \end{pmatrix} = \boldsymbol{\Phi}(r, \varphi, z)$$

mit $\quad 0 \le r \le 2\,, \quad \dfrac{\pi}{2} \le \varphi \le \dfrac{3\pi}{2}\,, \quad 1 \le z \le 3$

(ii) $x^2 + y^2 + z^2 \le 16\,,\ 0 \le y.$

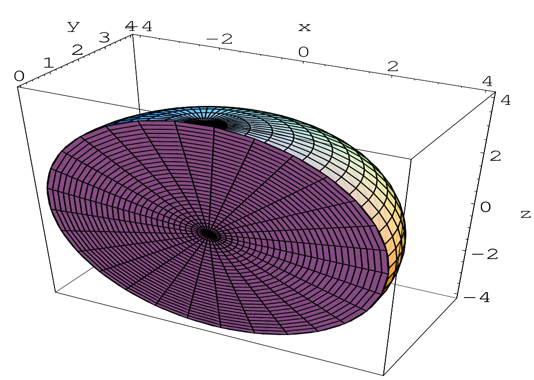


Bild 11.6 Halbkugel H

Kugelkoordinaten für H: $\boldsymbol{u} = (r, \varphi, \theta)^T$

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \boldsymbol{\Phi}(r, \varphi, \theta) = \begin{pmatrix} r\cos(\varphi)\cos(\theta) \\ r\sin(\varphi)\cos(\theta) \\ r\sin(\theta) \end{pmatrix}$$

$$\text{mit} \quad 0 \le r \le 4\,, \quad 0 \le \varphi \le \pi\,, \quad -\frac{\pi}{2} \le \theta \le \frac{\pi}{2}$$

Lösung 12:

a)

$$\boldsymbol{\Phi}(x,y) = \begin{pmatrix} u(x,y) \\ v(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x-y \\ x+y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

ist eine lineare Transformation, genauer sogar eine Drehstreckung um 45° mit dem Faktor $\sqrt{2}$, denn:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \sqrt{2} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} = \sqrt{2} \begin{pmatrix} \cos 45^\circ & -\sin 45^\circ \\ \sin 45^\circ & \cos 45^\circ \end{pmatrix}.$$

$$\boldsymbol{J\Phi}(x,y) = \begin{pmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \det(\boldsymbol{J\Phi}(x,y)) = 2$$

b)

$$\boldsymbol{\Phi}^{-1}(u,v) = \begin{pmatrix} x(u,v) \\ y(u,v) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (u+v)/2 \\ (v-u)/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{J\Phi}^{-1}(u,v) = \begin{pmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{pmatrix} = (\boldsymbol{J\Phi})^{-1},$$

$\det(\boldsymbol{J\Phi}^{-1}(u,v)) = 1/2$

c)

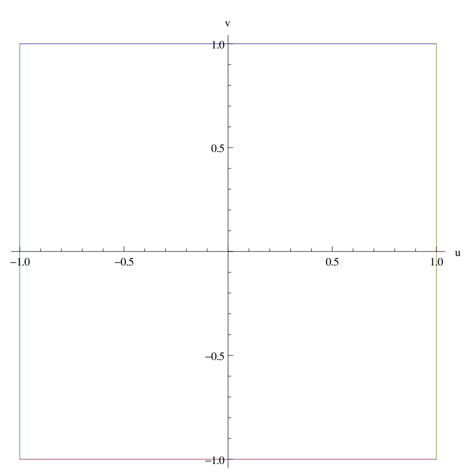


Bild 12 a: Q

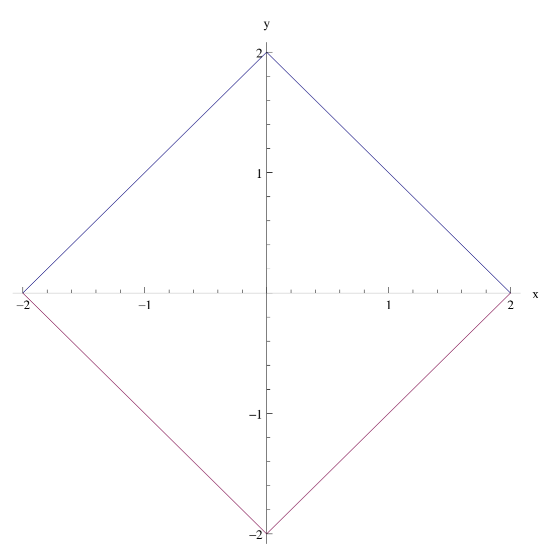


Bild 12 b: $\boldsymbol{\Phi}(Q)$

Lösung 13:

a)

$$
\begin{aligned}
&f(x,y,z) = 1+z+xy+x^2(1-y)^2+(y+z)^3 && \Rightarrow \quad f(0,0,0)=1\\[1em]
&f_x(x,y,z) = y+2x(1-y)^2 && \Rightarrow \quad f_x(0,0,0)=0\\
&f_y(x,y,z) = x-2x^2(1-y)+3(y+z)^2 && \Rightarrow \quad f_y(0,0,0)=0\\
&f_z(x,y,z) = 1+3(y+z)^2 && \Rightarrow \quad f_z(0,0,0)=1\\[1em]
&f_{xx}(x,y,z) = 2(1-y)^2 && \Rightarrow \quad f_{xx}(0,0,0)=2\\
&f_{xy}(x,y,z) = 1-4x(1-y) && \Rightarrow \quad f_{xy}(0,0,0)=1\\
&f_{xz}(x,y,z) = 0 && \Rightarrow \quad f_{xz}(0,0,0)=0\\
&f_{yy}(x,y,z) = 2x^2+6(y+z) && \Rightarrow \quad f_{yy}(0,0,0)=0\\
&f_{yz}(x,y,z) = 6(y+z) && \Rightarrow \quad f_{yz}(0,0,0)=0\\
&f_{zz}(x,y,z) = 6(y+z) && \Rightarrow \quad f_{zz}(0,0,0)=0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\Rightarrow T_2(x,y,z;0,0,0) \quad = \quad & f(0,0,0)+f_x(0,0,0)x+f_y(0,0,0)y+f_z(0,0,0)z\\
&+\frac{1}{2}\left(f_{xx}(0,0,0)x^2+f_{yy}(0,0,0)y^2+f_{zz}(0,0,0)z^2\right.\\
&\left.+2f_{xy}(0,0,0)xy+2f_{xz}(0,0,0)xz+2f_{yz}(0,0,0)yz\right)\\[1em]
= \quad & 1+z+xy+x^2
\end{aligned}
$$

Da der Entwicklungspunkt der Nullpunkt ist, wäre es einfacher gewesen die gegebene Funktion auszumultiplizieren und die Terme oberhalb der quadratischen, dann wegzulassen:

$$f(x,y,z) = 1+z+xy+x^2-2yx^2+x^2y^2+y^3+3y^2z+3yz^2+z^3\,.$$

b)

$$
\begin{aligned}
&f(x,y) = x\sin(x+y) && \Rightarrow \quad f\,(0,\pi/2)=0\\
&f_x(x,y) = \sin(x+y)+x\cos(x+y) && \Rightarrow \quad f_x\,(0,\pi/2)=1\\
&f_y(x,y) = x\cos(x+y) && \Rightarrow \quad f_y\,(0,\pi/2)=0\\
&f_{xx}(x,y) = 2\cos(x+y)-x\sin(x+y) && \Rightarrow \quad f_{xx}\,(0,\pi/2)=0\\
&f_{xy}(x,y) = \cos(x+y)-x\sin(x+y) && \Rightarrow \quad f_{xy}\,(0,\pi/2)=0\\
&f_{yy}(x,y) = -x\sin(x+y) && \Rightarrow \quad f_{yy}\,(0,\pi/2)=0\\
&f_{xxx}(x,y) = -3\sin(x+y)-x\cos(x+y) && \Rightarrow \quad f_{xxx}\,(0,\pi/2)=-3\\
&f_{xxy}(x,y) = -2\sin(x+y)-x\cos(x+y) && \Rightarrow \quad f_{xxy}\,(0,\pi/2)=-2\\
&f_{xyy}(x,y) = -\sin(x+y)-x\cos(x+y) && \Rightarrow \quad f_{xyy}\,(0,\pi/2)=-1\\
&f_{yyy}(x,y) = -x\cos(x+y) && \Rightarrow \quad f_{yyy}\,(0,\pi/2)=0
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow T_3(x,y;0,\pi/2) &= f(0,\pi/2) + f_x(0,\pi/2)x + f_y(0,\pi/2)(y-\pi/2) \\
&\quad + \frac{1}{2}\big(f_{xx}(0,\pi/2)x^2 + 2f_{xy}(0,\pi/2)x(y-\pi/2) \\
&\qquad + f_{yy}(0,\pi/2)(y-\pi/2)^2\big) \\
&\quad + \frac{1}{6}\big(f_{xxx}(0,\pi/2)x^3 + 3f_{xxy}(0,\pi/2)x^2(y-\pi/2) \\
&\qquad + 3f_{xyy}(0,\pi/2)x(y-\pi/2)^2 + f_{yyy}(0,\pi/2)(y-\pi/2)^3\big) \\
&= x - x^3/2 - x^2(y-\pi/2) - x(y-\pi/2)^2/2
\end{aligned}$$

Lösung 14:

$$\begin{array}{lcl}
h(x,y) = \cos(x^2+y^2) & \Rightarrow & h(0,0) = 1 \\
 & & \\
h_x(x,y) = -2x\sin(x^2+y^2) & \Rightarrow & h_x(0,0) = 0 \\
h_y(x,y) = -2y\sin(x^2+y^2) & \Rightarrow & h_y(0,0) = 0 \\
h_{xx}(x,y) = -2\sin(x^2+y^2) - 4x^2\cos(x^2+y^2) & \Rightarrow & h_{xx}(0,0) = 0 \\
h_{xy}(x,y) = -4xy\cos(x^2+y^2) & \Rightarrow & h_{xy}(0,0) = 0 \\
h_{yy}(x,y) = -2\sin(x^2+y^2) - 4y^2\cos(x^2+y^2) & \Rightarrow & h_{yy}(0,0) = 0
\end{array}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow T_2(x,y;0,0) &= h(0,0) + h_x(0,0)x + h_y(0,0)y \\
&\quad + \frac{1}{2}\left(h_{xx}(0,0)x^2 + 2h_{xy}(0,0)xy + h_{yy}(0,0)y^2\right) = 1
\end{aligned}$$

MATLAB-Befehl für den Flächenplot:

```
ezsurf('cos(x^2+y^2)',[-2.5,2.5,-2.5,2.5])
```

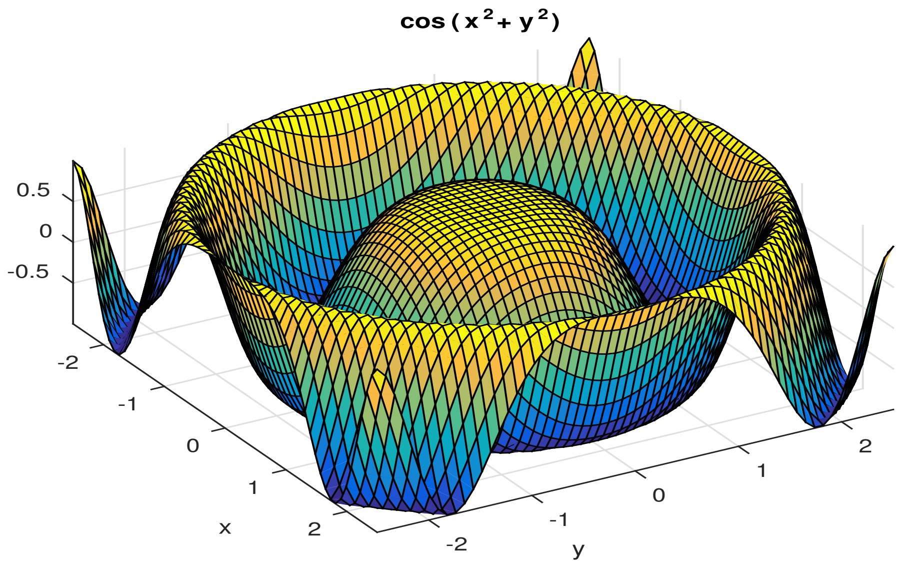


Bild 14: $h(x,y) = \cos(x^2+y^2)$

Für die Fehlerabschätzung sind die dritten Ableitungen erforderlich

$$\begin{aligned}
h_{xxx}(x,y) &= -12x\cos(x^2+y^2) + 8x^3\sin(x^2+y^2)\\
h_{xxy}(x,y) &= -4y\cos(x^2+y^2) + 8x^2y\sin(x^2+y^2)\\
h_{xyy}(x,y) &= -4x\cos(x^2+y^2) + 8y^2x\sin(x^2+y^2)\\
h_{yyy}(x,y) &= -12y\cos(x^2+y^2) + 8y^3\sin(x^2+y^2).
\end{aligned}$$

