

Hörsaalübungsaufgaben und Lösungen zu

Differentialgleichungen I

für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Aufgabe 1:

Man löse die folgenden Differentialgleichungen durch Trennung der Variablen (Separation):

a) $3y' - 2y + 1 = 0$,

b) $x^2y' + y^2 + 2y + 1 = 0$

und bestätige durch eine Probe, dass es sich um Lösungen handelt.

Aufgabe 2:

a) Man löse die Anfangswertaufgabe $y' = y^2 - 16$ mit $y(0) = 5$.

b) Man löse die Differentialgleichung $y' = \frac{x - y}{x}$.

Aufgabe 3:

Man löse die folgenden Differentialgleichungen unter Verwendung der Variation der Konstanten:

a) $2y' - 3y = 4$,

b) $y' - \frac{2y}{x} = x^3 e^{x^2}$.

Aufgabe 4:

Man löse die linearen Differentialgleichungen mit einem speziellen Ansatz für die Inhomogenität:

a) $2y' - 3y = 4,$

b) $5y' + 4y = 3e^{2x} + e^{-x}.$

Aufgabe 5:

Durch Substitution löse man die Differentialgleichung

$$y' = (x - y + 3)^2 \quad \text{mit} \quad y(1) = 1.$$

Aufgabe 6:

Man löse die folgenden Differentialgleichungen

a) $y' + y + x^2 y^4 = 0,$

b) $y' + xy = xy^3.$

Aufgabe 7:

Man löse die Differentialgleichung $y' + (6t - 4)y + (3t - 1)y^2 = 3 - 3t.$

Hinweis: Es existiert eine Lösung der Form $y(x) = c.$

Aufgabe 8:

Man zeige, dass die folgende Differentialgleichung exakt ist

$$(t^2 e^y - 1)y' + 2t e^y = 0$$

Man löse die Differentialgleichung, wobei eine Lösungsdarstellung durch eine implizite Gleichung ausreicht.

Aufgabe 9:

Man zeige, dass die Differentialgleichung

$$y + ty^3 + (t + 2t^2 y^2)y' = 0$$

einen integrierenden Faktor der Form $m = m(t \cdot y)$ besitzt und bestimme damit dann die allgemeine Lösung (eine implizite Darstellung reicht aus).

Aufgabe 10:

Man löse folgende Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$(1 - y)y'' + 2(y')^2 = 0.$$

Aufgabe 11:

Man löse die folgenden Differentialgleichungen zweiter Ordnung

$$\text{a) } y'' = y^{-3}, \quad \text{b) } xy'' = y' \ln \left(\frac{y'}{x} \right).$$

Aufgabe 12:

Man löse die folgenden Anfangswertaufgaben und bestimme den Bereich, in dem die Lösungen existieren

- a) $y' = 2xe^{-y}$ mit $y(0) = 0$,
- b) $y' = 2xy$ mit $y(0) = 3$,
- c) $y' - \frac{y}{3} - \frac{y^4}{3} = 0$ mit $y(0) = 1$.

Aufgabe 13:

Gegeben sei die Anfangswertaufgabe

$$y' = 2y - 6x + 3, \quad y(0) = 1.$$

- a) Man berechne mit Hilfe des Eulerschen-Polygonzug-Verfahrens mit $h = 0.1$ eine Näherung für $y(0.5)$.
- b) Man führe 5 Schritte des Verfahrens der sukzessiven Approximation aus und berechne $y^{[5]}(0.5)$ als Näherung für $y(0.5)$.
- c) Man löse die Anfangswertaufgabe und berechne $y(0.5)$.
- d) Man gebe von der Potenzreihe von $y(x)$ zum Entwicklungspunkt $x_0 = 0$ den Abschnitt bis zur Ordnung 5 an, vergleiche diesen mit $y^{[0]}(x)$ bis $y^{[5]}(x)$ aus Teil b) und zeichne diese Funktionen im Intervall $[0, 0.5]$.

Aufgabe 14:

- a) Man berechne eine Lösung der Anfangswertaufgabe

$$y'(t) + y(t) + y^{2/3}(t) = 0, \quad y(0) = 1.$$

- b) Man zeige, dass die Lösung im Intervall $[0, 3 \ln 2]$ eindeutig bestimmt ist.
- c) Man zeige, dass die Lösung im Intervall $[0, b]$ mit $b > 3 \ln 2$ nicht mehr eindeutig bestimmt ist und gebe eine zweite Lösung an.

Aufgabe 15:

Gegeben sei die folgende Anfangswertaufgabe für $t \neq 0$:

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/t & -2/t^3 \\ -2t & 1/t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad \mathbf{y}(1) = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

- a) Man bestimme eine Polynomlösung der Form

$$\mathbf{y}^1(t) = \begin{pmatrix} a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 \\ b_0 + b_1 t + b_2 t^2 + b_3 t^3 \end{pmatrix}.$$

- b) Bilden $\mathbf{y}^1(t)$ und $\mathbf{y}^2(t) := \begin{pmatrix} 1/t^3 \\ 1/t \end{pmatrix}$ ein Fundamentalsystem der Differentialgleichung?
- c) Man löse die Anfangswertaufgabe.

Aufgabe 16:

Man berechne die allgemeine Lösung des linearen Differentialgleichungssystems

$$\frac{d}{dx} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{x} & 1 \\ 0 & \frac{1}{x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ \frac{1}{x} \end{pmatrix}$$

unter Verwendung der Variation der Konstanten.

Aufgabe 17:

- a) Gegeben sei die Anfangswertaufgabe

$$\mathbf{y}' = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \mathbf{y} + \begin{pmatrix} 3x - 1 \\ 6 - x \end{pmatrix}, \quad \mathbf{y}(0) = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Man berechne

- (i) die allgemeine Lösung des zugehörigen homogenen Systems,

- (ii) eine spezielle Lösung des zugehörigen inhomogenen Systems und
- (iii) dann die Lösung der Anfangswertaufgabe.

b) Man bestimme die allgemeine reelle Lösung des Differentialgleichungssystems

$$\mathbf{y}' = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \mathbf{y} + e^{3x} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Für eine spezielle Lösung des inhomogenen Systems eignet sich hier der Ansatz $\mathbf{y}_p(x) = e^{3x} \mathbf{c}$ mit $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^2$.

Aufgabe 18:

Man bestimme ein Fundamentalsystem des Differentialgleichungssystems

$$\mathbf{y}' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 5 & 3 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{y}.$$

Aufgabe 19:

Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y'' + \frac{4}{x}y' - \frac{4}{x^2}y = -18.$$

a) Man bestimme ein Fundamentalsystem mit dem Reduktionsverfahren.

Hinweis: Es gibt eine polynomiale Lösung $u(x) = ax + b$.

b) Man schreibe die Differentialgleichung um in ein System erster Ordnung und berechne eine spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung unter Verwendung der Variation der Konstanten.

c) Man gebe die allgemeine Lösung der Differentialgleichung an.

Aufgabe 20:

Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y'' + 5y' + 4y = 4x - 3.$$

a) Man berechne die allgemeine Lösung mit Hilfe eines speziellen Ansatzes für die Inhomogenität.

b) Man schreibe die Differentialgleichung als System erster Ordnung und berechne die allgemeine Lösung des Systems unter Verwendung

- (i) der Variation der Konstanten und
- (ii) der Methode der Greenschen Funktion.

Aufgabe 21:

- a) Man berechne die allgemeine reelle Lösung für $y'''' + 2y''' + 3y'' - 2y' - 4y = 0$.
- b) Man löse die Anfangswertaufgabe

$$y''' - 3y' - 2y = -6e^{-x} \quad \text{mit} \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = 0, \quad y''(0) = 9$$

mit Hilfe

- (i) des charakteristischen Polynoms sowie eines speziellen Ansatzes für die Inhomogenität und
- (ii) der Laplace-Transformation.

Aufgabe 22:

Man löse die Anfangswertaufgabe

$$u' = -3u - 2v, \quad u(0) = 2$$

$$v' = 2u - 3v, \quad v(0) = -3$$

mit Hilfe der Laplace-Transformation.

Aufgabe 23:

Man gebe die Gleichgewichtspunkte der folgenden Differentialgleichungssysteme an, untersuche sie auf Stabilität, bestimme ihren Typ und skizziere das zugehörige Phasenporträt:

$$\begin{array}{ll} \text{a)} & \begin{aligned} \dot{x} &= x + 5y + 7, \\ \dot{y} &= x - 3y - 9, \end{aligned} & \text{b)} & \begin{aligned} \dot{x} &= -x - 2y - 6, \\ \dot{y} &= 5x + y - 6. \end{aligned} \end{array}$$

Aufgabe 24:

Gegeben sei das Differentialgleichungssystem

$$\begin{aligned} \dot{x} &= (x^2 - 9)(y + 4), \\ \dot{y} &= xy^2 - y^2 - 4x + 4. \end{aligned}$$

Man bestimme alle reellen stationären Lösungen (Gleichgewichtspunkte) und untersuche deren Stabilitätsverhalten mit (lokaler) Klassifikation.

Aufgabe 25:

Gegeben sei das folgende Differentialgleichungssystem

$$\begin{aligned}y_1' &= -3y_1^5 - 4y_1y_2^2, \\y_2' &= y_1^2y_2 - 5y_2^3.\end{aligned}$$

- Man berechne alle stationären Punkte $\mathbf{y}^* \in \mathbb{R}^2$ des Differentialgleichungssystems.
- Man untersuche das Stabilitätsverhalten aller stationären Punkte nach Stabilitätssatz III.
- Man untersuche das Stabilitätsverhalten aller stationären Punkte mit Hilfe der Methode von Ljapunov, wobei eine Ljapunov-Funktion V in der Form $V(\mathbf{y}) = ay_1^2 + by_2^2$ gesucht werden soll.

Aufgabe 26

Gegeben sei das Randwertproblem

$$\begin{aligned}\dot{y}_1 &= y_2 + y_3, & y_1(0) + e^{-1} \cdot y_1(1) &= 2, \\ \dot{y}_2 &= y_1 + y_3, & y_2(0) + e^{-1} \cdot y_2(1) &= 2, \\ \dot{y}_3 &= 2y_3, & y_3(0) + e^{-1} \cdot y_3(1) &= 0.\end{aligned}$$

- Man gebe die Aufgabe in Matrizenschreibweise an,
- bestimme die allgemeine Lösung des Differentialgleichungssystems und
- löse die Randwertaufgabe.