Die Fehlerabschätzung für beliebiges $(x,y) \in [0,\pi/4]\times[0,\pi/4]$ zieht mit $\theta \in]0,1[$ ein beliebiges $(\xi_1,\xi_2) := (0,0) + \theta(x,y) \in]0,\pi/4[\times]0,\pi/4[$ nach sich. Mit der Hilfe der Dreiecksungleichung erhält man:

$$\begin{aligned}
&|h(x,y) - T_2(x,y;0,0)| = |R_2(x,y;0,0)|\\
=\ & \frac{1}{3!}\left|h_{xxx}(\xi_1,\xi_2)x^3 + 3h_{xxy}(\xi_1,\xi_2)x^2y + 3h_{xyy}(\xi_1,\xi_2)xy^2 + h_{yyy}(\xi_1,\xi_2)y^3\right|\\
\leq\ & \frac{1}{3!}\left(|h_{xxx}(\xi_1,\xi_2)|\cdot|x|^3 + 3\,|h_{xxy}(\xi_1,\xi_2)|\cdot|x^2y|\right.\\
& \left.+3\,|h_{xyy}(\xi_1,\xi_2)|\cdot|xy^2| + |h_{yyy}(\xi_1,\xi_2)|\cdot|y^3|\right).
\end{aligned}$$

Jeder der vier Summanden kann nun jeweils noch oben abgeschätzt werden. Dabei wird $|\sin t| \leq 1$ und $|\cos t| \leq 1$ verwendet.

$$\begin{aligned}
&|h_{xxx}(\xi_1,\xi_2)|\cdot|x|^3 = |-12\xi_1\cos(\xi_1^2+\xi_2^2) + 8\xi_1^3\sin(\xi_1^2+\xi_2^2)|\cdot|x|^3\\
\leq\ & (|-12\xi_1|\cdot|\cos(\xi_1^2+\xi_2^2)| + |8\xi_1^3|\cdot|\sin(\xi_1^2+\xi_2^2)|)\cdot|x|^3\\
\leq\ & \left(12\cdot\frac{\pi}{4} + 8\cdot\left(\frac{\pi}{4}\right)^3\right)\left(\frac{\pi}{4}\right)^3
\end{aligned}$$

Entsprechend erhält man

$$3\,|h_{xxy}(\xi_1,\xi_2)|\cdot|x^2y| \leq 3\left(4\cdot\frac{\pi}{4}+8\cdot\left(\frac{\pi}{4}\right)^3\right)\left(\frac{\pi}{4}\right)^3$$

$$3\,|h_{xyy}(\xi_1,\xi_2)|\cdot|xy^2| \leq 3\left(4\cdot\frac{\pi}{4}+8\cdot\left(\frac{\pi}{4}\right)^3\right)\left(\frac{\pi}{4}\right)^3$$

$$|h_{yyy}(\xi_1,\xi_2)|\cdot|y^3| \leq \left(12\cdot\frac{\pi}{4}+8\cdot\left(\frac{\pi}{4}\right)^3\right)\left(\frac{\pi}{4}\right)^3$$

Insgesamt erhält man also

$$|h(x,y)-T_2(x,y;0,0)| \leq \frac{\pi^3}{3!4^3}\left(48\cdot\frac{\pi}{4}+64\cdot\left(\frac{\pi}{4}\right)^3\right) = 5.5476...$$

Der tatsächliche Maximalfehler wird angenommen für $x = y = \dfrac{\pi}{4}$.

$$|h\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right) - T_2\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4};0,0\right)| = |\cos\left(2\cdot\frac{\pi^2}{4^2}\right)-1| = 0.669252...$$

Lösung 15:

a) $\text{grad } f(x,y) = e^{-x^2-y^2}(2x(1-x^2+y^2), 2y(-1-x^2+y^2))^T = (0,0)^T$

Zur Berechnung der stationären Punkte werden für $f_x(x,y) = 0$ alle Fälle untersucht.

1.Fall: $x = 0 \Rightarrow 0 = f_y(0,y) = e^{-y^2}2y(-1+y^2)$

$\Rightarrow\ y = 0,\ y = 1,\ y = -1$

$\Rightarrow$ stationäre Punkte: $P_1 = (0,0),\ P_2 = (0,1),\ P_3 = (0,-1)$

2.Fall: $1-x^2+y^2 = 0 \Rightarrow x^2 = 1+y^2$
$\Rightarrow\ 0 = f_y(x,y) = e^{-(1+y^2)-y^2}2y(-1-(1+y^2)+y^2) = -4ye^{-1-2y^2}$
$\Rightarrow\ y = 0 \Rightarrow x = 1,\ x = -1$
$\Rightarrow$ stationäre Punkte: $P_4 = (1,0),\ P_5 = (-1,0)$

$\boldsymbol{H}f(x,y) =$

$$2e^{-x^2-y^2}\begin{pmatrix} 1-5x^2+2x^4+y^2-2x^2y^2 & 2xy(x^2-y^2) \\ 2xy(x^2-y^2) & -1+5y^2-2y^4-x^2+2x^2y^2 \end{pmatrix}$$

$\boldsymbol{H}f(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ ist indefinit

$\Rightarrow\quad P_1 = (0,0)$ ist Sattelpunkt.

$\boldsymbol{H}f(0,\pm 1) = 2e^{-1}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ ist positiv definit

$\Rightarrow\ P_{2,3} = (0, \pm 1)$ sind Minima.

$\boldsymbol{H}f(\pm 1, 0) = -2e^{-1}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ ist negativ definit

$\Rightarrow\ P_{4,5} = (\pm 1, 0)$ sind Maxima.

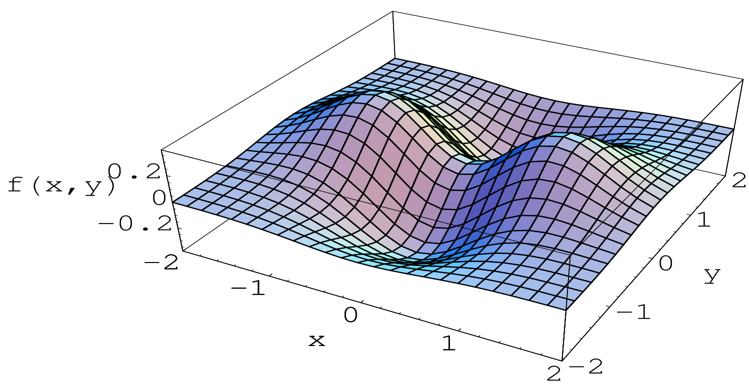


Bild 15 a): $f(x,y) = (x^2 - y^2)e^{-x^2-y^2}$

b) grad $f(x,y) = (0, 3y^2 - 3)^T = (0,0)^T \ \Rightarrow\ y = \pm 1,\ x \in \mathbb{R}$

Die stationären Punkte liegen auf den Geraden $P_1(x) = (x, 1)$ und $P_2(x) = (x, -1)$.

$$\boldsymbol{H}f(x,y) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 6y \end{pmatrix}$$

$\boldsymbol{H}f(x,1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$ ist positiv semidefinit

$\Rightarrow\ P_1(x) = (x, 1)$ sind keine lokalen Maxima.

$\boldsymbol{H}f(x,-1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -6 \end{pmatrix}$ ist negativ semidefinit

$\Rightarrow\ P_2(x) = (x, -1)$ sind keine lokalen Minima.

f ist unabhängig von x, d.h. für festes $y = c$ gilt $f(x,c) = \textit{konstant}$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Die Extrema sind also die von $g(y) = y(y^2 - 3)$, d.h. alle Punkte der Geraden $P_1(x) = (x, 1)$ sind lokale Minima und für $P_2(x) = (x, -1)$ erhält man lokale Maxima.

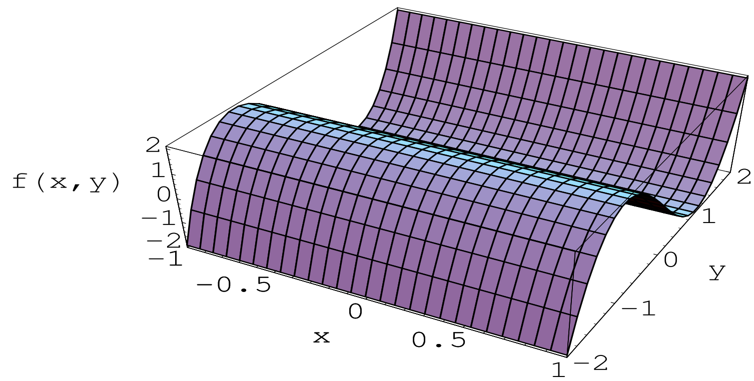


Bild 15 b): $f(x,y) = y(y^2-3)$

c) grad $f(x,y) = 2\cos(x^2+y^2)(x,y)^T = (0,0)^T$

Die stationären Punkte sind also gegeben durch $(0,0)$ und
alle Punkte P, für die $x^2+y^2 = \pi/2 + n\pi$ mit $n \in \mathbb{N}_0$ gilt.

$\boldsymbol{H} f(x,y) =$

$$\begin{pmatrix} 2\cos(x^2+y^2) - 4x^2\sin(x^2+y^2) & -4xy\sin(x^2+y^2) \\ -4xy\sin(x^2+y^2) & 2\cos(x^2+y^2) - 4y^2\sin(x^2+y^2) \end{pmatrix}$$

$\boldsymbol{H} f(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ ist positiv definit

$\Rightarrow \quad (0,0)$ ist Minimum.

$\boldsymbol{H} f(P) = \begin{pmatrix} -4x^2\sin(x^2+y^2) & -4xy\sin(x^2+y^2) \\ -4xy\sin(x^2+y^2) & -4y^2\sin(x^2+y^2) \end{pmatrix}$

ist semidefinit, denn det $\boldsymbol{H} f(P) = 0$.

Wir klassifizieren daher anders:

Für die Punkte P auf den Kreisen $x^2+y^2 = \pi/2 + n\pi$ gilt $\sin(\pi/2 + n\pi) = (-1)^n$. Deshalb liegen für gerades n Maxima und für ungerades n Minima auf diesen Kreisen vor.

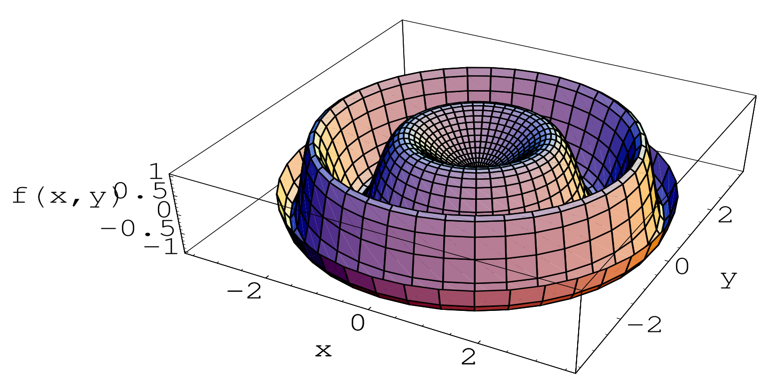


Bild 15 c): $f(x,y) = \sin(x^2 + y^2)$

d) Für $x + y \neq 0$ ist $f(x,y) = |x+y|$ stetig differenzierbar und es gilt

$$\text{grad } f(x,y) = \begin{cases} (1,1)^T & , \quad x+y>0 \\ -(1,1)^T & , \quad x+y<0. \end{cases}$$

In den offenen Halbebenen liegen also keine Extrema vor, da die notwendige Bedingung verletzt ist.

Es gilt $f(x,y) = |x+y| \geq 0$ und $f(x,-x) = 0$. Also nimmt f auf der Geraden $y = -x \Leftrightarrow x + y = 0$ den global kleinsten Funktionswert an.

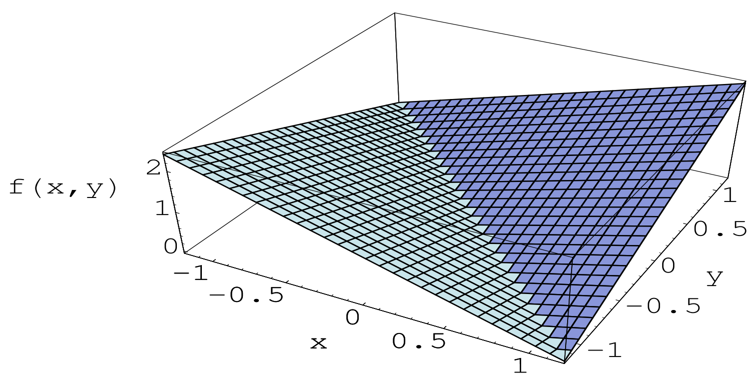


Bild 15 d): $f(x,y) = |x+y|$

Lösung 16:

a) $\text{grad } f(x,y) = (4x(8x^2 - 5y), -10x^2 + 6y)^T = 0$

1.Fall: $x = 0 \Rightarrow 6y = 0 \Rightarrow$ stationärer Punkt $(x_0, y_0) = (0,0)$.

2.Fall: $8x^2 - 5y = 0 \Rightarrow y = 8x^2/5 \Rightarrow -10x^2 + 6 \cdot 8x^2/5 = 0 \Rightarrow x = 0$

Einziger stationärer Punkt ist also $(0,0)$.

b) $\boldsymbol{H} f(x,y) = \begin{pmatrix} 96x^2 - 20y & -20x \\ -20x & 6 \end{pmatrix} \Rightarrow \boldsymbol{H} f(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$

ist positiv semidefinit, und das hinreichende Kriterium ist nicht anwendbar.

Die notwendige Bedingung II lässt für den stationären Punkt $(x_0, y_0) = (0,0)$ noch die Möglichkeiten Minimum oder Sattelpunkt zu.

c) Auf der Geraden $x = 0$ wird die Funktion beschrieben durch

$$g(y) := f(0, y) = 3y^2.$$

Für $y = 0$ besitzt g ein striktes lokales Minimum.

Alle anderen Ursprungsgeraden können durch $y = ax$ mit $a \in \mathbb{R}$ dargestellt werden, und die Funktion wird dann durch

$$h(x) := f(x, ax) = 8x^4 - 10ax^3 + 3a^2x^2$$

beschrieben. Für $a = 0$ wird h in $x = 0$ minimal. Für $a \neq 0$ erhält man in $x = 0$ auch ein Minimum, denn es gilt

$$h'(x) = 32x^3 - 30ax^2 + 6a^2x \quad \Rightarrow \quad h'(0) = 0$$

und

$$h''(x) = 96x^2 - 60ax + 6a^2 \quad \Rightarrow \quad h''(0) = 6a^2 > 0\,.$$

d) Auf der Parabel $y = ax^2$ hat die Funktion die Gestalt

$$p(x) := f(x, ax^2) = 8x^4 - 10ax^4 + 3a^2x^4 = x^4(3a^2 - 10a + 8) = x^4(a-2)(3a-4).$$

Damit erhält man

$$\begin{array}{rcrcrcl} p'(x) & = & 4x^3(a-2)(3a-4) & \Rightarrow & p'(0) & = & 0 \\ p''(x) & = & 12x^2(a-2)(3a-4) & \Rightarrow & p''(0) & = & 0 \\ p'''(x) & = & 24x(a-2)(3a-4) & \Rightarrow & p'''(0) & = & 0 \\ p''''(x) & = & 24(a-2)(3a-4) & \Rightarrow & p''''(0) & = & 24(a-2)(3a-4)\,. \end{array}$$

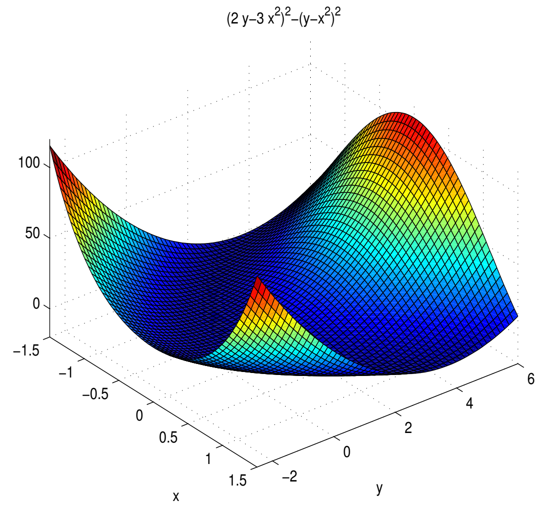
Für $a \in \,]4/3, 2[$ ist $p''''(0) < 0$ und in $x = 0$ liegt ein striktes Maximum vor.

Für $a \notin \, [4/3, 2]$ ist $p''''(0) > 0$ und in $x = 0$ liegt ein striktes Minimum vor.

Bei dem stationären Punkt $(0, 0)$ handelt es sich also um einen Sattelpunkt.

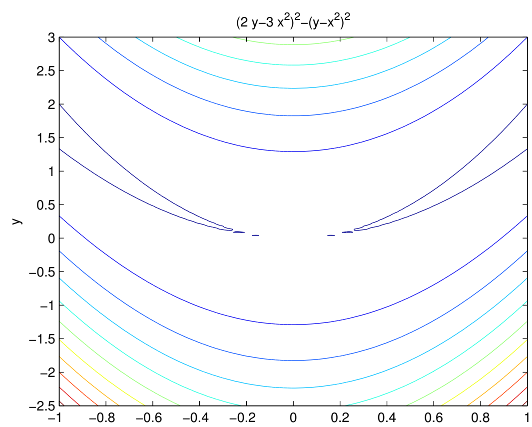
Hätte man gewusst, dass $f(x, y) = (2y - 3x^2)^2 - (y - x^2)^2$ gilt, hätte man auf der Ursprungsparabel $2y - 3x^2 = 0$ in $x = 0$ sofort ein Maximum und auf $y - x^2 = 0$ in $x = 0$ sofort ein Minimum erkannt und hätte dann sofort auf den Sattelpunkt schließen können.

e)



`ezsurf('8*x^4-10*x^2*y+3*y^2',[-1.5,1.5,-2.5,6])`

Bild 16 a) $f(x,y) = 8x^4 - 10x^2y + 3y^2$



`ezcontour('8*x^4-10*x^2*y+3*y^2',[-1,1,-2.5,3])`

Bild 16 b) $f(x,y) = 8x^4 - 10x^2y + 3y^2$

Lösung 17:

$f(x,y) := x^3 + y^3 - xy = 0\,, \quad \text{grad}\, f(x,y) = (3x^2 - y, 3y^2 - x)^T$

a) Die Kurve ist symmetrisch zur Winkelhalbierenden, d.h. es gilt $f(x,y) = f(y,x)$. Wir erinnern uns dabei an die Spiegelungsmatrix $\S_\alpha$:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \cos(2\cdot\pi/4) & \sin(2\cdot\pi/4) \\ \sin(2\cdot\pi/4) & -\cos(2\cdot\pi/4) \end{pmatrix}}_{=\S_{\pi/4}} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix}.$$

b) Kurvenpunkte mit horizontaler Tangente ergeben sich aus den Bedingungen

$$f_x(x,y) = 0 \quad \wedge \quad f(x,y) = 0 \quad \wedge \quad f_y(x,y) \neq 0\,.$$

$0 = f_x(x,y) = 3x^2 - y \quad \Rightarrow \quad y = 3x^2 \quad \Rightarrow$

$0 = f(x, 3x^2) = x^3 + (3x^2)^3 - x3x^2 = x^3(27x^3 - 2)$

$\Rightarrow \quad x = 0 \vee x = \dfrac{2^{1/3}}{3}$

$$\Rightarrow \quad P_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \; P_1 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2^{1/3} \\ 2^{2/3} \end{pmatrix}.$$

Nur für P_1 gilt die Bedingung $f_y(P_1) \neq 0$. Also ist P_1 ein Punkt mit horizontaler Tangente.

c) Kurvenpunkte mit vertikaler Tangente ergeben sich aus den Bedingungen

$$f_y(x,y) = 0 \quad \wedge \quad f(x,y) = 0 \quad \wedge \quad f_x(x,y) \neq 0\,.$$

$0 = f_y(x,y) = 3y^2 - x \quad \Rightarrow \quad x = 3y^2 \quad \Rightarrow$

$0 = f(3y^2, y) = (3y^2)^3 + y^3 - 3y^2y = y^3(27y^3 - 2)$

$\Rightarrow \quad y = 0 \vee y = \dfrac{2^{1/3}}{3}$

$$\Rightarrow \quad P_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \; P_2 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2^{2/3} \\ 2^{1/3} \end{pmatrix}.$$

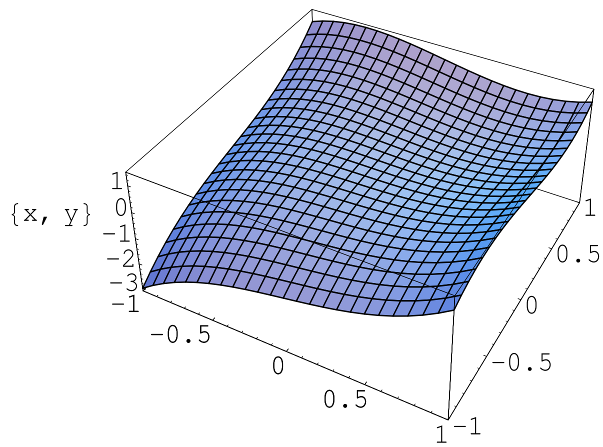
Nur für P_2 gilt die Bedingung $f_x(P_2) \neq 0$. Also ist P_2 ein Punkt mit vertikaler Tangente. Dieses ergibt sich auch ohne Rechnung aus der Symmetrie.

d) Für $P_0 = (0,0)^T$ gilt $\text{grad} f(0,0) = \mathbf{0}$, damit ist P_0 ein singulärer Punkt.

$$\boldsymbol{H} f(x,y) = \begin{pmatrix} 6x & -1 \\ -1 & 6y \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{H} f(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Wegen $\det \boldsymbol{H} f(0,0) = -1 < 0$ handelt es sich bei P_0 um einen Doppelpunkt.

e)



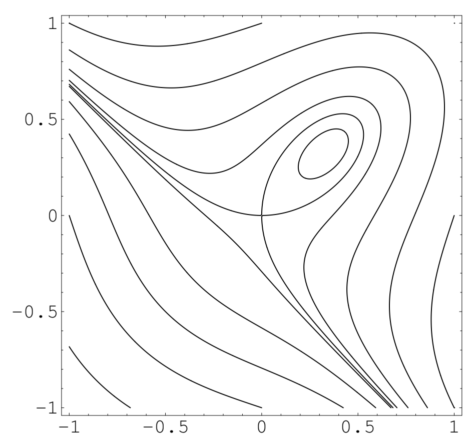


Bild 17 $\quad f(x,y) = x^3 + y^3 - xy = c$

für $c = -2, -1, -0.5, -0.2, -0.025, 0, 0.05, 0.2, 0.5, 1$

Lösung 18:

a) Durch quadratische Ergänzungen kann h übersichtlicher dargestellt werden:

$$h(x,y,z) = z^2 + y^2 - x^2 + 4z - 2x + 3 = (z+2)^2 + y^2 - (x+1)^2$$

Wegen $h(-1,1,-2) = 1$ stellt sich die Niveaumenge als einschaliges Hyperboloid heraus und wird damit durch die standardisierte implizite Gleichung

$$g(x,y,z) := (z+2)^2 + y^2 - (x+1)^2 - 1 = 0$$

beschrieben. Um festzustellen, ob $g(x,y,z) = 0$ in der Umgebung des Punktes $(-1,1,-2)$ eine glatte Fläche bildet muss die Voraussetzung des Satzes über implizite Funktionen überprüft werden:

grad $g(x,y,z) = (-2(x+1), 2y, 2(z+2))^T \Rightarrow$ grad $g(-1,1,-2) = (0,2,0)^T$.