Aufgabe 27:

Gegeben ist die Minimierungsaufgabe: Minimiere das Funktional

$$I[y] = \int_0^2 16y^2 + (y')^2 - 8yy' dt$$

für alle C^1 -Funktionen y mit $y(0) = 0$ und $y(2) = 1$.

- Man stelle die zugehörige Euler-Lagrange-Gleichung auf,
- löse die zugehörige Randwertaufgabe und
- berechne für die Lösung aus (ii) den Wert des Funktional $I[y]$.

Aufgabe 28:

Für die Differentialgleichung

$$y'' + 4y = 0 \quad \text{mit} \quad 0 \leq x \leq \pi$$

bestimme man die allgemeine Lösung. Damit berechne man alle Lösungen für folgende Randbedingungen:

- a) $y(0) = 0$ und $y'(\pi) = 1$,
- b) $y(0) + 2y(\pi) = 0$ und $3y(0) + 4y(\pi) = 0$,
- c) $y'(0) + y'(\pi) = 0$ und $y'(0) - y'(\pi) = 1$.

unter Verwendung der allgemeinen Lösungsdarstellung der Einzelgleichung und alternativ durch Umschreiben in ein System 1.Ordnung und dann unter Verwendung der Shooting-Matrix.

Aufgabe 29

Man bestimme die Greensche Funktion des linearen Randwertproblems zweiter Ordnung

$$\begin{aligned} y''(t) - \frac{1}{t}y'(t) &= h(t), \quad 1 \leq t \leq 2 \\ y'(1) = 0, \quad y(2) &= 0 \end{aligned}$$

und löse damit die Randwertaufgabe für $h(t) := 2t$.

Hinweis:

Die homogene Differentialgleichung besitzt Lösungen der Form $y(t) = t^\alpha$.

Aufgabe 30:

Man berechne die Eigenwerte und Eigenfunktionen der folgenden Randeigenwertaufgabe

$$y'' - 2y = \lambda y \quad \text{mit} \quad y'(0) = 0 \quad \text{und} \quad y(1) = 0.$$

Lösung 1:

$$\begin{aligned}
\text{a) } 3y' - 2y + 1 &= 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{3y'}{2y-1} = 1 \\
\Rightarrow \int \frac{3y'(x)}{2y(x)-1} dx &= \int dx \quad \Rightarrow \quad \int \frac{3dy}{2y-1} = x + \tilde{c} \\
\Rightarrow \frac{3}{2} \log |2y-1| &= x + \tilde{c} \\
\Rightarrow |2y-1| &= e^{2(x+\tilde{c})/3} = e^{2x/3} e^{2\tilde{c}/3} = k e^{2x/3} \text{ mit } k > 0 \\
\Rightarrow y(x) &= (1 \pm k e^{2x/3}) / 2 = \frac{1}{2} + c e^{2x/3} \text{ mit } c \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Probe:

$$\begin{aligned}
3y'(x) - 2y(x) + 1 &= 3 \left(\frac{1}{2} + c e^{2x/3} \right)' - 2 \left(\frac{1}{2} + c e^{2x/3} \right) + 1 \\
&= 2c e^{2x/3} - 1 - 2c e^{2x/3} + 1 = 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{b) } x^2 y' + y^2 + 2y + 1 &= 0 \quad \Rightarrow \quad x^2 y' = -(y+1)^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{y'}{(y+1)^2} = -\frac{1}{x^2} \\
\Rightarrow \int \frac{y(x)'}{(y(x)+1)^2} dx &= - \int \frac{1}{x^2} dx \quad \Rightarrow \quad -\frac{1}{y+1} = \frac{1}{x} + c \text{ mit } c \in \mathbb{R} \\
\Rightarrow y(x) &= -1 - \frac{1}{\frac{1}{x} + c} = -1 - \frac{x}{1+cx}
\end{aligned}$$

Probe:

$$\begin{aligned}
x^2 y'(x) + (y+1)^2 &= x^2 \left(-1 - \frac{x}{1+cx} \right)' + \left(-\frac{x}{1+cx} \right)^2 \\
&= x^2 \left(-\frac{1+cx-xc}{(1+cx)^2} \right) + \frac{x^2}{(1+cx)^2} = 0
\end{aligned}$$

Lösung 2:

a) Lösung durch Separation:

$$\begin{aligned}
y' = y^2 - 16 &\Rightarrow \frac{y'}{y^2-16} = \frac{1}{(y-4)(y+4)} = 1 \\
\Rightarrow \int \frac{1}{(y-4)(y+4)} dy &= \int \frac{1}{8(y-4)} - \frac{1}{8(y+4)} = \int 1 dx \\
\Rightarrow \log |y-4| - \log |y+4| &= 8x + c \Rightarrow \frac{y-4}{y+4} = C e^{8x} \Rightarrow y(x) = \frac{4 + 4C e^{8x}}{1 - C e^{8x}}
\end{aligned}$$

Mit $y(0) = 5$ wird $C \in \mathbb{R}$ festgelegt: $C e^0 = C = \frac{y(0)-4}{y(0)+4} = \frac{5-4}{5+4} = \frac{1}{9}$.

Die Lösung der Anfangswertaufgabe lautet $y(x) = \frac{36 + 4e^{8x}}{9 - e^{8x}}$.

b) Ähnlichkeitsdifferentialgleichung: $y' = \frac{x-y}{x} = 1 - \frac{y}{x}$

Substitution $u(x) = \frac{y(x)}{x}$

$$xu' + u = 1 - u \Rightarrow u' = \frac{1-2u}{x}$$

$$\Rightarrow \frac{u'}{2u-1} = -\frac{1}{x}, \quad u \neq \frac{1}{2} \Rightarrow \int \frac{du}{2u-1} = -\int \frac{1}{x} dx$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \log |2u-1| = -\log |x| + c_1, \quad c_1 = \log c_2 \in \mathbb{R}, \quad c_2 > 0$$

$$\Rightarrow \log |2u-1| = 2 \log \frac{c_2}{|x|} = \log \left(\frac{c_2}{x} \right)^2$$

$$\Rightarrow 2u-1 = \pm \left(\frac{c_2}{x} \right)^2$$

$$\Rightarrow u = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2} \left(\frac{c_2}{x} \right)^2$$

$$\Rightarrow y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} \frac{c_3}{x}, \quad c_3 \neq 0$$

Insgesamt lautet die allgemeine Lösung $y(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} \frac{c_3}{x}$ mit $c_3 \in \mathbb{R}$.

Der Fall $u(x) = \frac{1}{2}$ ist hierin dann enthalten.

Lösung 3:

a) Allgemeine Lösung der homogenen linearen Differentialgleichung

$2y' - 3y = 0$ durch Separation:

$$2y' - 3y = 0 \Rightarrow \int \frac{1}{y} dy = \int \frac{3}{2} dx \Rightarrow y_h(x) = c \cdot e^{3x/2}, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Spezielle Lösung der inhomogenen linearen Differentialgleichung durch Variation der Konstanten:

$$y_p(x) = c(x)e^{3x/2}.$$

Die Bestimmungsgleichung für $c(x)$ lautet: $c'(x)e^{3x/2} = b(x)$.

$$2y' - 3y = 4 \Rightarrow y' - \frac{3y}{2} = 2 \Rightarrow b(x) = 2$$

$$\Rightarrow c'(x)e^{3x/2} = 2 \Rightarrow c'(x) = 2e^{-3x/2} \Rightarrow c(x) = -\frac{4}{3}e^{-3x/2}$$

$$\Rightarrow y_p(x) = c(x)e^{3x/2} = -\frac{4}{3}e^{-3x/2}e^{3x/2} = -\frac{4}{3}$$

Damit ergibt sich die allgemeine Lösung der inhomogenen linearen Differentialgleichung

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = ce^{3x/2} - \frac{4}{3}, \quad c \in \mathbb{R}.$$

- b) Allgemeine Lösung der homogenen linearen Differentialgleichung durch Separation:

$$\begin{aligned} y' - \frac{2y}{x} = 0 &\Rightarrow \int \frac{dy}{y} = \int \frac{2}{x} dx \Rightarrow \log |y| = 2 \log |x| + \tilde{c} = \log x^2 + \tilde{c} \\ &\Rightarrow y_h(x) = cx^2, \quad c \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Spezielle Lösung durch Variation der Konstanten $y_p(x) = c(x)x^2$ der inhomogenen linearen Differentialgleichung mit $h(x) = x^3e^{x^2}$ durch Variation der Konstanten:

$$\begin{aligned} c'(x)x^2 = h(x) = x^3e^{x^2} &\Rightarrow c'(x) = xe^{x^2} \Rightarrow c(x) = \frac{1}{2}e^{x^2} \\ &\Rightarrow y_p(x) = c(x)x^2 = \frac{x^2}{2}e^{x^2} \end{aligned}$$

Damit ergibt sich die allgemeine Lösung der inhomogenen linearen Differentialgleichung

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = cx^2 + \frac{x^2}{2}e^{x^2}, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Lösung 4:

- a) (i) Allgemeine Lösung der homogenen linearen Differentialgleichung $2y' - 3y = 0$ durch Separation:
- $$2y' - 3y = 0 \Rightarrow \int \frac{1}{y} dy = \int \frac{3}{2} dx \Rightarrow y_h(x) = c \cdot e^{3x/2}, \quad c \in \mathbb{R}.$$
- (ii) Ein spezieller Ansatz zur Berechnung der inhomogenen Differentialgleichung $2y' - 3y = 4$ lautet:

$$y_p(x) = a.$$

Dieser wird in die inhomogene Differentialgleichung eingesetzt:

$$4 = 2y_p'(x) - 3y_p(x) = 2(a)' - 3a = -3a \Rightarrow a = -\frac{4}{3}.$$

Eine spezielle inhomogene Lösung lautet $y_p(x) = -\frac{4}{3}$.

- (iii) Damit ergibt sich die allgemeine Lösung der inhomogenen Differentialgleichung mit $c \in \mathbb{R}$

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = c \cdot e^{3x/2} - \frac{4}{3}.$$

- b) (i) Allgemeine Lösung der homogenen Differentialgleichung $5y' + 4y = 0$ durch Separation

$$5y' + 4y = 0 \Rightarrow \frac{y'}{y} = -\frac{4}{5} \Rightarrow \int \frac{1}{y} dy = -\int \frac{4}{5} dx \Rightarrow \log |y| = -\frac{4x}{5} + K.$$

Auflösen nach y ergibt $y_h(x) = Ce^{-4x/5}$ mit $C \in \mathbb{R}$.