Damit ist nur $g_y(-1,1,-2) = 2$ invertierbare 1×1 Untermatrix. Nach dem Satz über implizite Funktionen bildet die Niveaumenge also eine glatte Fläche, die durch Auflösen von $g(x,y,z) = 0$ nach y beschreibbar ist, d.h. es gilt in einer Umgebung von $(-1,1,-2)$

$$y = f(x,z)\,, \quad \text{mit} \quad f(-1,-2) = 1 \quad \text{und} \quad g(x, f(x,z), z) = 0\,.$$

b) Auflösen der impliziten Gleichung $g(x,y,z) = 0$ ergibt zunächst

$$y = \pm\sqrt{1 + (x+1)^2 - (z+2)^2}.$$

Aus diesen beiden Möglichkeiten folgt wegen $y = f(-1,-2) = 1$

$$f(x,z) = \sqrt{1 + (x+1)^2 - (z+2)^2}\,.$$

c) In $(-1,1,-2)$ wird die Fläche f näherungsweise beschrieben durch die zugehörige Tangentialebene T_1, in vektorwertiger Schreibweise bedeutet dies:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ f(x,z) \\ z \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} x \\ T_1(x,z;-1,-2) \\ z \end{pmatrix}$$

Zur Darstellung der Tangentialebene wird die durch implizites Differenzieren der Gleichung $g(x, f(x,z), z) = 0$ mittels Kettenregel entstehende Jacobimatrix von f benötigt:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{J}f(x,z) &= (f_x, f_z) \;=\; -(g_y)^{-1}(g_x, g_z) \\ &= -\frac{1}{2y}(-2x-2, 2z+4) \\ \Rightarrow \qquad \boldsymbol{J}f(-1,-2) &= -\frac{1}{2\cdot 1}(0,0) = (0,0)\,. \end{aligned}$$

Damit lautet die Parameterform der Tangentialebene

$$\begin{pmatrix} x \\ T_1(x,z;-1,-2) \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ f(-1,-2) + \boldsymbol{J}f(-1,-2)\begin{pmatrix} x+1 \\ z+2 \end{pmatrix} \\ z \end{pmatrix}$$

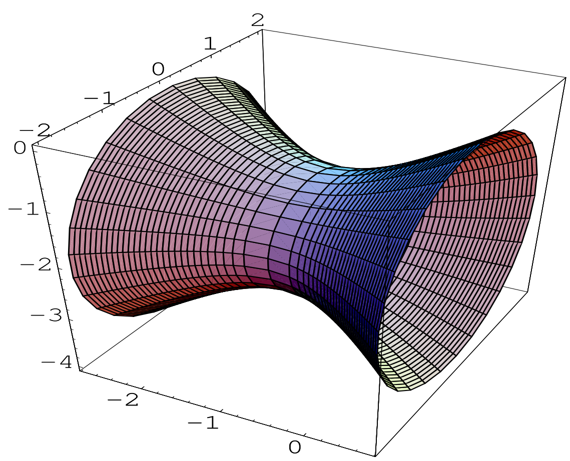
$$= \begin{pmatrix} x \\ 1 \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + (x+1)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + (z+2)\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

d) Unter Verwendung von Polarkoordinaten kann die Fläche

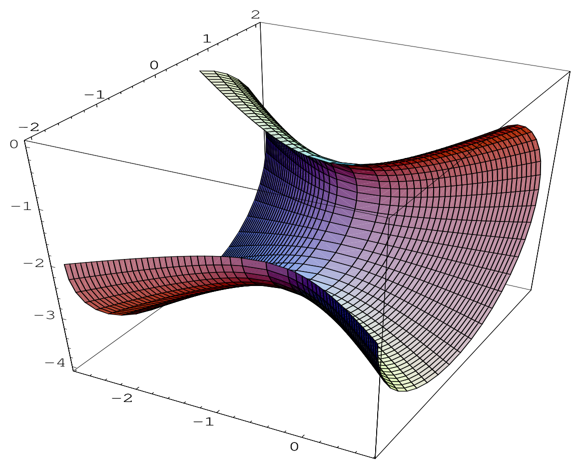
$$h(x,y,z) = (z+2)^2 + y^2 - (x+1)^2 = 1$$

folgendermaßen durch $(r,\varphi) \in [1,R] \times [0,2\pi]$ parametrisiert werden:

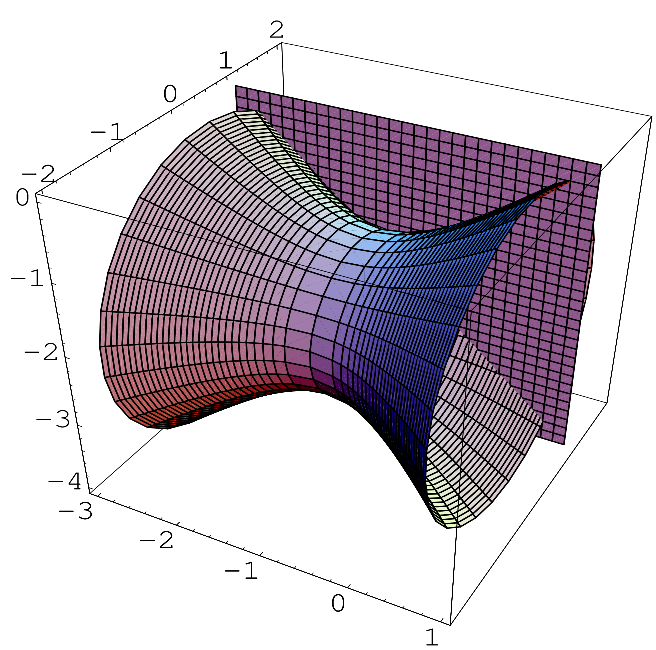
$$y = r\cos\varphi\,,\ z = r\sin\varphi - 2 \ \Rightarrow\ p_\pm(r,\varphi) = \begin{pmatrix} -1 \pm \sqrt{r^2-1} \\ r\cos\varphi \\ r\sin\varphi - 2 \end{pmatrix}$$



ohne Tangentialebene



aufgeschnitten



mit Tangentialebene

Bild 18 einschaliges Hyperboloid $(z+2)^2 + y^2 - (x+1)^2 = 1$

Lösung 19:

Unter der Nebenbedingung $g(x, y) := x^2 + y^2 - 1 = 0$ sollen die Extremalpunkte der Funktion $f(x, y) = x + y$ bestimmt werden.

a) Regularitätsbedingung:

grad $g(x, y) = (2x, 2y) = (0, 0) \Rightarrow (x, y) = (0, 0)$

Da $g(0, 0) = -1$ gilt, $(0, 0)$ also nicht auf dem Kreis liegt, erfüllen alle zulässigen Punkte ($g(x, y) = 0$) die Regularitätsbedingung

$$\mathrm{Rang}(\boldsymbol{J} g(x, y)) = 1.$$

Lagrange-Funktion: $F(x, y) = x + y + \lambda(x^2 + y^2 - 1)$

Lagrange-Multiplikatorenregel:

$$\begin{pmatrix} \nabla F(x, y) \\ g(x, y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + 2\lambda x \\ 1 + 2\lambda y \\ x^2 + y^2 - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Multipliziert man die erste Gleichung mit y und die zweite mit x und subtrahiert beide, so erhält man $x - y = 0 \;\Rightarrow\; x = y$.

Aus der dritten Gleichung ergibt sich dann $x^2 + x^2 = 1$

$$\Rightarrow \quad x_{1,2} = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}\,, \quad y_{1,2} = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Extremalkandidaten:

$$P_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\,, \quad P_2 = -\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\,.$$

Da die Menge $g(x, y) = 0$ einen Kreis beschreibt, ist sie kompakt. Damit nimmt die stetige Funktion f auf $g(x, y) = 0$ Maximum und Minimum an. Es ist $f(P_1) = \sqrt{2}$ und $f(P_2) = -\sqrt{2}$. Also ist P_1 Maximum und P_2 Minimum.

Alternative Begründung über die hinreichende Bedingung 2. Ordnung:

Für die Extremalkandidaten $P_{1,2}$ wird die Definitheitseigenschaft der Hesse-Matrix

$$\text{Hess}F(x,y) = \begin{pmatrix} 2\lambda & 0 \\ 0 & 2\lambda \end{pmatrix}$$

auf dem Kern von $\boldsymbol{Jg}(x,y) = \text{grad}\; g(x,y) = (2x, 2y)$ überprüft.

$$P_{1,2} = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}(1,1)^T \Rightarrow \boldsymbol{Jg}(P_{1,2}) = \pm(\sqrt{2},\sqrt{2}) \Rightarrow TG(P_{1,2}) = \text{spann}\left\{\boldsymbol{y} := \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right\}$$

Aus $1 + 2\lambda x = 0$ erhält man $\lambda_1 = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ für P_1 und $\lambda_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}$ für P_2.
Damit ergibt sich

$$\text{Hess}F(P_1) = \begin{pmatrix} -\sqrt{2} & 0 \\ 0 & -\sqrt{2} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \text{Hess}F(P_2) = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

Wegen $\boldsymbol{y}^T\text{Hess}F(P_1)\boldsymbol{y} = -2\sqrt{2} < 0$ ist P_1 ein strenges lokales Maximum. Für P_2 erhält man $\boldsymbol{y}^T\text{Hess}F(P_2)\boldsymbol{y} = 2\sqrt{2} > 0$. Damit ist P_2 ein strenges lokales Minimum.

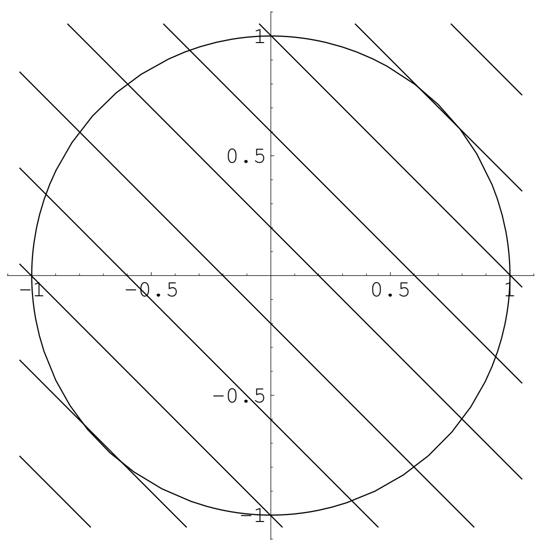


Bild 19 a) Nebenbedingung $g(x,y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$ mit Höhenlinien der Funktion $f(x,y) = x + y$

b) Der Kreis $g(x,y) = x^2+y^2-1 = 0$ kann durch Polarkoordinaten parametrisiert werden

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix} =: \boldsymbol{c}(t)\ , \quad 0 \le t < 2\pi\ ,$$

d.h. es gilt $g(\cos t, \sin t) = 0$. Man muss jetzt also nur noch die Extrema der Funktion

$$h(t) := f(\boldsymbol{c}(t)) = \cos t + \sin t$$

finden.

$$h'(t) = -\sin t + \cos t = 0 \quad \Rightarrow \quad t_1 = \frac{\pi}{4}\ ,\ t_2 = \frac{5\pi}{4}$$

$$h''(t) = -\cos t - \sin t \quad \Rightarrow \quad h''(t_1) = -\sqrt{2} < 0\ ,\ h''(t_2) = \sqrt{2}\ .$$

Damit liegt für $t_1 = \pi/4$ ein Maximum mit dem Funktionswert $h(t_1) = \sqrt{2}$ und für $t_2 = 5\pi/4$ ein Minimum mit dem Funktionswert $h(t_2) = -\sqrt{2}$ vor.