- (ii) Ein spezieller Ansatz zur Berechnung der inhomogenen Differentialgleichung $5y' + 4y = 3e^{2x} + e^{-x}$ lautet:

$$y_p(x) = ae^{2x} + be^{-x}.$$

Dieser wird in die inhomogene Differentialgleichung eingesetzt:

$$\begin{aligned} 3e^{2x} + e^{-x} &= 5(ae^{2x} + be^{-x})' + 4(ae^{2x} + be^{-x}) \\ &= (10a + 4a)e^{2x} + (4b - 5b)e^{-x} \\ &= 14ae^{2x} - be^{-x}. \end{aligned}$$

Mit einem Koeffizientenvergleich erhält man

$$14a = 3 \Rightarrow a = \frac{3}{14}, \quad 1 = -b \Rightarrow b = -1.$$

Eine spezielle inhomogene Lösung lautet $y_p(x) = \frac{3}{14}e^{2x} - e^{-x}$.

- (iii) Damit ergibt sich die allgemeine Lösung der inhomogenen Differentialgleichung mit $C \in \mathbb{R}$

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = Ce^{-4x/5} + \frac{3}{14}e^{2x} - e^{-x}.$$

Lösung 5:

Substitution $u = x - y + 3 \Rightarrow u(1) = 3$

$$1 - u' = u^2 \Rightarrow u' = 1 - u^2 \Rightarrow \frac{u'}{1 - u^2} = 1, \quad u^2 \neq 1$$

$$\Rightarrow \int \frac{du}{1 - u^2} = \int dx \Rightarrow \frac{1}{2} \ln \left| \frac{u+1}{u-1} \right| = x + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \ln \left| \frac{u+1}{u-1} \right| = \ln \frac{u+1}{u-1} = 2x + 2c, \quad \text{da } u(1) > 1$$

$$u(1) = 3: \quad \ln \frac{u(1)+1}{u(1)-1} = \ln 2 = 2 \cdot 1 + 2c \Rightarrow 2c = \ln 2 - 2$$

$$\Rightarrow \ln \frac{u+1}{u-1} = 2x + 2c = 2x + \ln 2 - 2$$

$$\Rightarrow \frac{u+1}{u-1} = e^{2x+\ln 2-2} = 2e^{2x-2} \Rightarrow u = \frac{2e^{2x-2} + 1}{2e^{2x-2} - 1}$$

Mit der Rücksubstitution $y = x + 3 - u$ lautet die Lösung also

$$y(x) = x + 3 - \frac{2e^{2x-2} + 1}{2e^{2x-2} - 1}.$$

Lösung 6:

a) Bernoullische Differentialgleichung:

$$y' + ay + by^\alpha = y' + y + x^2 y^4 = 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha = 4, a = 1, b = x^2$$

Substitution:

$$u(x) = y^{(1-\alpha)}(x) = 1/y^3(x) \quad \Leftrightarrow \quad y(x) = u^{1/(1-\alpha)}(x) = 1/\sqrt[3]{u(x)}$$

transformierte Differentialgleichung:

$$u'(x) + (1 - \alpha)a(x)u(x) = (\alpha - 1)b(x) \quad \Rightarrow \quad u' - 3u = 3x^2$$

allgemeine homogene Lösung: $u_h(x) = Ke^{3x}$ mit $K \in \mathbb{R}$

Speziellen Ansatz

$$u_p(x) = ax^2 + bx + c$$

in die inhomogene Gleichung einsetzen

$$2ax + b - 3(ax^2 + bx + c) = -3ax^2 + (2a - 3b)x + b - 3c = 3x^2.$$

Koeffizientenvergleich:

$$a = -1, b = -2/3, c = -2/9 \quad \Rightarrow \quad u(x) = Ke^{3x} - x^2 - \frac{2x}{3} - \frac{2}{9}$$

Rücksubstitution:

$$y(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{Ke^{3x} - x^2 - \frac{2x}{3} - \frac{2}{9}}}$$

b) Bernoullische Differentialgleichung:

$$y' + xy = xy^3 \quad \Leftrightarrow \quad y' + xy - xy^3 = 0 = y' + ay + by^\alpha$$

mit $\alpha = 3, a(x) = x$ und $b(x) = -x$.

Substitution $y(x) = \frac{1}{\sqrt{u(x)}}$ eingesetzt in die Differentialgleichung ergibt:

$$u' - 2xu = -2x.$$

Die homogene DGL $u' - 2xu = 0$ wird durch $u_h(x) = Ce^{x^2}$ gelöst.

Ein spezielle Lösung der inhomogenen DGL $u' - 2xu = -2x$ ergibt sich aus der Variation der Konstanten:

$$u_p(x) = C(x)e^{x^2} \Rightarrow C'(x) = -2xe^{-x^2} \Rightarrow C(x) = e^{-x^2} \Rightarrow u_p(x) = 1.$$

Die allgemeine Lösung der inhomogenen DGL lautet: $u(x) = Ce^{x^2} + 1$.

Rücksubstitution ergibt:

$$y(x) = \frac{1}{\sqrt{1 + Ce^{x^2}}}.$$

Lösung 7:

Ein Vergleich von

$$y' + (6t - 4)y + (3t - 1)y^2 = 3 - 3t$$

mit der Riccatischen Differentialgleichung

$$y'(t) + a(t)y(t) + b(t)y^2(t) = c(t)$$

ergibt $a(t) = 6t - 4$ und $b(t) = 3t - 1$ und $c(t) = 3 - 3t$.

Mit $y_0(t) = c$ versuchen wir eine spezielle Lösung der DGL zu erhalten:

$$0 + (6t - 4)c + (3t - 1)c^2 = (6c + 3c^2)t - 4c - c^2 = 3 - 3t$$

$$\Rightarrow 3 = -4c - c^2, \quad -3 = 6c + 3c^2$$

$$\Rightarrow 4c + c^2 = 6c + 3c^2 \Rightarrow 0 = 2c(1 + c) \Rightarrow c = -1.$$

Also ist $y_0(x) = -1$ eine spezielle Lösung.

Damit ist dann die Substitution $u(t) = \frac{1}{y(t) - y_0(t)} = \frac{1}{y(t) + 1}$ möglich.

Diese ergibt

$$u' - (6t - 4 + 2(3t - 1)(-1))u = 3t - 1 \Rightarrow u' + 2u = 3t - 1.$$

Die allgemeine Lösung der homogenen DGL lautet $u(t) = ce^{-2t}$.

Ansatz für eine spezielle Lösung der inhomogenen DGL $u_p(t) = m + nt$

$$u_p' + 2u_p = 2nt + 2m + n = 3t - 1$$

Koeffizientenvergleich

$$\Rightarrow \quad 2n = 3, \quad 2m + n = -1 \quad \Rightarrow \quad n = \frac{3}{2} \quad \Rightarrow \quad m = -\frac{5}{4}$$

Also ist $u_p(t) = -\frac{5}{4} + \frac{3}{2}t$ eine spezielle Lösung.

Damit lautet die allg. Lösung der inhomogenen DGL $u(t) = c e^{-2t} - \frac{5}{4} + \frac{3}{2}t$

Lösung der Riccatischen Differentialgleichung $y(t) = \frac{1}{c e^{-2t} - \frac{5}{4} + \frac{3}{2}t} - 1, \quad c \in \mathbb{R}.$

Lösung 8:

Die Differentialgleichung

$$(t^2 e^y - 1)y' + 2t e^y = 0$$

erfüllt die Integrabilitätsbedingung mit $g(t, y) = 2t e^y$ und $h(t, y) = t^2 e^y - 1$, denn

$$g_y(t, y) = \frac{d}{dy} (2t e^y) = 2t e^y = \frac{d}{dt} (t^2 e^y - 1) = h_t(t, y).$$

Die DGL ist also exakt und die implizite Lösungsdarstellung lautet

$$\Phi(t, y(t)) = C \quad \text{mit} \quad C \in \mathbb{R}.$$

Potentialkonstruktion:

$$\Phi_t = 2t e^y \quad \Rightarrow \quad \Phi(t, y) = t^2 e^y + \varphi(y)$$

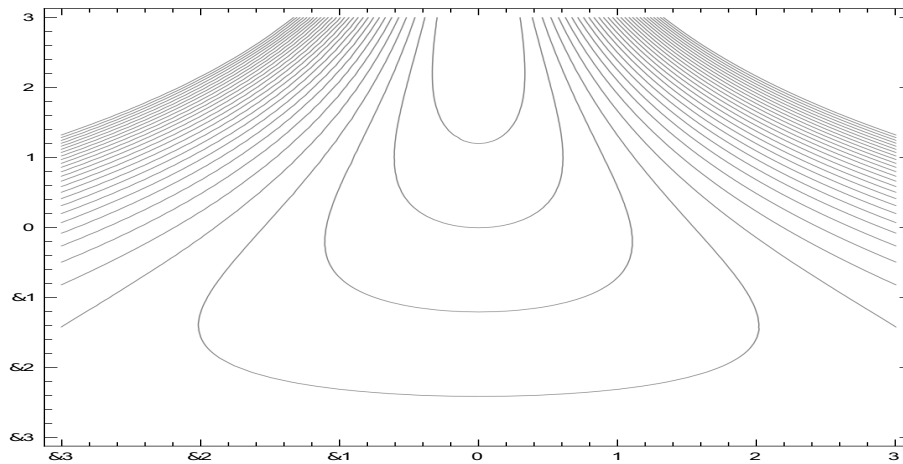
$$\Rightarrow \quad \Phi_y(t, y) = (t^2 e^y + \varphi(y))_y = t^2 e^y + \varphi'(y) \stackrel{!}{=} t^2 e^y - 1 = h(t, y)$$

$$\Rightarrow \quad \varphi'(y) = -1 \quad \Rightarrow \quad \varphi(y) = -y + k \quad \text{mit} \quad k \in \mathbb{R}.$$

$$\Rightarrow \Phi(t, y) = t^2 e^y - y + k.$$

Die implizite Lösungsdarstellung von $y(t)$ lautet $t^2 e^y - y = C$ mit $C \in \mathbb{R}.$

Lösungsdarstellung von Φ durch Äquipotentiallinien:

Bild 8 Äquipotentiallinien für $t^2 e^y - y = C$ **Lösung 9:**

Die Differentialgleichung

$$\underbrace{y + ty^3}_{=g(t,y)} + \underbrace{(t + 2t^2y^2)}_{=h(t,y)} y' = 0$$

ist nicht exakt, denn $g_y = 1 + 3ty^2 \neq 1 + 4ty^2 = h_t$.

Die Integrabilitätsbedingung nach Multiplikation der Gleichung mit dem integrierenden Faktor der Form $m = m(t \cdot y)$ lautet (Kettenregel verwenden)

$$\frac{\partial}{\partial t}(m(t \cdot y) \cdot h(t, y)) = ym'h + mh_t \stackrel{!}{=} \frac{\partial}{\partial y}(m(t \cdot y) \cdot g(t, y)) = tm'g + mg_y.$$

Auflösen nach m' ergibt mit $z := ty$ eine gewöhnliche Differentialgleichung für $m(z)$ in der Variablen z :

$$\begin{aligned} m'(z) &= \frac{g_y - h_t}{yh - tg} m(z) = \frac{1 + 3ty^2 - (1 + 4ty^2)}{ty + 2t^2y^3 - (ty + t^2y^3)} m(z) \\ &= -\frac{ty^2}{t^2y^3} m(z) = -\underbrace{\frac{1}{ty}}_{=a} m(z) = -\frac{1}{z} m(z) \end{aligned}$$

Kann $a = a(t, y)$ nicht in $a = a(z)$ überführt werden, lässt sich kein integrierender Faktor in der Form $m(t, y) = m(t \cdot y)$ finden.

Die Differentialgleichung in m

$$m'(z) = -\frac{1}{z} m(z)$$

wird durch $m(z) = \frac{1}{z} = \frac{1}{ty}$ gelöst. Multiplikation der Ausgangsgleichung mit m

ergibt die exakte Differentialgleichung

$$\frac{1}{t} + y^2 + \left(\frac{1}{y} + 2ty\right) y' = 0 .$$

Berechnung des zugehörigen Potentials $\Phi(t, y)$:

$$\Phi_t = \frac{1}{t} + y^2$$

$$\Rightarrow \Phi(t, y) = \ln |t| + ty^2 + \varphi(y)$$

$$\Rightarrow \Phi_y(t, y) = 2ty + \varphi'(y).$$

$$\text{Vergleich mit } \Phi_y(t, y) = \frac{1}{y} + 2ty \text{ ergibt } \varphi'(y) = \frac{1}{y}$$

also $\varphi(y) = \ln |y| + c$ mit $c \in \mathbb{R}$.

Setzt man dies oben ein, so folgt $\Phi(t, y) = \ln |t| + ty^2 + \ln |y| + c$.

Die implizite Lösungsdarstellung lautet also

$$\ln |ty| + ty^2 = C .$$

Lösung 10:

Die Differentialgleichung ist autonom

$$(1 - y)y'' + 2(y')^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad y'' = \frac{2(y')^2}{y - 1} = f(y, y') .$$

Angenommen zu $y(x)$ existiert eine Umkehrfunktion $x(y)$.

Setze $v(y) = y'(x(y))$. Aus

$$f(y, y') = y''(x) = (v(y(x)))' = v'(y)y'(x) = v'v$$

ergibt sich dann

$$v'(y) = \frac{f(y, v)}{v} = \frac{2v^2}{v(y - 1)} .$$

Trennung der Variablen ergibt

$$\ln |v| = 2 \ln |y - 1| + c \Rightarrow v = y' = C(y - 1)^2 .$$

Erneute Trennung der Variablen ergibt $-\frac{1}{y - 1} = Cx + D$.

Die allgemeine Lösung lautet daher

$$y = \frac{Cx + D - 1}{Cx + D} = \frac{x + C_1}{x + C_2} .$$

Lösung 11:

a) Die Differentialgleichung ist autonom und hängt nicht von y' ab.

$y'' = y^{-3} = f(y)$ wird mit y' multipliziert und nach x integriert:

$$y''y' = y'y^{-3} \Rightarrow \int y' \underbrace{y'' dx}_{dy'} = \int y^{-3} \underbrace{y' dx}_{dy}$$

$$\Rightarrow \frac{(y')^2}{2} = c - \frac{1}{2y^2}$$

$$\Rightarrow y' = \pm \sqrt{C - \frac{1}{y^2}}$$

$$\Rightarrow \pm \frac{y'}{\sqrt{C - \frac{1}{y^2}}} = 1$$

$$\Rightarrow x + D = \pm \int \frac{1}{\sqrt{C - \frac{1}{y^2}}} dy = \pm \int \frac{y}{\sqrt{Cy^2 - 1}} dy = \pm \frac{1}{C} \sqrt{Cy^2 - 1}$$

$$\Rightarrow Cy^2 = 1 + (C(x + D))^2 \Rightarrow y = \pm \sqrt{\frac{1 + C^2(x + D)^2}{C}}$$

b) Die Differentialgleichung hängt nicht explizit von y ab:

$$xy'' = y' \ln \left(\frac{y'}{x} \right) \Leftrightarrow y'' = \frac{y'}{x} \ln \left(\frac{y'}{x} \right) = f(x, y')$$

Man setzt $y' = z$ und erhält eine Ähnlichkeitsdifferentialgleichung in der $u = \frac{z}{x}$ substituiert wird:

$$z' = \frac{z}{x} \ln \left(\frac{z}{x} \right) \Rightarrow u' = \frac{u \ln u - u}{x}$$

$$\Rightarrow \int \frac{du}{u \ln u - u} = \int \frac{dx}{x} \Rightarrow \ln |\ln u - 1| = \ln |x| + c$$

$$\Rightarrow \ln u = Cx + 1 \Rightarrow u = e^{Cx+1}$$

$$\Rightarrow z = y' = xe^{Cx+1} \Rightarrow y = \int xe^{Cx+1} dx$$

$$y = \left\{ \begin{array}{ll} \frac{ex^2}{2} & \text{falls } C = 0 \\ e^{Cx+1} \left(\frac{x}{C} - \frac{1}{C^2} \right) & \text{falls } C \neq 0 \end{array} \right\} + K$$

Lösung 12:

a) Trennung der Variablen ergibt:

$$y' = 2xe^{-y} \Rightarrow \int e^y dy = \int 2x dx \Rightarrow e^y = x^2 + C \Rightarrow y(x) = \ln(x^2 + C).$$

Die Anfangsbedingung ergibt $0 = y(0) = \ln C \Rightarrow C = 1$.

Lösung der Anfangswertaufgabe: $y(x) = \ln(x^2 + 1)$ existiert für alle $x \in \mathbb{R}$.

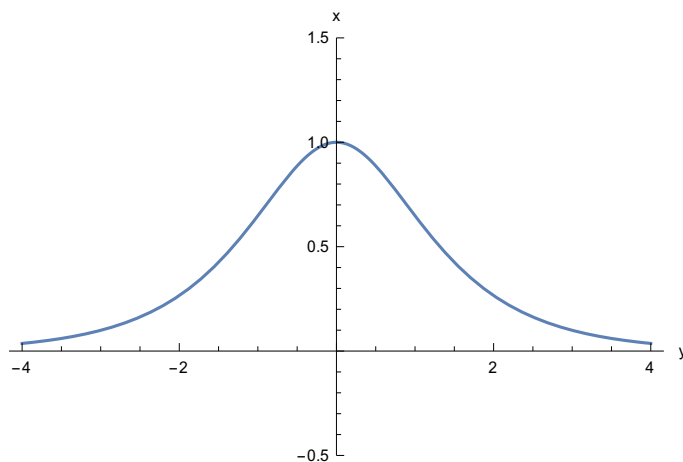


Bild 12 a) Funktionsgraph von $y(x) = \ln(x^2 + 1)$

b) Trennung der Variablen ergibt:

$$y' = 2xy \Rightarrow \frac{y'}{y} = 2x \Rightarrow \int \frac{dy}{y} = \int 2x dx \Rightarrow \ln |y| = x^2 + c \Rightarrow y(x) = Ce^{x^2}.$$

Die Anfangsbedingung ergibt $3 = y(0) = Ce^{0^2} = C$.

Lösung der Anfangswertaufgabe: $y(x) = 3e^{x^2}$ existiert für alle $x \in \mathbb{R}$.

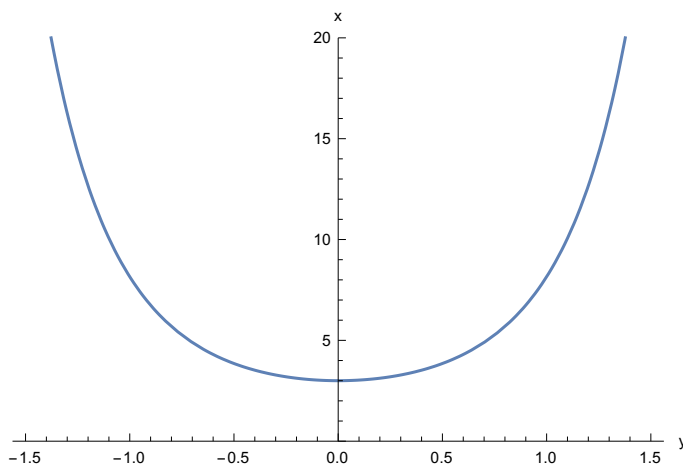


Bild 12 b) Funktionsgraph von $y(x) = 3e^{x^2}$

c) Bernoullische Differentialgleichung:

$$y' + ay + by^\alpha = y' - \frac{y}{3} - \frac{y^4}{3} = 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha = 4, a = -1/3, b = -1/3.$$

$$\text{Substitution: } u(x) = y^{(1-\alpha)}(x) = \frac{1}{y^3(x)} \Leftrightarrow y(x) = u^{1/(1-\alpha)}(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{u(x)}}$$

Transformierte lineare inhomogene Differentialgleichung:

$$u'(x) + (1 - \alpha)a(x)u(x) = (\alpha - 1)b(x) \quad \Rightarrow \quad u' + u = -1.$$

Allgemeine homogene Lösung: $u_h(x) = ce^{-x}$ mit $c \in \mathbb{R}$.