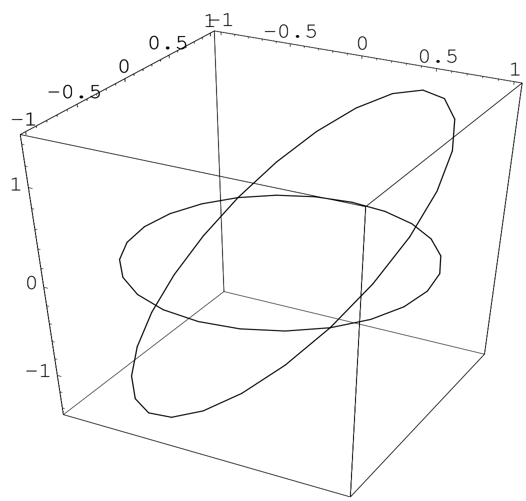


Bild 19 b) $\quad \boldsymbol{c}(t)$ und $f(\boldsymbol{c}(t)) = \cos t + \sin t$

Lösung 20:

Nebenbedingungen: $\quad g_1(x,y,z) := x^2 + y^2 - 9$ und $g_2(x,y,z) = y - z$.

Regularitätsbedingung: $\quad \boldsymbol{Jg}(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2x & 2y & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

besitzt den Rang < 2, wenn die erste Zeile gleich dem Nullvektor ist, d.h. für die Punkte $(0,0,z)$. Diese sind wegen $g_1(0,0,z) = -9$ jedoch nicht zulässig.

Alle zulässigen Punkte erfüllen also die Regularitätsbedingung und die Lagrangesche Multiplikatorregel kann angewendet werden:

Lagrange-Funktion: $\quad F(x,y,z) = z^2 + \lambda_1(x^2 + y^2 - 9) + \lambda_2(y - z)$

<u>Lagrange-Multiplikatorenregel</u>:

$$\begin{pmatrix} \nabla F(x,y,z) \\ g(x,y,z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\lambda_1 x \\ 2\lambda_1 y + \lambda_2 \\ 2z - \lambda_2 \\ x^2+y^2-9 \\ y-z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

1. Gleichung:
1.Fall: $x = 0 \;\Rightarrow\; 0 = g_1(0,y,z) = y^2 - 9 \;\Rightarrow\; y = 3 = z \,\vee\, y = -3 = z$

<u>Extremalkandidaten</u>: $\quad P_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}, \; P_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix}$

2.Fall: $\lambda_1 = 0 \;\Rightarrow\; \lambda_2 = 0 \;\Rightarrow\; z = 0 = y \;\Rightarrow\; x = 3 \,\vee\, x = -3$

<u>Extremalkandidaten</u>: $\quad P_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \; P_4 = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Die stetige Funktion f nimmt auf dem Schnitt des Zylinders $x^2 + y^2 = 9$ mit der Ebene $y = z$ ihr absolutes Maximum und Minimum an, da diese Schnittmenge eine Ellipse und damit kompakt ist. Unter den Extremalkandidaten befinden sich also absolutes Maximum und Minimum.

Für die Funktionswerte der Extremalkandidaten berechnet man

$$f(P_{1,2}) = 9\,, \quad f(P_{3,4}) = 0\,.$$

Also sind $P_{1,2}$ absolute Maxima und $P_{3,4}$ absolute Minima.

Alternative Begründung über die hinreichende Bedingung 2. Ordnung:

Für die Extremalkandidaten $P_{1,2,3,4}$ wird die Definitheitseigenschaft der Hesse-Matrix

$$\mathrm{Hess}F(x,y) = \begin{pmatrix} 2\lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & 2\lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

auf dem Kern von $\boldsymbol{Jg}(x,y) = \begin{pmatrix} 2x & 2y & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ überprüft.

Für $P_{1,2}$ erhält man

$$P_{1,2} = \pm(0,3,3)^T \Rightarrow \boldsymbol{Jg}(P_{1,2}) = \begin{pmatrix} 0 & \pm 6 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow TG(P_{1,2}) = \text{spann}\left\{ \boldsymbol{y} := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$0 = 2z - \lambda_2 = \pm 6 - \lambda_2 \;\Rightarrow\; \lambda_2 = \pm 6 \;\Rightarrow\; 0 = 2\lambda_1 y + \lambda_2 = \pm 6\lambda_1 \pm 6 \;\Rightarrow\; \lambda_1 = -1$

Damit ergeben sich $P_{1,2}$ als strenge lokale Maxima, denn

$$\mathrm{Hess}F(P_{1,2}) = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad\Rightarrow\quad \boldsymbol{y}^T \mathrm{Hess}F(P_{1,2})\boldsymbol{y} = -2 < 0\,.$$

Für $P_{3,4}$ mit $\lambda_1 = 0 = \lambda_2 = 0$ erhält man

$$P_{3,4} = (\pm 3, 0, 0)^T \Rightarrow \boldsymbol{Jg}(P_{3,4}) = \begin{pmatrix} \pm 6 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow TG(P_{3,4}) = \text{spann}\left\{ \boldsymbol{y} := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Damit ergeben sich $P_{3,4}$ als strenge lokale Minima, denn

$$\mathrm{Hess}F(P_{3,4}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad\Rightarrow\quad \boldsymbol{y}^T \mathrm{Hess}F(P_{3,4})\boldsymbol{y} = 2 > 0\,.$$

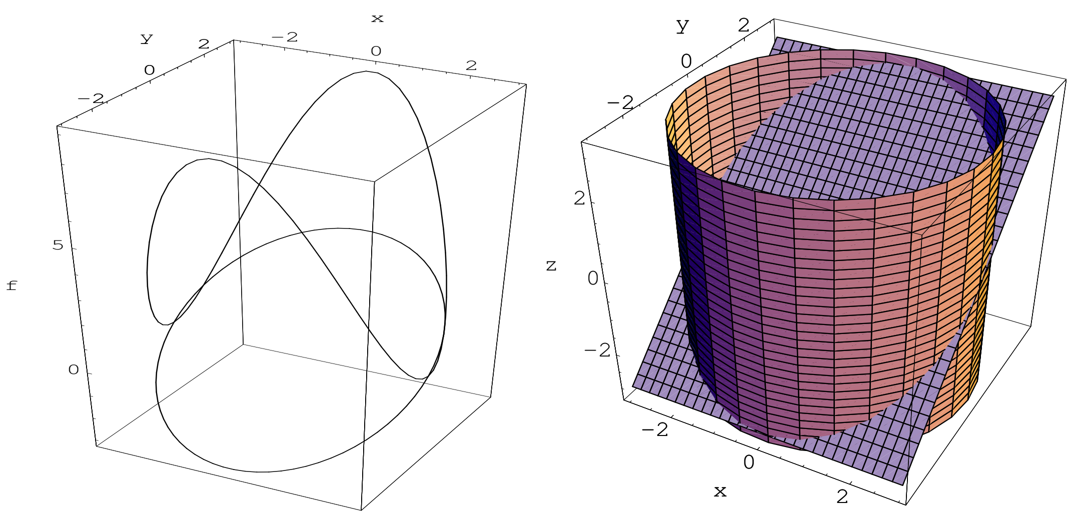


Bild 20: f auf dem Schnitt des Zylinders $x^2 + y^2 = 9$ mit der Ebene $y = z$

Lösung 21:

a) (i)

$$\begin{aligned}
U_f(Z) &= \sum_{i,j=1}^{n} \inf_{(x,y)\in Q_{i,j}} (f(x,y)) \cdot \text{Vol}\,(Q_{i,j}) \\
&= \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n}\left(2-\frac{2i}{n}\right)\cdot\frac{2}{n^2}\right) = \frac{4}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n}\left(1-\frac{i}{n}\right)\right) \\
&= \frac{4}{n^2}\sum_{i=1}^{n}(n-i) = \frac{4}{n^2}\left(n^2-\frac{n(n+1)}{2}\right) \\
&= \frac{2(n^2-n)}{n^2} \;=\; 2\left(1-\frac{1}{n}\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
O_f(Z) &= \sum_{i,j=1}^{n} \sup_{(x,y)\in Q_{i,j}} (f(x,y)) \cdot \text{Vol}(Q_{i,j}) \\
&= \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n}\left(2-\frac{2(i-1)}{n}\right)\cdot\frac{2}{n^2}\right) \;=\; 2\left(1+\frac{1}{n}\right)
\end{aligned}$$

(ii)
$$\begin{aligned}
\int_Q f(x,y)\,d(x,y) &= \int_0^1\left(\int_0^2 2-x\,dx\right)dy \;=\; \int_0^1 2x-\frac{x^2}{2}\Big|_0^2\,dy \\
&= \int_0^1 2\,dy \;=\; 2y|_0^1 \;=\; 2
\end{aligned}$$

Man erhält natürlich:

$$2\left(1-\frac{1}{n}\right) = U_f(Z) \;\le\; \int_Q f(x,y)\,d(x,y) = 2 \;\le\; O_f(Z) = 2\left(1+\frac{1}{n}\right)\,.$$

b) (i)
$$\begin{aligned}
\int_\pi^{2\pi}\int_0^\pi \cos(x+y)\,dx\,dy &= \int_\pi^{2\pi} \sin(x+y)|_0^\pi\;dy = \int_\pi^{2\pi} \sin(\pi+y)-\sin y\,dy \\
&= (\cos y-\cos(\pi+y))|_\pi^{2\pi} = 4
\end{aligned}$$

(ii)
$$\begin{aligned}
\int_R 9x^2\sqrt{y}\,d(x,y) &= \int_1^2\int_1^4 9x^2\sqrt{y}\,dy\,dx = \int_1^2 3x^2\left(\int_1^4 3\sqrt{y}\,dy\right)\,dx \\
&= \left(\int_1^2 3x^2\,dx\right)\cdot\left(\int_1^4 3\sqrt{y}\,dy\right) \\
&= \left(x^3\Big|_1^2\right)\cdot\left(2y^{3/2}\Big|_1^4\right) \;=\; 98
\end{aligned}$$

(iii)
$$\int_Q \sinh z + \frac{6z^2}{(2x+y)^2}\, d(x,y,z) = \int_1^2\int_0^1\int_{-1}^1 \sinh z + \frac{6z^2}{(2x+y)^2}\, dz\, dy\, dx$$
$$= \int_1^2\int_0^1 \left(\cosh z + \frac{2z^3}{(2x+y)^2}\right)\Bigg|_{-1}^1 dy\, dx$$
$$= \int_1^2\int_0^1 \frac{4}{(2x+y)^2}\, dy\, dx = \int_1^2 -\frac{4}{2x+y}\Bigg|_0^1 dx$$
$$= \int_1^2 -\frac{4}{2x+1} + \frac{2}{x}\, dx = (-2\ln|2x+1| + 2\ln|x|)|_1^2$$
$$= -2\ln 5 + 2\ln 2 + 2\ln 3 = \ln\frac{36}{25}$$

Lösung 22:

a) (i) Die Geraden durch folgende Punkte lauten:
P_1, P_3: $g(x) = (x+4)/3$, P_1, P_2: $f_1(x) = -x$, P_2, P_3: $f_2(x) = x$.

$$D = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; -1 \le x \le 2\,,\ |x| \le y \le (x+4)/3 \right\}$$