Variation der Konstanten: $u_p(x) = c(x)e^{-x}$

$$\Rightarrow c'(x)e^{-x} = -1 \Rightarrow c'(x) = -e^x \Rightarrow c(x) = -e^x \Rightarrow u_p(x) = -1$$

$$\Rightarrow u(x) = ce^{-x} - 1 \Rightarrow y(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{u(x)}} = \frac{1}{\sqrt[3]{ke^{-x} - 1}}$$

$$\Rightarrow 1 = y(0) = \frac{1}{\sqrt[3]{k - 1}} \Rightarrow k = 2 \Rightarrow y(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{2e^{-x} - 1}}$$

Die Lösung existiert für $2e^{-x} - 1 > 0 \Rightarrow x < \ln 2 = 0.693147\dots$

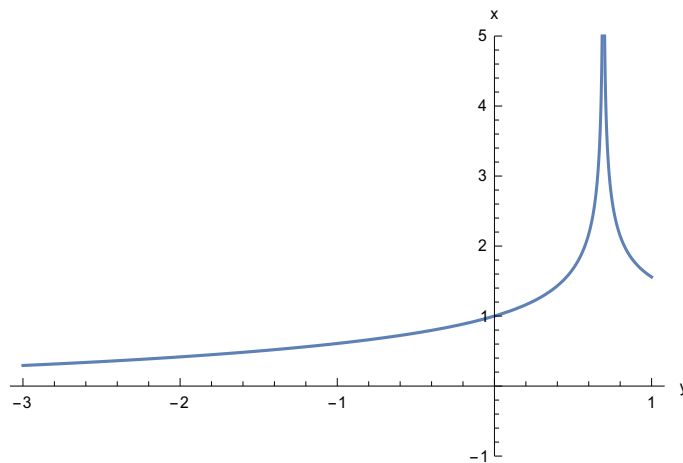


Bild 12 c) Funktionsgraph von $y(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{2e^{-x}-1}}$

Lösung 13:

a) $y' = 2y - 6x + 3 =: f(x, y)$

Eulerschen-Polygonzug-Verfahren mit Startwert

$$y(0) = y_0 = 1$$

$$y_{k+1} = y_k + h \cdot f(x_k, y_k) = y_k + h(2y_k - 6x_k + 3)$$

$$\begin{aligned}
 x_0 &= 0.0 & y_0 &= 1.00000 \\
 x_1 &= 0.1 & y_1 &= 1.50000 \\
 x_2 &= 0.2 & y_2 &= 2.04000 \\
 x_3 &= 0.3 & y_3 &= 2.62800 \\
 x_4 &= 0.4 & y_4 &= 3.27360 \\
 x_5 &= 0.5 & y_5 &= 3.98832 \approx y(0.5)
 \end{aligned}$$

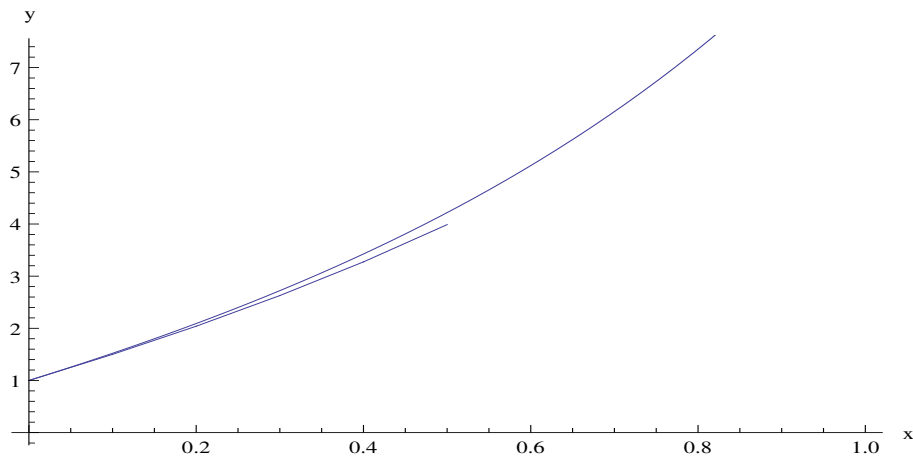


Bild 13 a) $y(x)$ mit Polygonzug

b) Verfahren der sukzessiven Approximation mit Startwert $y^{[0]}(x) = y_0 = 1$

$$y^{[k+1]}(x) = y_0 + \int_0^x f(t, y^{[k]}(t)) dt = 1 + \int_0^x 2y^{[k]}(t) - 6t + 3 dt$$

$$y^{[1]}(x) = 1 + \int_0^x 2 - 6t + 3 dt = 1 + 5x - 3x^2$$

$$y^{[2]}(x) = 1 + \int_0^x 2(1 + 5t - 3t^2) - 6t + 3 dt = 1 + 5x + 2x^2 - 2x^3$$

$$\begin{aligned}
 y^{[3]}(x) &= 1 + \int_0^x 2(1 + 5t + 2t^2 - 2t^3) - 6t + 3 dt \\
 &= 1 + 5x + 2x^2 + \frac{4}{3}x^3 - x^4
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 y^{[4]}(x) &= 1 + \int_0^x 2(1 + 5t + 2t^2 + \frac{4}{3}t^3 - t^4) - 6t + 3 dt \\
 &= 1 + 5x + 2x^2 + \frac{4}{3}x^3 + \frac{2}{3}x^4 - \frac{2}{5}x^5
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 y^{[5]}(x) &= 1 + \int_0^x 2(1 + 5t + 2t^2 + \frac{4}{3}t^3 + \frac{2}{3}t^4 - \frac{2}{5}t^5) - 6t + 3 dt \\
 &= 1 + 5x + 2x^2 + \frac{4}{3}x^3 + \frac{2}{3}x^4 + \frac{4}{15}x^5 - \frac{2}{15}x^6
 \end{aligned}$$

$$y^{[5]}(0.5) = 4.214583333 \approx y(0.5)$$

c) Die allgemeine Lösung der Differentialgleichung $y' = 2y - 6x + 3$ lautet

$$y(x) = ce^{2x} + 3x$$

Mit $y(0) = 1$ erhält man die Lösung der Anfangswertaufgabe und den Funktionswert an der Stelle $x = 0.5$

$$y(x) = e^{2x} + 3x \Rightarrow y(0.5) = e + 1.5 = 4.2182818\dots$$

d)

$$y(x) = e^{2x} + 3x = 3x + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^k}{k!} x^k = 1 + 5x + 2x^2 + \frac{4}{3}x^3 + \frac{2}{3}x^4 + \frac{4}{15}x^5 + \sum_{k=6}^{\infty} \frac{2^k}{k!} x^k$$

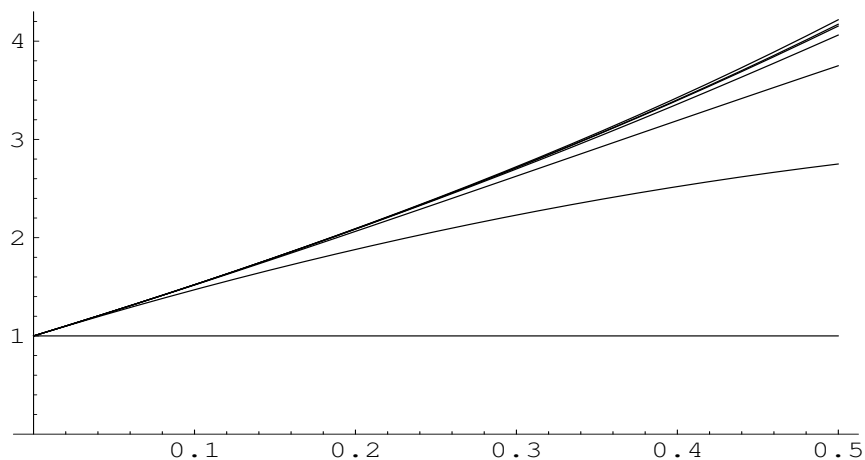


Bild 13 b) $y(x), y^{[0]}(x), \dots, y^{[5]}(x)$

Lösung 14:

- a) Bei $y'(t) + y(t) + y^{2/3}(t) = 0$ handelt es sich um eine Bernoullische Differentialgleichung mit $\alpha = \frac{2}{3}$, daher führt die Substitution

$u = y^{1-\alpha} = y^{1/3}$ auf:

$$u' = \frac{1}{3}y^{-2/3}y' = \frac{1}{3}y^{-2/3}(-y - y^{2/3}) = -\frac{1}{3}(y^{1/3} + 1) = -\frac{1}{3}(u + 1),$$

mit der allgemeinen Lösung $u(t) = ce^{-t/3} - 1$.

Eine Lösung der Anfangswertaufgabe ergibt sich damit durch:

$$y(t) = u^3(t) = (ce^{-t/3} - 1)^3$$

$$\Rightarrow 1 = y(0) = (c - 1)^3 \Rightarrow c = 2,$$

Eine Lösung lautet also: $y(t) = (2e^{-t/3} - 1)^3$

- b) $0 = y(t) = (2e^{-t/3} - 1)^3 \Rightarrow 2e^{-t/3} = 1 \Rightarrow t = 3 \ln 2$

$$\Rightarrow y(t) > 0 \text{ für } t \in [0, 3 \ln 2[.$$

Die Eindeutigkeit der Lösung im Intervall $[0, 3 \ln 2]$ wird nun über den Satz von Picard und Lindelöf nachgewiesen.

$$y'(t) + y(t) + y^{2/3}(t) = 0 \quad \Rightarrow \quad y'(t) = -y(t) - y^{2/3}(t) =: f(t, y)$$

Wegen $f_y(t, y) = -1 - \frac{2}{3y^{1/3}}$ ist f eine C^1 -Funktion und lipschitzstetig bzgl. der y -Koordinate im Quader $[a, b] \times [c, d]$ mit $0 \leq a < b < 3 \ln 2$ und $0 < c < d$. Als Lipschitzkonstante L kann

$$|f_y(t, y)| = \left| -1 - \frac{2}{3y^{1/3}} \right| \leq 1 + \frac{2}{3c^{1/3}} =: L$$

gewählt werden. Damit ist die Lösung $y(t)$ eindeutig bestimmt im Intervall $[a, b]$ und damit auch in $[0, 3 \ln 2]$.

- c) Nach a) löst $y_1(t) = (2e^{-t/3} - 1)^3$ die Anfangswertaufgabe im Intervall $[0, b]$ mit $b \in \mathbb{R}$.