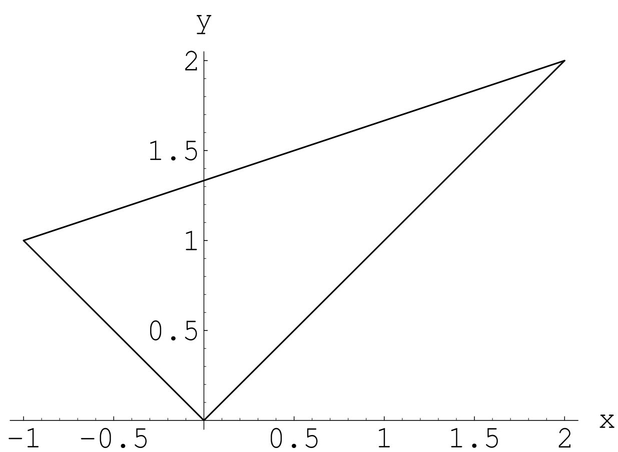


Bild 22 a) Dreieck D

$$\int_D 18y\, d(x,y) = \int_{-1}^{2}\int_{|x|}^{(x+4)/3} 18y\, dy\, dx = \int_{-1}^{2} 9y^2\Big|_{|x|}^{(x+4)/3} dx$$
$$= \int_{-1}^{2} (x+4)^2 - 9x^2\, dx = \frac{(x+4)^3}{3} - 3x^3\Bigg|_{-1}^{2} = 36$$

b) (i) $x \le 0,\ z \ge 1,\ z \le 3$ und $x^2 + y^2 \le 4$ beschreibt einen halben Zylinder

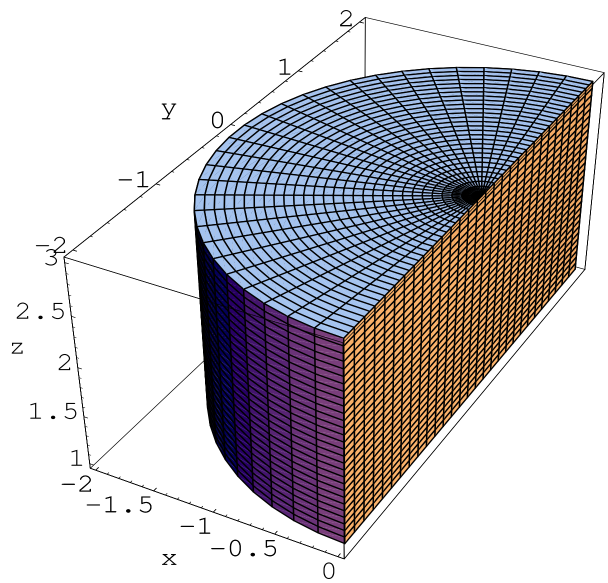


Bild 22 b) halber Zylinder Z

$$Z = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; -2 \le x \le 0\,,\ -\sqrt{4-x^2} \le y \le \sqrt{4-x^2}\,,\ 1 \le z \le 3 \right\}$$

(ii)
$$\begin{aligned}
\int_Z 3x \, d(x,y,z) &= \int_{-2}^{0} \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} \int_{1}^{3} 3x \, dz\, dy\, dx \;=\; \int_1^3 dz \int_{-2}^{0} \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} 3x \, dy\, dx \\
&= 2 \int_{-2}^{0} 3xy\Big|_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} dx \;=\; 2 \int_{-2}^{0} 6x\sqrt{4-x^2}\, dx \\
&= -4\,(4-x^2)^{3/2}\Big|_{-2}^{0} = -32
\end{aligned}$$

oder alternativ mit Transformation auf Zylinderkoordinaten:

$$\begin{aligned}
\int_Z 3x \, d(x,y,z) &= \int_{1}^{3} \int_{\pi/2}^{3\pi/2} \int_{0}^{2} 3r\cos(\varphi) r \, dr\, d\varphi\, dz \\
&= \int_0^2 3r^2\, dr \int_{\pi/2}^{3\pi/2} \cos(\varphi)\, d\varphi \int_1^3 dz \\
&= \left(r^3\Big|_0^2 \right) \left(\sin(\varphi)\Big|_{\pi/2}^{3\pi/2} \right) \left(z\Big|_1^3 \right) \\
&= 8 \cdot (-2) \cdot 2 = -32
\end{aligned}$$

Lösung 23:

a)

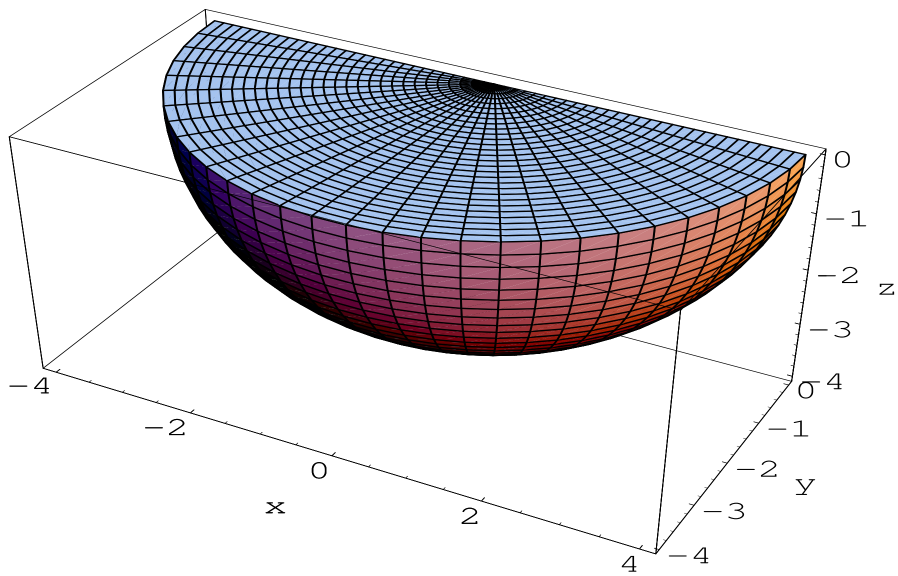


Bild 23 a) Viertelkugel K

Kugelkoordinaten für K: $0 \le r \le 4$, $\pi \le \varphi \le 2\pi$, $-\pi/2 \le \theta \le 0$ mit

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos(\varphi)\cos(\theta) \\ r\sin(\varphi)\cos(\theta) \\ r\sin(\theta) \end{pmatrix} = \mathbf{\Phi}(r,\varphi,\theta) \,, \quad \det \boldsymbol{J}\mathbf{\Phi}(r,\varphi,\theta) = r^2\cos(\theta)$$

Berechnung der Masse M in Kugelkoordinaten unter Verwendung des Transformationssatzes mit $\rho(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 + 1$:

$$\begin{aligned} M &= \int_K x^2 + y^2 + z^2 + 1 \, d(x,y,z) = \int_0^4 \int_\pi^{2\pi} \int_{-\pi/2}^0 (r^2+1) r^2 \cos(\theta) \, d\theta \, d\varphi \, dr \\ &= \int_0^4 \int_\pi^{2\pi} r^4 + r^2 \, d\varphi \, dr = \int_0^4 \pi(r^4 + r^2) \, dr = \left. \frac{(3 \cdot r^5 + 5 \cdot r^3)\pi}{15} \right|_0^4 = \frac{3392\pi}{15} \end{aligned}$$

Berechnung der Schwerpunktkoordinaten (x_s, y_s, z_s):

$$\begin{aligned}
x_s &= \frac{1}{M}\int_K (x^2+y^2+z^2+1)x \; d(x,y,z) \\
&= \frac{1}{M}\int_0^4 \int_\pi^{2\pi} \int_{-\pi/2}^{0} (r^2+1)r\cos(\varphi)\cos(\theta)r^2\cos(\theta)\; d\theta\; d\varphi\; dr \\
&= \frac{1}{M}\int_0^4 \int_\pi^{2\pi} (r^5+r^3)\cos(\varphi)\; \left.\frac{\theta+\sin(\theta)\cos(\theta)}{2}\right|_{-\pi/2}^{0} \; d\varphi\; dr \\
&= \frac{\pi}{4M}\int_0^4 (r^5+r^3)\; \sin(\varphi)|_\pi^{2\pi} \; dr = 0
\end{aligned}$$

Dies Ergebnis ergibt sich auch auf Grund der Symmetrie.

$$\begin{aligned}
y_s &= \frac{1}{M}\int_K (x^2+y^2+z^2+1)y \; d(x,y,z) \\
&= \frac{1}{M}\int_0^4 \int_\pi^{2\pi} \int_{-\pi/2}^{0} (r^2+1)r\sin(\varphi)\cos(\theta)r^2\cos(\theta)\; d\theta\; d\varphi\; dr \\
&= \frac{1}{M}\int_0^4 \int_\pi^{2\pi} (r^5+r^3)\sin(\varphi)\; \left.\frac{\theta+\sin(\theta)\cos(\theta)}{2}\right|_{-\pi/2}^{0} \; d\varphi\; dr \\
&= -\frac{\pi}{4M}\int_0^4 (r^5+r^3)\; \cos(\varphi)|_\pi^{2\pi} \; dr = -\frac{\pi(2\cdot r^6+3\cdot r^4)|_0^4}{24M} = -\frac{1120\pi}{3M} = -\frac{175}{106}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
z_s &= \frac{1}{M}\int_K (x^2+y^2+z^2+1)z \; d(x,y,z) \\
&= \frac{1}{M}\int_0^4 \int_\pi^{2\pi} \int_{-\pi/2}^{0} (r^2+1)r\sin(\theta)r^2\cos(\theta)\; d\theta\; d\varphi\; dr \\
&= \frac{1}{M}\int_0^4 \int_\pi^{2\pi} (r^5+r^3)\; \left.\frac{\sin^2(\theta)}{2}\right|_{-\pi/2}^{0} \; d\varphi\; dr \\
&= -\frac{1}{2M}\int_0^4 (r^5+r^3)\; \varphi|_\pi^{2\pi} \; dr = -\frac{\pi(2\cdot r^6+3\cdot r^4)|_0^4}{24M} = -\frac{1120\pi}{3M} = -\frac{175}{106}
\end{aligned}$$

b) (i) Der MATLAB-Plotbefehl lautet

```
ezgraph3('surf','3*cos(s)*cos(t)','3*sin(s)*cos(t)','3*sin(t)',
[0,2*pi,-pi/2,pi/2])
```

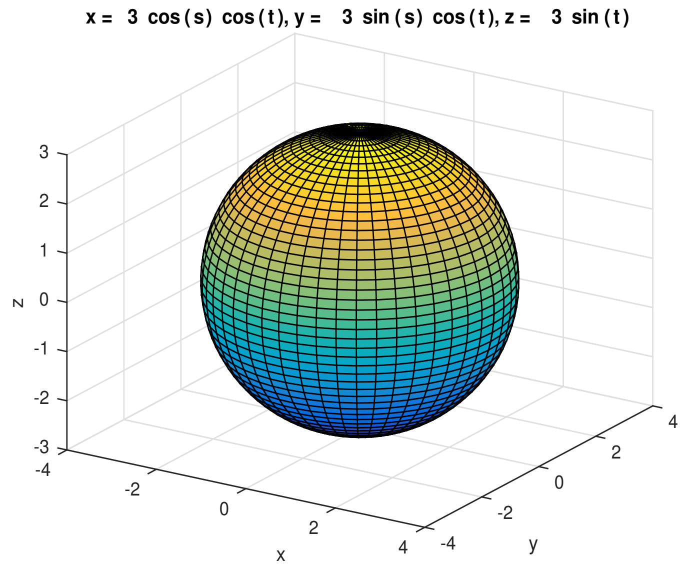


Bild 23 b) Kugel K mit Radius $R = 3$

(ii) Berechnung der Masse M in Kugelkoordinaten unter Verwendung des Transformationssatzes mit konstanter Dichte ρ:

$$
\begin{aligned}
M &= \int\limits_K \rho \, d(x,y,z) = \rho \int\limits_0^3 \int\limits_0^{2\pi} \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} r^2 \cos(\theta)\, d\theta\, d\varphi\, dr \\
&= \rho \int\limits_0^3 r^2\, dr \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos(\theta)\, d\theta \;=\; \rho \left(\frac{r^3}{3}\right)\Bigg|_0^3 (\varphi)\big|_0^{2\pi} \, (\sin(\theta))\big|_{-\pi/2}^{\pi/2} \\
&= \rho \frac{3^3}{3} \cdot 2\pi \cdot 2 \;=\; \rho \frac{4\pi 3^3}{3} \;=\; 36\pi\rho
\end{aligned}
$$

Berechnung des Trägheitsmoments bezüglich der z-Achse in Kugelkoordinaten unter Verwendung des Transformationssatzes mit konstanter Dichte ρ und des Additionstheorems $\cos^3(\theta) = (3\cos(\theta) + \cos(3\theta))/4$

$$
\begin{aligned}
\Theta_z &= \int\limits_K \rho(x^2 + y^2)\, d(x,y,z) \\
&= \rho \int\limits_0^3 \int\limits_0^{2\pi} \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} (r^2 \cos^2(\varphi)\cos^2(\theta) + r^2 \sin^2(\varphi)\cos^2(\theta))\, r^2 \cos(\theta)\, d\theta\, d\varphi\, dr \\
&= \rho \int\limits_0^3 r^4 dr \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^3(\theta) d\theta = \rho \left(\frac{r^5}{5}\right)\Bigg|_0^3 (\varphi)\big|_0^{2\pi} \, \frac{1}{4}\left(3\sin(\theta) + \frac{1}{3}\sin(3\theta)\right)\Bigg|_{-\pi/2}^{\pi/2} \\
&= \rho \frac{3^5}{5} \cdot 2\pi \cdot \frac{4}{3} \;=\; \frac{648\pi\rho}{5}
\end{aligned}
$$

(iii) Da der Schwerpunkt von P aus Symmetriegründen im Ursprung liegt, gilt nach dem Steinerschen Satz

$$\Theta_D = Md^2 + \Theta_{z\text{-Achse}} = 36\pi\rho(2^2+1^2) + \frac{648\pi\rho}{5} = \frac{1548\pi\rho}{5}\,.$$

Lösung 24:

a) Die Randkurve setzt sich aus zwei glatten Teilkurven zusammen: $\partial H = \boldsymbol{c}_1 + \boldsymbol{c}_2$, mit

$$\boldsymbol{c}_1(t) = \begin{pmatrix} 2\cos t \\ 2\sin t \end{pmatrix}\,,\ \frac{\pi}{4} \le t \le \frac{5\pi}{4} \quad \text{und} \quad \boldsymbol{c}_2(t) = \begin{pmatrix} t \\ t \end{pmatrix}\,,\ -\sqrt{2} \le t \le \sqrt{2}\,.$$

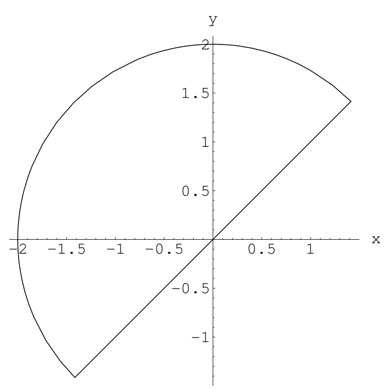


Bild 24 a) Halbkreisrandkurve ∂G

Zur Berechnung des Kurvenintegrals 2. Art werden die Tangentialvektoren benötigt:

$$\dot{\boldsymbol{c}}_1(t) = \begin{pmatrix} -2\sin t \\ 2\cos t \end{pmatrix}\,, \quad \dot{\boldsymbol{c}}_2(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\,.$$

$$\begin{aligned}
\oint_{\partial H} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\,d\boldsymbol{x} &= \int_{\boldsymbol{c}_1} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\,d\boldsymbol{x} + \int_{\boldsymbol{c}_2} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\,d\boldsymbol{x} \\
&= \int_{\pi/4}^{5\pi/4} \langle \boldsymbol{f}(\boldsymbol{c}_1(t)), \dot{\boldsymbol{c}}_1(t)\rangle\ dt + \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \langle \boldsymbol{f}(\boldsymbol{c}_2(t)), \dot{\boldsymbol{c}}_2(t)\rangle\ dt \\
&= \int_{\pi/4}^{5\pi/4} \left\langle \begin{pmatrix} 4\cos t\sin t \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2\sin t \\ 2\cos t \end{pmatrix} \right\rangle dt \\
&\quad + \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \left\langle \begin{pmatrix} t^2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle dt \\
&= \int_{\pi/4}^{5\pi/4} -8\cos t\sin^2 t + 2\cos t\,dt + \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} t^2 + 1\,dt \\
&= \left(-\frac{8\sin^3 t}{3} + 2\sin t\right)\Bigg|_{\pi/4}^{5\pi/4} + \left(\frac{t^3}{3} + t\right)\Bigg|_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \\
&= -\frac{2\sqrt{2}}{3} + \frac{10\sqrt{2}}{3} = \frac{8\sqrt{2}}{3}
\end{aligned}$$

Alternative Berechnung:

Mit dem Integralsatz von Green und Polarkoordinaten gilt

$$\begin{aligned}
\oint_{\partial H} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x} &= \int_H \text{rot}\ \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x} = \int\int_H -x\ d(x,y) \\
&= -\int_0^2 \int_{\pi/4}^{5\pi/4} r\cos(\varphi)\cdot r\,d\varphi\,dr\ =\ -\int_0^2 r^2\,dr \int_{\pi/4}^{5\pi/4} \cos\varphi\,d\varphi \\
&= -\left(\frac{r^3}{3}\Bigg|_0^2\right)\left(\sin\varphi|_{\pi/4}^{5\pi/4}\right)\ =\ -\frac{8}{3}\cdot\left(-2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\ =\ \frac{8\sqrt{2}}{3}\,.
\end{aligned}$$

b)

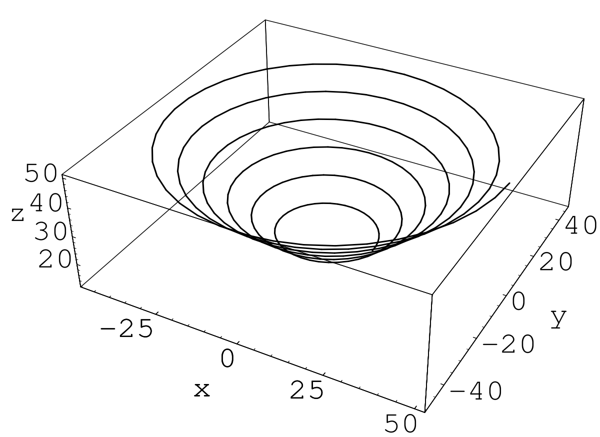


Bild 24 b) Kurve $\boldsymbol{c}$

$$\begin{aligned}
\int_{\boldsymbol{c}} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\, d\boldsymbol{x} &= \int_{4\pi}^{16\pi} \langle \boldsymbol{f}(\boldsymbol{c}(t)), \dot{\boldsymbol{c}}(t)\rangle \; dt \\
&= \int_{4\pi}^{16\pi} \left\langle \begin{pmatrix} -t\sin t \\ t\cos t \\ (t\sin t + t\cos t)/t \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \cos t - t\sin t \\ \sin t + t\cos t \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \, dt \\
&= \int_{4\pi}^{16\pi} t^2 + \sin t + \cos t \, dt \;=\; \int_{4\pi}^{16\pi} t^2 \, dt \\
&= \left. \frac{t^3}{3} \right|_{4\pi}^{16\pi} = \frac{\pi^3(16^3 - 4^3)}{3} = 1344\pi^3
\end{aligned}$$

Lösung 25:

a) Der $\mathbb{R}^3$ ist einfach zusammenhängend und die Integrabilitätsbedingung

$$\operatorname{rot}\boldsymbol{f}(x,y,z) = \begin{pmatrix} f_{3y} - f_{2z} \\ f_{1z} - f_{3x} \\ f_{2x} - f_{1y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20x^3y^3z^4 - 20x^3y^3z^4 \\ 15x^2y^4z^4 - 15x^2y^4z^4 \\ 12x^2y^3z^5 - 12x^2y^3z^5 \end{pmatrix} = \mathbf{0}$$

ist erfüllt. Daher besitzt $\boldsymbol{f}(x,y,z)$ ein Potential $v(x,y,z)$, d.h. es gilt $\boldsymbol{f} = \operatorname{grad} v = (v_x, v_y, v_z)$.

b) $v_x(x,y,z) = 3x^2y^4z^5 + 1 \quad \Rightarrow \quad v(x,y,z) = x^3y^4z^5 + x + c(y,z)$

$\Rightarrow \quad v_y(x,y,z) = 4x^3y^3z^5 + c_y(y,z) \overset{!}{=} 4x^3y^3z^5 + 2y$

$\Rightarrow \quad c_y(y,z) = 2y \quad \Rightarrow \quad c(y,z) = y^2 + k(z)$

$\Rightarrow \quad v(x,y,z) = x^3y^4z^5 + x + y^2 + k(z)$

$\Rightarrow \quad v_z(x,y,z) = 5x^3y^4z^4 + k'(z) \overset{!}{=} 5x^3y^4z^4 + 3z^2$

$\Rightarrow \quad k'(z) = 3z^2 \quad \Rightarrow \quad k(z) = z^3 + K \quad$ mit $K \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow \quad v(x,y,z) = x^3y^4z^5 + x + y^2 + z^3 + K$

c) Wählt man als Kurve $\boldsymbol{k}$ die direkte Verbindungslinie vom Punkt $(0,0,0)$ zum Punkt (x,y,z), d.h. $\boldsymbol{k}(t) = t(x,y,z)^T$, so lässt sich ein Potential v zu $\boldsymbol{f}$ berechnen nach dem Hauptsatz für Kurvenintegrale durch

$$\begin{aligned}
v(x,y,z) &= \int_{\boldsymbol{k}} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\,d\boldsymbol{x} + K \;=\; \int_0^1 \boldsymbol{f}(\boldsymbol{k}(t))\dot{\boldsymbol{k}}(t)\,dt + K \\
&= \int_0^1 \left\langle \begin{pmatrix} 3(tx)^2(ty)^4(tz)^5+1 \\ 4(tx)^3(ty)^3(tz)^5+2ty \\ 5(tx)^3(ty)^4(tz)^4+3(tz)^2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right\rangle dt + K \\
&= \int_0^1 12t^{11}x^3y^4z^5 + x + 2ty^2 + 3t^2z^3\,dt + K \\
&= t^{12}x^3y^4z^5 + xt + t^2y^2 + t^3z^3\Big|_0^1 + K \\
&= x^3y^4z^5 + x + y^2 + z^3 + K
\end{aligned}$$

d) Mit $\boldsymbol{c}(t) = (\cos t, \sin t, \sin t + \cos t)^T$ ergibt sich nach dem Hauptsatz für Kurvenintegrale

$$\begin{aligned}
\int_{\boldsymbol{c}} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x} &= \int_0^{\pi} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{c}(t))\dot{\boldsymbol{c}}(t)\,dt \;=\; v(\boldsymbol{c}(\pi)) - v(\boldsymbol{c}(0)) \\
&= v(-1,0,-1) - v(1,0,1) \;=\; -1-1-(1+1) = -4
\end{aligned}$$

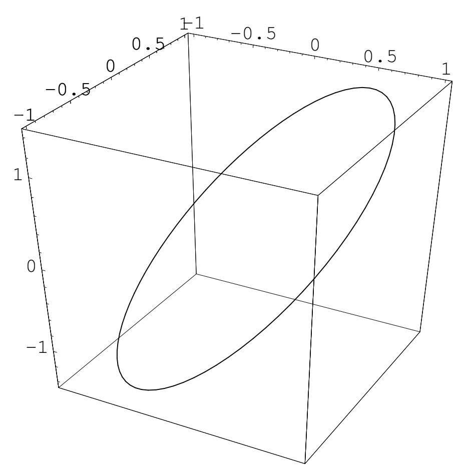


Bild 25 Kurve $\boldsymbol{c}$ für $T = 2\pi$

$$\begin{aligned}
\int_{\boldsymbol{c}} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x} &= \int_0^{2\pi} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{c}(t))\dot{\boldsymbol{c}}(t)\,dt \;=\; v(\boldsymbol{c}(2\pi)) - v(\boldsymbol{c}(0)) \\
&= v(1,0,1) - v(1,0,1) \;=\; 0 \quad \text{(geschlossene Kurve)}
\end{aligned}$$