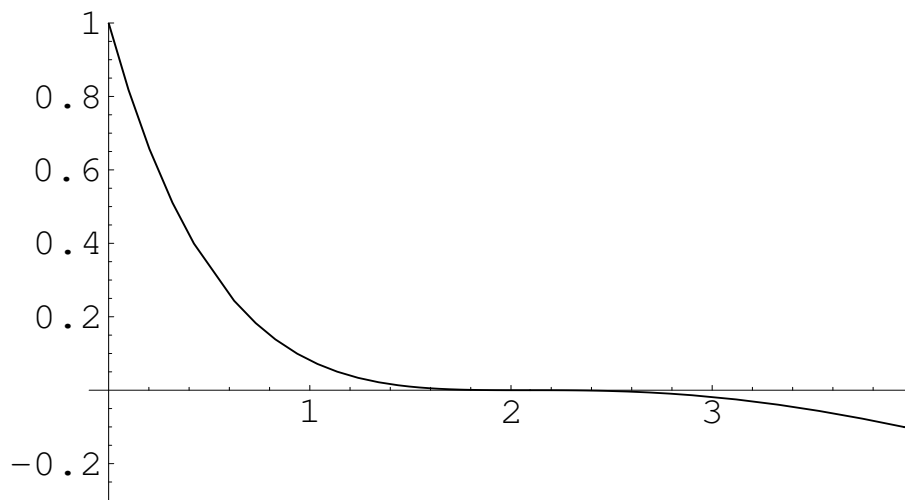


Bild 14 $y_1(t) = (2e^{-t/3} - 1)^3$

Es gilt $y_1(3 \ln 2) = 0$ und aus der Differentialgleichung folgt

$$y_1'(3 \ln 2) = -y_1(3 \ln 2) - y_1^{2/3}(3 \ln 2) = 0.$$

Außerdem löst $y^* \equiv 0$ die Differentialgleichung. Daher ist

$$y_2(t) := \begin{cases} (2e^{-t/3} - 1)^3 & , 0 \leq t \leq 3 \ln 2 \\ 0 & 3 \ln 2 < t \leq b \end{cases}$$

eine C^1 -Funktion auf $[0, b]$, die ebenfalls die Differentialgleichung löst und die Anfangsbedingung erfüllt, also Lösung der Anfangswertaufgabe ist.

Lösung 15:

a) Die Lösung in Polynomform

$$\mathbf{y}^1(t) := \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 \\ b_0 + b_1 t + b_2 t^2 + b_3 t^3 \end{pmatrix}$$

wird in die Differentialgleichung eingesetzt und die Unbekannten $a_0, \dots, b_3$ werden über Koeffizientenvergleich bestimmt:

1. Gleichung:

$$\begin{aligned} y_1'(t) &= -y_1(t)/t - 2y_2(t)/t^3 \\ \Rightarrow & a_1 + 2a_2t + 3a_3t^2 \\ &= -(a_0 + a_1t + a_2t^2 + a_3t^3)/t - 2(b_0 + b_1t + b_2t^2 + b_3t^3)/t^3 \\ \Leftrightarrow & 3a_3t^2 + 2a_2t + a_1 \\ &= -a_3t^2 - a_2t - a_1 - 2b_3 - (a_0 + 2b_2)/t - 2b_1/t^2 - 2b_0/t^3 \\ \Rightarrow & a_3 = 0, a_2 = 0, b_1 = 0, b_0 = 0 \\ & a_1 = -a_1 - 2b_3, a_0 + 2b_2 = 0 \Rightarrow a_1 = -b_3, a_0 = -2b_2 \\ \Rightarrow & y_1(t) = a_1t + a_0, \quad y_2(t) = b_3t^3 + b_2t^2 \end{aligned}$$

2. Gleichung:

$$\begin{aligned} y_2'(t) &= -2ty_1(t) + y_2(t)/t \\ \Rightarrow & 3b_3t^2 + 2b_2t \\ &= -2t(a_1t + a_0) + (b_3t^3 + b_2t^2)/t \\ &= (-2a_1 + b_3)t^2 + (-2a_0 + b_2)t \\ \Rightarrow & 3b_3 = -2a_1 + b_3, 2b_2 = -2a_0 + b_2 \\ \Rightarrow & a_0 = 0 = b_2, -b_3 = a_1 \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Für $a_1 = 1$ erhält man damit eine Lösung der Differentialgleichung

$$\mathbf{y}^1(t) = \begin{pmatrix} t \\ -t^3 \end{pmatrix}.$$

b) $\mathbf{y}^2(t)$ löst die Differentialgleichung:

$$\begin{pmatrix} -1/t & -2/t^3 \\ -2t & 1/t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/t^3 \\ 1/t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3/t^4 \\ -1/t^2 \end{pmatrix} = \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} 1/t^3 \\ 1/t \end{pmatrix}.$$

Die Lösungen $\mathbf{y}^1(t)$ und $\mathbf{y}^2(t)$ sind linear unabhängig, denn für die Matrix $\mathbf{Y}(t) := (\mathbf{y}^1(t) | \mathbf{y}^2(t))$ gilt für die Wronski-Determinante

$$\det \begin{pmatrix} t & 1/t^3 \\ -t^3 & 1/t \end{pmatrix} = 2 \neq 0 \quad \text{für } t \neq 0.$$

Damit ist $\mathbf{Y}(t)$ Fundamentalmatrix.

- c) Mit $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^2$ lautet die allgemeine Lösung der Differentialgleichung $\mathbf{y}(t) = \mathbf{Y}(t) \mathbf{c}$. Die Lösung der Anfangswertaufgabe ergibt sich aus

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \mathbf{y}(1) = \mathbf{Y}(1) \mathbf{c} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{c} \Rightarrow \mathbf{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Lösung 16:

Zunächst wird die allgemeine Lösung des linearen homogenen Systems berechnet. Das System kann von unten nach oben aufgelöst werden, da die Systemmatrix obere Dreiecksform besitzt. Für die zweite Gleichung ergibt sich durch Separation

$$y_2' = \frac{y_2}{x} \Rightarrow \int \frac{dy_2}{y_2} = \int \frac{dx}{x} \Rightarrow \log |y_2| = \log |x| + k_2 \Rightarrow y_2 = c_2 x, \quad c_2 \in \mathbb{R}.$$

Setzt man diese Lösung in die erste Gleichung ein, so erhält man

$$y_1' = \frac{3}{x} y_1 + y_2 = \frac{3y_1}{x} + c_2 x$$

eine lineare inhomogene Differentialgleichung in y_1 .

Die lineare homogene Differentialgleichung in y_1 wird durch Separation gelöst

$$y_1' = \frac{3y_1}{x} \Rightarrow \int \frac{dy_1}{y_1} = 3 \int \frac{dx}{x} \Rightarrow \log |y_1| = 3 \log |x| + k_1 \Rightarrow y_{1h} = c_1 x^3, \quad c_1 \in \mathbb{R}.$$

Die lineare inhomogene Differentialgleichung in y_1 wird mit Variation der Konstanten über den Ansatz $y_{1p}(x) = k(x)x^3$ gelöst

$$\Rightarrow k'(x)x^3 = c_2 x \Rightarrow k'(x) = \frac{c_2}{x^2} \Rightarrow k(x) = -\frac{c_2}{x} \Rightarrow y_{1p}(x) = -c_2 x^2.$$

Damit erhält man die allgemeine Lösung der 1. Gleichung

$$y_1(x) = y_{1h}(x) + y_{1p}(x) = c_1 x^3 - c_2 x^2.$$

Die allgemeine Lösung $\mathbf{y}_h$ des homogenen Systems lautet also

$$\mathbf{y}_h(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 x^3 - c_2 x^2 \\ c_2 x \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} x^3 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} -x^2 \\ x \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} x^3 & -x^2 \\ 0 & x \end{pmatrix}}_{=\mathbf{Y}(x)} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

mit der Fundamentalmatrix $\mathbf{Y}(x)$. Eine spezielle Lösung des inhomogenen Systems ergibt sich durch Variation der Konstanten $\mathbf{y}_p(x) = \mathbf{Y}(x)\mathbf{c}(x)$

$$\mathbf{Y}(x)\mathbf{c}'(x) = \begin{pmatrix} x^3 & -x^2 \\ 0 & x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1'(x) \\ c_2'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1'(x)x^3 - c_2'(x)x^2 \\ c_2'(x)x \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 3 \\ \frac{1}{x} \end{pmatrix}.$$

$$\Rightarrow c_2'(x)x = -\frac{1}{x} \quad \Rightarrow \quad c_2'(x) = -\frac{1}{x^2}$$

$$\Rightarrow c_1'(x)x^3 - c_2'(x)x^2 = c_1'(x)x^3 + 1 = -3 \quad \Rightarrow \quad c_1'(x) = -\frac{4}{x^3}$$

$$\Rightarrow c_2(x) = \frac{1}{x}, \quad c_1(x) = \frac{2}{x^2} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{c}(x) = \begin{pmatrix} \frac{2}{x^2} \\ \frac{1}{x} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \mathbf{y}_p(x) = \mathbf{Y}(x)\mathbf{c}(x) = \begin{pmatrix} x^3 & -x^2 \\ 0 & x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{2}{x^2} \\ \frac{1}{x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Die allgemeine Lösung des linearen Differentialgleichungssystems lautet also

$$\mathbf{y}(x) = \mathbf{y}_h(x) + \mathbf{y}_p(x) = c_1 \begin{pmatrix} x^3 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} -x^2 \\ x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Lösung 17:

a) (i) Charakteristisches Polynom:

$$p(\lambda) = \begin{vmatrix} -3-\lambda & 1 \\ 1 & -3-\lambda \end{vmatrix} \\ = (-3-\lambda)(-3-\lambda) - 1 = \lambda^2 + 6\lambda + 8 = (\lambda+2)(\lambda+4) = 0$$

Eigenwerte: $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = -4$

Eigenvektoren:

$$\text{zu } \lambda_1 = -2: \begin{pmatrix} -1 & 1 & | & 0 \\ 1 & -1 & | & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{zu } \lambda_2 = -4: \begin{pmatrix} 1 & 1 & | & 0 \\ 1 & 1 & | & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Allgemeine Lösung des homogenen Systems:

$$\mathbf{y}_h(x) = c_1 e^{-2x} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 e^{-4x} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

(ii) Mit dem Fundamentalsystem $\mathbf{Y}(x) = \begin{pmatrix} e^{-2x} & e^{-4x} \\ e^{-2x} & -e^{-4x} \end{pmatrix}$ führt Variation der Konstanten $\mathbf{y}_p(x) = \mathbf{Y}(x)\mathbf{c}(x)$ auf

$$\mathbf{Y}(x)\mathbf{c}'(x) = \begin{pmatrix} 3x-1 \\ 6-x \end{pmatrix} \Leftrightarrow \\ \begin{pmatrix} e^{-2x} & e^{-4x} \\ e^{-2x} & -e^{-4x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3x-1 \\ 6-x \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} e^{-2x} & e^{-4x} \\ 0 & -2e^{-4x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3x-1 \\ 7-4x \end{pmatrix} \\ \Rightarrow \mathbf{c}'(x) = \begin{pmatrix} (x+5/2)e^{2x} \\ (2x-7/2)e^{4x} \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{c}(x) = \begin{pmatrix} (x/2+1)e^{2x} \\ (x/2-1)e^{4x} \end{pmatrix} \\ \Rightarrow \mathbf{y}_p(x) = \begin{pmatrix} e^{-2x} & e^{-4x} \\ e^{-2x} & -e^{-4x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (x/2+1)e^{2x} \\ (x/2-1)e^{4x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 2 \end{pmatrix}$$

(iii) Die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems lautet

$$\mathbf{y}(x) = \begin{pmatrix} x \\ 2 \end{pmatrix} + c_1 e^{-2x} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 e^{-4x} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Mit der Anfangsvorgabe erhält man

$$\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix} = \mathbf{y}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} + c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \\ \Leftrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 5 \\ 1 & -1 & -1 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 5 \\ 0 & -2 & -6 \end{array} \right) \Rightarrow \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Die Lösung der Anfangswertaufgabe lautet

$$\mathbf{y}(x) = \begin{pmatrix} x \\ 2 \end{pmatrix} + 2e^{-2x} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 3e^{-4x} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

b) Berechnung der Eigenwerte:

$$p(\lambda) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ -1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda-2)^2 + 1 \Rightarrow \lambda_1 = 2+i, \quad \lambda_2 = 2-i.$$

Berechnung der zugehörigen Eigenvektoren:

$$\lambda_1 = 2+i: \quad \left(\begin{array}{cc|c} 2-(2+i) & 1 & 0 \\ -1 & 2-(2+i) & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} -i & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \Rightarrow \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$$

Außerdem gilt $\lambda_2 = 2-i = \bar{\lambda}_1$ und $\mathbf{v}_2 = \bar{\mathbf{v}}_1$.

Damit ergibt sich die allgemeine Lösung der homogenen Differentialgleichung in komplexer Darstellung mit $d_1, d_2 \in \mathbb{C}$:

$$\mathbf{y}(x) = d_1 e^{(2+i)x} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} + d_2 e^{(2-i)x} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}.$$

Für die allgemeine reelle Lösung muss $e^{\lambda_1 x} \mathbf{v}_1 = e^{\bar{\lambda}_2 x} \bar{\mathbf{v}}_2$ in Real- und Imaginärteil zerlegt werden:

$$\begin{aligned} e^{\lambda_1 x} \mathbf{v}_1 &= e^{(2+i)x} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} = e^{2x} (\cos x + i \sin x) \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \\ &= e^{2x} \begin{pmatrix} \cos x \\ -\sin x \end{pmatrix} + i e^{2x} \begin{pmatrix} \sin x \\ \cos x \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Die allgemeine reelle Lösung der homogenen Differentialgleichung mit $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ lautet:

$$\mathbf{y}_h(x) = c_1 e^{2x} \begin{pmatrix} \cos x \\ -\sin x \end{pmatrix} + c_2 e^{2x} \begin{pmatrix} \sin x \\ \cos x \end{pmatrix}.$$

Eine spezielle Lösung der inhomogenen Differentialgleichung erhält man hier über einen Ansatz der Form $\mathbf{y}_p(x) = e^{3x}\mathbf{c}$. Eingesetzt in die Differentialgleichung ergibt sich

$$\mathbf{y}'_p = 3e^{3x}\mathbf{c} = e^{3x} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \mathbf{c} + e^{3x} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} -1 & 1 & -2 \\ -1 & -1 & 0 \end{array} \right) \Rightarrow \mathbf{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Man erhält $\mathbf{y}_p(x) = e^{3x} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ und die allgemeine reelle Lösung der inhomogenen Differentialgleichung lautet

$$\mathbf{y}(x) = c_1 e^{2x} \begin{pmatrix} \cos x \\ -\sin x \end{pmatrix} + c_2 e^{2x} \begin{pmatrix} \sin x \\ \cos x \end{pmatrix} + e^{3x} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Lösung 18:

Berechnung der Eigenwerte:

$$\begin{aligned} p_{\mathbf{A}}(\lambda) &= \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 1 \\ 1 & -\lambda & 0 \\ 5 & 3 & 1-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda \begin{vmatrix} -\lambda & 0 \\ 3 & 1-\lambda \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & -\lambda \\ 5 & 3 \end{vmatrix} \\ &= -\lambda^3 + \lambda^2 + 5\lambda + 3 = (3-\lambda)(\lambda+1)^2 \Rightarrow \lambda_1 = 3, \lambda_{2,3} = -1. \end{aligned}$$

Berechnung der zugehörigen Eigen- und Hauptvektoren:

Eigenvektor $\mathbf{v}^1$ zu $\lambda_1 = 3$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 0 & 0 \\ 5 & 3 & -2 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 1/3 & 0 \\ 0 & 3 & -1/3 & 0 \end{array} \right) \Rightarrow \mathbf{v}^1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 9 \end{pmatrix}.$$

Eigenvektoren zu $\lambda_{2,3} = -1$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & 3 & 2 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & -3 & 0 \end{array} \right) \Rightarrow \mathbf{v}^2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Da $1 = g(\lambda_{2,3}) < a(\lambda_{2,3}) = 2$ gilt, ist ein Hauptvektor 1. Stufe über den Ansatz $(\mathbf{A} - \lambda_{2,3}\mathbf{I})\mathbf{v}^3 = \mathbf{v}^2$ zu berechnen:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 5 & 3 & 2 & 1 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & -3 & 6 \end{array} \right) \Rightarrow \mathbf{v}^3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Ein Fundamentalsystem lautet damit:

$$\mathbf{y}^1(x) = e^{3x} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 9 \end{pmatrix}, \mathbf{y}^2(x) = e^{-x} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{y}^3(x) = e^{-x} \left\{ x \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Lösung 19:

- a) Die Koeffizienten der polynomialen Lösung $u(x) = ax + b$ ergeben sich durch Einsetzen von u in die Differentialgleichung:

$$\begin{aligned} 0 &= 0 + \frac{4a}{x} - \frac{4(ax+b)}{x^2} \Rightarrow \\ 0 &= 4ax - 4(ax+b) = -4b \Rightarrow b = 0, a \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Wählt man $a = 1$ ergibt sich die Lösung $u(x) = x$.

Reduktionsansatz für eine weitere linear unabhängige Lösung:

$$y(x) = u(x) \cdot z(x).$$

Einsetzen in die Differentialgleichung liefert:

$$\begin{aligned} 0 &= u''z + 2u'z' + uz'' + \frac{4}{x}(u'z + uz') - \frac{4}{x^2}uz \\ 0 &= uz'' + (2u' + \frac{4u}{x})z' + \underbrace{(u'' + \frac{4}{x}u' - \frac{4}{x^2}u)}_{=0}z \\ 0 &= xz'' + (2 + 4x/x)z' = xw' + 6w \quad \text{mit } w = z'. \end{aligned}$$

Die resultierende Differentialgleichung $xw' + 6w = 0$ wird durch Separation gelöst:

$$\int \frac{dw}{w} = - \int \frac{6dx}{x} \Rightarrow w(x) = x^{-6} = z'(x) \Rightarrow z(x) = -\frac{1}{5x^5}.$$

Die weitere linear unabhängige Lösung aus dem Reduktionsansatz lautet daher:

$$y(x) = u(x) \cdot z(x) = -x \cdot \frac{1}{5x^5} = -\frac{1}{5}x^{-4}.$$

Als Fundamentalsystem kann also $y_1(x) = x$, $y_2(x) = x^{-4}$ gewählt werden.

- b) Umschreiben in ein System mit zugehöriger Fundamentalmatrix:

$$\begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{4}{x^2} & -\frac{4}{x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ -18 \end{pmatrix}}_{\mathbf{b}(x)} \Leftrightarrow \mathbf{Y}(x) = \begin{pmatrix} x & x^{-4} \\ 1 & -4x^{-5} \end{pmatrix}.$$

Ansatz für Variation der Konstanten:

$$\mathbf{y}_p(x) = \mathbf{Y}(x)\mathbf{c}(x) \Rightarrow \mathbf{Y}(x)\mathbf{c}'(x) = \mathbf{b}(x)$$

$$\begin{pmatrix} x & x^{-4} \\ 1 & -4x^{-5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1'(x) \\ c_2'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -18 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} c_1'(x) \\ c_2'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{18}{5} \\ \frac{18x^5}{5} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} c_1(x) \\ c_2(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{18x}{5} \\ \frac{18x^6}{30} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} y_p(x) \\ y_p'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & x^{-4} \\ 1 & -4x^{-5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{18x}{5} \\ \frac{18x^6}{30} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3x^2 \\ -6x \end{pmatrix}$$

Als spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung kann daher $y_p(x) = -3x^2$ gewählt werden.

c) Die allgemeine Lösung der Differentialgleichung mit $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ lautet

$$y(x) = -3x^2 + c_1x + c_2x^{-4}.$$

Lösung 20:

a) Zunächst wird die allgemeine Lösung der homogenen Differentialgleichung $y'' + 5y' + 4y = 0$ mit Hilfe des charakteristischen Polynoms berechnet:

$$p(\lambda) = \lambda^2 + 5\lambda + 4 = (\lambda + 4)(\lambda + 1) \stackrel{!}{=} 0.$$

Die Nullstellen $\lambda_1 = -4$, $\lambda_2 = -1$ liefern das Fundamentalsystem

$$y_1(x) = e^{-4x}, \quad y_2(x) = e^{-x}.$$

Die allgemeine Lösung der homogenen Differentialgleichung lautet also

$$y(x) = c_1e^{-4x} + c_2e^{-x} \quad \text{mit} \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Für die polynomiale Inhomogenität kann hier der Ansatz

$$y_p(x) = ax + b$$

verwendet werden. Eingesetzt in die inhomogene Differentialgleichung erhält man

$$5a + 4(ax + b) = 4ax + 5a + 4b \stackrel{!}{=} 4x - 3.$$

Ein Koeffizientenvergleich ergibt $a = 1$, $b = -2$. Die allgemeine Lösung der inhomogenen Differentialgleichung lautet daher

$$y(x) = c_1e^{-4x} + c_2e^{-x} + x - 2.$$

b)

$$y'' + 5y' + 4y = 4x - 3 \quad \Leftrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -4 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 4x - 3 \end{pmatrix}$$

Würde man das homogene System lösen, käme man auf das charakteristische Polynom $p(\lambda) = \lambda^2 + 5\lambda + 4$, also auf die Eigenwerte $\lambda_1 = -4, \lambda_2 = -1$ mit den zugehörigen Eigenvektoren $\mathbf{v}_1 = (1, -4)^T$ und $\mathbf{v}_2 = (1, -1)^T$ und erhielte damit das Fundamentalsystem

$$\mathbf{Y}(x) = \begin{pmatrix} e^{-4x} & e^{-x} \\ -4e^{-4x} & -e^{-x} \end{pmatrix}.$$

Da wir aus a) für das System die Fundamentalmatrix

$$\mathbf{Y}(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-4x} & e^{-x} \\ -4e^{-4x} & -e^{-x} \end{pmatrix}$$

schon kennen, verzichten wir hier auf die Berechnung des Eigensystems.