Lösung 26:

Die Ellipse E kann durch kartesische oder Polarkoordinaten beschrieben werden:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \boldsymbol{\Phi}(r,\varphi) = \begin{pmatrix} 2r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \end{pmatrix}, \quad \begin{matrix} 0 \le r \le 1 \\ 0 \le \varphi \le 2\pi \end{matrix}, \quad \Rightarrow \det \boldsymbol{J\Phi}(r,\varphi) = 2r$$

$$\begin{aligned} E &= \left\{ (x,y)^T \in \mathbb{R}^2 \mid -2 \le x \le 2\,,\ -\sqrt{1-(x/2)^2} \le y \le \sqrt{1-(x/2)^2} \right\}, \\ Q &= \left\{ (r,\varphi)^T \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le r \le 1\,, \quad 0 \le \varphi \le 2\pi \right\} \quad \text{mit} \quad \boldsymbol{\Phi}(Q) = E \end{aligned}$$

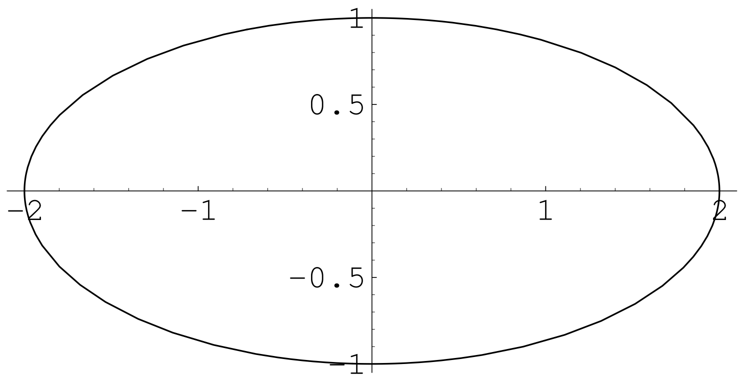


Bild 26: Ellipse E

Parametrisierung des Ellipsenrandes ∂E durch:

$$\boldsymbol{c}(\varphi) = \begin{pmatrix} 2\cos\varphi \\ \sin\varphi \end{pmatrix}, \quad 0 \le \varphi \le 2\pi$$

$$\begin{aligned} \oint_{\partial E} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\,d\boldsymbol{x} &= \oint_{\boldsymbol{c}} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\,d\boldsymbol{x} = \int_0^{2\pi} < \boldsymbol{f}(\boldsymbol{c}(\varphi)), \dot{\boldsymbol{c}}(\varphi) > d\varphi \\ &= \int_0^{2\pi} \left\langle \begin{pmatrix} -2\cos\varphi\sin\varphi - 2\sin\varphi \\ 4\cos\varphi + 4\sin^2\varphi \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2\sin\varphi \\ \cos\varphi \end{pmatrix} \right\rangle d\varphi \\ &= \int_0^{2\pi} 4\cos\varphi\sin^2\varphi + 4\sin^2\varphi + 4\cos^2\varphi + 4\cos\varphi\sin^2\varphi\,d\varphi \\ &= \int_0^{2\pi} 4 + 8\cos\varphi\sin^2\varphi\,d\varphi = 4\varphi + \frac{8}{3}\sin^3\varphi \Big|_0^{2\pi} = 8\pi \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int\limits_E \text{rot } \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\, d\boldsymbol{x} &= \int\limits_E (2x+4y^2)_x - (-xy-2y)_y \, d(x,y) \\
&= \int\limits_E 4 + x \, d(x,y) \;=\; \int\limits_0^1 \int\limits_0^{2\pi} (4 + 2r\cos\varphi) 2r \, d\varphi dr \\
&= 8 \int\limits_0^1 r \, dr \int\limits_0^{2\pi} d\varphi + 4 \int\limits_0^1 r^2 \, dr \int\limits_0^{2\pi} \cos\varphi \, d\varphi \\
&= 8\pi r^2\Big|_0^1 + \frac{4r^3}{3}\bigg|_0^1 \cdot \sin\varphi\big|_0^{2\pi} \;=\; 8\pi
\end{aligned}$$

Integralsatz von Green: $\displaystyle \oint\limits_{\partial E} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) d\boldsymbol{x} \;=\; 8\pi \;=\; \int\limits_E \text{rot } \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) d\boldsymbol{x}$

Lösung 27:

a)

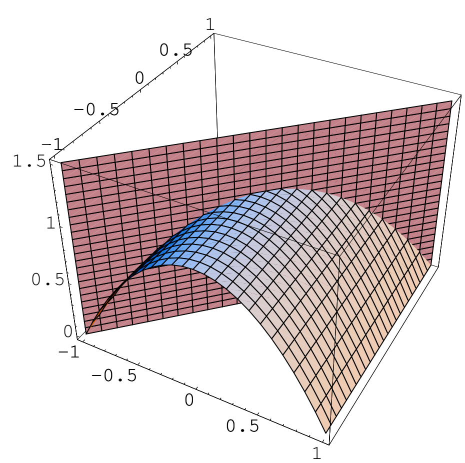


Bild 27: parabolische Zylinderteilfläche N

b) Die Fläche N kann als Funktionsgraph interpretiert werden, über dem Dreieck $D := \{(x,y)^T \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [-1,1]\,,\ y \in [-1,x]\,\}$

$$\boldsymbol{p} \,:\, D \longrightarrow \mathbb{R}^3 \quad \text{mit} \quad \boldsymbol{p}(x,y) = (x, y, 1-x^2)^T \,.$$

c)

$$\frac{\partial \boldsymbol{p}}{\partial x} \times \frac{\partial \boldsymbol{p}}{\partial y} \;=\; \begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{e}_3 \\ 1 & 0 & -2x \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} 2x \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$
\begin{aligned}
\int\limits_N do \;&=\; \int\limits_{\boldsymbol{p}(D)} do \;=\; \int\limits_D \left\|\frac{\partial \boldsymbol{p}}{\partial x} \times \frac{\partial \boldsymbol{p}}{\partial y}\right\| \, d(x,y) \;=\; \int\limits_{-1}^{1}\int\limits_{-1}^{x} \sqrt{1+(2x)^2}\, dydx \\
&=\; \int\limits_{-1}^{1} y\sqrt{1+(2x)^2}\,\Big|_{-1}^{x}\, dx \;=\; \int\limits_{-1}^{1} x\sqrt{1+(2x)^2} + \sqrt{1+(2x)^2}\, dx \\
&=\; 2\int\limits_{0}^{1} \sqrt{1+(2x)^2}\, dx \;=\; \int\limits_{0}^{2} \sqrt{1+t^2}\, dt \\
&=\; \frac{1}{2}\left(t\sqrt{1+t^2} + \operatorname{arsinh} t\right)\Big|_0^2 \;=\; \sqrt{5} + \frac{1}{2}\operatorname{arsinh} 2 \;=\; 2.957985715\ldots
\end{aligned}
$$

Lösung 28:

a)

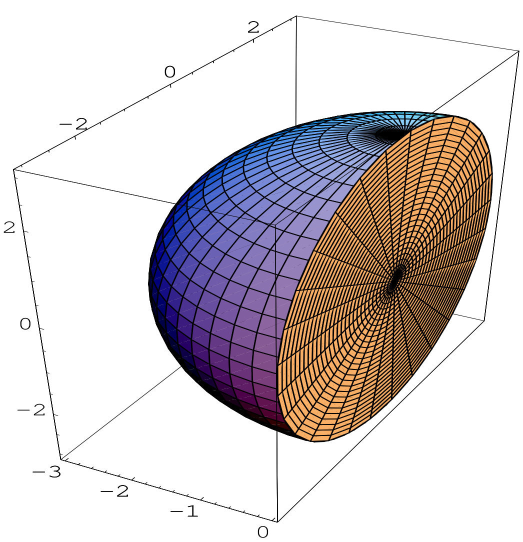


Bild 28: Halbkugel K

b) Parametrisierung der Kreisseite S: $\boldsymbol{p} : [0,3] \times [0,2\pi] \to \mathbb{R}^3$ mit

$$
\boldsymbol{p}(r,\varphi) = \begin{pmatrix} 0 \\ r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \end{pmatrix}
$$

Parametrisierung der Halbkugelfläche H:

$\boldsymbol{q} : \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right] \times \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R}^3$ mit

$$\boldsymbol{q}(\varphi, \psi) = \begin{pmatrix} 3\cos\varphi\cos\psi \\ 3\sin\varphi\cos\psi \\ 3\sin\psi \end{pmatrix}$$

c) Fluss durch S, mit der äußeren Normalen

$$\frac{\partial \boldsymbol{p}}{\partial r} \times \frac{\partial \boldsymbol{p}}{\partial \varphi} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{e}_3 \\ 0 & \cos\varphi & \sin\varphi \\ 0 & -r\sin\varphi & r\cos\varphi \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} r \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\int_S \boldsymbol{f}\, do = \int_0^3 \int_0^{2\pi} \left\langle \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ 0 \\ r^3\sin^3\varphi \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} r \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle d\varphi dr = \int_0^3 \int_0^{2\pi} r^2 \cos\varphi d\varphi dr = 0$$

Fluss durch H, mit der äußeren Normalen

$$\frac{\partial \boldsymbol{q}}{\partial \varphi} \times \frac{\partial \boldsymbol{q}}{\partial \psi} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{e}_3 \\ -3\sin\varphi\cos\psi & 3\cos\varphi\cos\psi & 0 \\ -3\cos\varphi\sin\psi & -3\sin\varphi\sin\psi & 3\cos\psi \end{vmatrix} = 9\cos\psi \begin{pmatrix} \cos\varphi\cos\psi \\ \sin\varphi\cos\psi \\ \sin\psi \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \int_H \boldsymbol{f}\, do &= \int_{\pi/2}^{3\pi/2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} 9\cos\psi \left\langle \begin{pmatrix} 3\sin\varphi\cos\psi \\ -3\cos\varphi\cos\psi \\ 27\sin^3\psi \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \cos\varphi\cos\psi \\ \sin\varphi\cos\psi \\ \sin\psi \end{pmatrix} \right\rangle d\psi d\varphi \\ &= \int_{\pi/2}^{3\pi/2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} 243\cos\psi\sin^4\psi d\psi d\varphi = 243\pi \left. \frac{\sin^5\psi}{5} \right|_{-\pi/2}^{\pi/2} = \frac{486\pi}{5} \end{aligned}$$

d) Mit dem Gaußschen-Integralsatz erhält man:

$$\int_E \operatorname{div} \boldsymbol{f}\, d(x,y,z) = \int_S \boldsymbol{f}\, do + \int_H \boldsymbol{f}\, do = \frac{486\pi}{5}$$

Alternativ: direkte Berechnung über Kugelkoordinaten:

$$\begin{aligned} &\int_K \operatorname{div} \boldsymbol{f}(x,y,z)\, d(x,y,z) \\ &= \int_K 3z^2\, d(x,y,z) = \int_0^3 \int_{\pi/2}^{3\pi/2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} 3r^2\sin^2\psi \cdot r^2\cos\psi\, d\psi d\varphi dr \\ &= \int_0^3 r^4 dr \int_{\pi/2}^{3\pi/2} d\varphi \int_{-\pi/2}^{\pi/2} 3\cos\psi\sin^2\psi\, d\psi = \left. \frac{r^5}{5} \right|_0^3 \varphi\Big|_{\pi/2}^{3\pi/2} \sin^3\psi\Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} = \frac{486\pi}{5} \end{aligned}$$