- (i) Der Ansatz der Variation der Konstanten $\mathbf{y}_p(x) = \mathbf{Y}(x)\mathbf{c}(x)$ eingesetzt in die inhomogene Differentialgleichung führt auf das Lösen des linearen Gleichungssystems

$$\begin{aligned} \mathbf{Y}(x)\mathbf{c}'(x) &= \begin{pmatrix} e^{-4x} & e^{-x} \\ -4e^{-4x} & -e^{-x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1'(x) \\ c_2'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4x - 3 \end{pmatrix}. \\ \left(\begin{array}{cc|c} e^{-4x} & e^{-x} & 0 \\ -4e^{-4x} & -e^{-x} & 4x - 3 \end{array} \right) &\rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} e^{-4x} & e^{-x} & 0 \\ 0 & 3e^{-x} & 4x - 3 \end{array} \right) \\ \Rightarrow \begin{pmatrix} c_1'(x) \\ c_2'(x) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -(4x - 3)e^{4x}/3 \\ (4x - 3)e^x/3 \end{pmatrix} \\ \Rightarrow \begin{pmatrix} c_1(x) \\ c_2(x) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -(x - 1)e^{4x}/3 \\ (4x - 7)e^x/3 \end{pmatrix} \\ \Rightarrow \begin{pmatrix} y_p(x) \\ y_p'(x) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} e^{-4x} & e^{-x} \\ -4e^{-4x} & -e^{-x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -(x - 1)e^{4x}/3 \\ (4x - 7)e^x/3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x - 2 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

- (ii) Die Greensche Funktion des Grundlösungsverfahrens wird bestimmt über die Lösung $w(x)$ der Anfangswertaufgabe

$$\begin{pmatrix} w \\ w' \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -4 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w \\ w' \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} w(0) \\ w'(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w(0) \\ w'(0) \end{pmatrix} = \mathbf{Y}(0)\mathbf{c} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -4 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \quad \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -1/3 \\ 1/3 \end{pmatrix} \Rightarrow w(x) = -\frac{1}{3}e^{-4x} + \frac{1}{3}e^{-x} \\
&\Rightarrow G(x, \tau) = -\frac{1}{3}e^{-4(x-\tau)} + \frac{1}{3}e^{-(x-\tau)} \\
y_p(x) &= \int_0^x G(x, \tau) h(\tau) d\tau \\
&= \int_0^x \left(-\frac{1}{3}e^{-4(x-\tau)} + \frac{1}{3}e^{-(x-\tau)} \right) (4\tau - 3) d\tau \\
&= \frac{1}{3} \left(-e^{-4x} \int_0^x e^{4\tau} (4\tau - 3) d\tau + e^{-x} \int_0^x e^{\tau} (4\tau - 3) d\tau \right) \\
&= \frac{1}{3} \left(-e^{-4x} (\tau - 1)e^{4\tau} \Big|_0^x + e^{-x} (4\tau - 7)e^{\tau} \Big|_0^x \right) \\
&= \frac{1}{3} \left(-e^{-4x} ((x - 1)e^{4x} + 1) + e^{-x} ((4x - 7)e^x + 7) \right) \\
&= x - 2 - \frac{1}{3}e^{-4x} + \frac{7}{3}e^{-x}
\end{aligned}$$

Erwartungsgemäß stimmt die erste Komponente der allgemeinen Lösung des Systems

$$\begin{pmatrix} y(x) \\ y'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-4x} & e^{-x} \\ -4e^{-4x} & -e^{-x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x - 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

mit der aus a) überein und die zweite mit deren Ableitung.

Lösung 21:

$$a) \quad y'''' + 2y''' + 3y'' - 2y' - 4y = 0 \quad \Rightarrow$$

$$p(\lambda) = \lambda^4 + 2\lambda^3 + 3\lambda^2 - 2\lambda - 4 = (\lambda - 1)(\lambda + 1)((\lambda + 1)^2 + 3) = 0$$

Die Nullstellen $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -1$, $\lambda_3 = -1 + i\sqrt{3}$, $\lambda_4 = -1 - i\sqrt{3}$ liefern das komplexe Fundamentalsystem

$$y_1(x) = e^x, \quad y_2(x) = e^{-x}, \quad \tilde{y}_3(x) = e^{(-1+i\sqrt{3})x}, \quad \tilde{y}_4(x) = e^{(-1-i\sqrt{3})x}.$$

Zerlegung der komplexen Lösungen in Real- und Imaginärteil ergibt

$$\tilde{y}_3(x) = e^{(-1+i\sqrt{3})x} = \underbrace{e^{-x} \cos(\sqrt{3}x)}_{=:y_3(x)} + i \underbrace{e^{-x} \sin(\sqrt{3}x)}_{=:y_4(x)} = \overline{\tilde{y}_4(x)}.$$

Die allgemeine reelle Lösung lautet also

$$y(x) = c_1 e^x + c_2 e^{-x} + c_3 e^{-x} \cos(\sqrt{3}x) + c_4 e^{-x} \sin(\sqrt{3}x) \quad \text{mit} \quad c_i \in \mathbb{R}.$$

- b) (i) Zunächst wird die allgemeine Lösung der homogenen Differentialgleichung $y''' - 3y' - 2y = 0$ mit Hilfe des charakteristischen Polynoms berechnet:

$$p(\lambda) = \lambda^3 - 3\lambda - 2 = (\lambda + 1)^2(\lambda - 2) \stackrel{!}{=} 0.$$

Die Nullstellen $\lambda_{1,2} = -1$, $\lambda_3 = 2$ liefern das Fundamentalsystem

$$y_1(x) = e^{-x}, y_2(x) = xe^{-x}, y_3(x) = e^{2x}.$$

Die allgemeine Lösung der homogenen Differentialgleichung lautet also

$$y(x) = c_1 e^{-x} + c_2 x e^{-x} + c_3 e^{2x} \quad \text{mit} \quad c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}.$$

Da $\lambda_{1,2} = -1$ doppelte Nullstelle des charakteristischen Polynoms ist, lautet der spezielle Ansatz für die Inhomogenität

$$y_p(x) = ax^2 e^{-x}.$$

Die Ableitungen lauten:

$$y_p'(x) = ae^{-x}(-x^2 + 2x), \quad y_p''(x) = ae^{-x}(x^2 - 4x + 2),$$

$$y_p'''(x) = ae^{-x}(-x^2 + 6x - 6).$$

Einsetzen in die inhomogene Differentialgleichung ergibt

$$ae^{-x}(-x^2 + 6x - 6) - 3ae^{-x}(-x^2 + 2x) - 2ax^2 e^{-x} = -6ae^{-x} \stackrel{!}{=} -6e^{-x}.$$

Ein Koeffizientenvergleich ergibt $a = 1$. Die allgemeine Lösung der inhomogenen Differentialgleichung lautet daher

$$y(x) = c_1 e^{-x} + c_2 x e^{-x} + c_3 e^{2x} + x^2 e^{-x}.$$

c_1, c_2, c_3 werden aus den Anfangsbedingungen berechnet. Mit den Ableitungen

$$y'(x) = -c_1 e^{-x} + (1 - x)c_2 e^{-x} + 2c_3 e^{2x} + (2x - x^2)e^{-x},$$

$$y''(x) = c_1 e^{-x} + (x - 2)c_2 e^{-x} + 4c_3 e^{2x} + (x^2 - 4x + 2)e^{-x}$$

erhält man

$$2 = y(0) = c_1 + c_3,$$

$$0 = y'(0) = -c_1 + c_2 + 2c_3,$$

$$9 = y''(0) = c_1 - 2c_2 + 4c_3 + 2.$$

Durch Lösen des Gleichungssystems ergibt sich

$$c_1 = 1, c_2 = -1, c_3 = 1.$$

Damit lautet die Lösung der Anfangswertaufgabe

$$y(x) = e^{-x} - x e^{-x} + e^{2x} + x^2 e^{-x}.$$

- (ii) Die Laplace-Transformierte von $y(x)$ sei $Y(s)$. Damit lautet die transformierte Differentialgleichung:

$$\begin{aligned}
 -\frac{6}{s+1} &= s^3 Y(s) - s^2 y(0+) - s y'(0+) - y''(0+) \\
 &\quad - 3(sY(s) - y(0+)) - 2Y(s) \\
 &= Y(s)(s^3 - 3s - 2) - 2s^2 - 9 + 6 \\
 &= Y(s)(s+1)^2(s-2) - 2s^2 - 3 \\
 \Rightarrow Y(s) &= \frac{1}{(s+1)^2(s-2)} \left(2s^2 + 3 - \frac{6}{s+1} \right) \\
 &= \frac{(2s^2 + 3)(s+1) - 6}{(s+1)^3(s-2)} \\
 &= \frac{2s^3 + 2s^2 + 3s - 3}{(s+1)^3(s-2)} \\
 &\stackrel{PBZ}{=} \frac{1}{s+1} - \frac{1}{(s+1)^2} + \frac{2}{(s+1)^3} + \frac{1}{s-2} \\
 \Rightarrow y(x) &= e^{-x} - x e^{-x} + x^2 e^{-x} + e^{2x}
 \end{aligned}$$

Lösung 22:

Die Laplace-Transformierten von $u(x)$ und $v(x)$ seien $U(s)$ und $V(s)$. Damit lautet das transformierte Differentialgleichungssystem:

$$\begin{aligned}
 sU(s) - u(0+) &= -3U(s) - 2V(s) \\
 sV(s) - v(0+) &= 2U(s) - 3V(s) \\
 \Leftrightarrow & \\
 \begin{pmatrix} s+3 & 2 \\ -2 & s+3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U(s) \\ V(s) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} \\
 \Rightarrow \begin{pmatrix} U(s) \\ V(s) \end{pmatrix} &= \frac{1}{(s+3)^2 + 4} \begin{pmatrix} s+3 & -2 \\ 2 & s+3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} \\
 U(s) &= \frac{2(s+3) + 6}{(s+3)^2 + 4} = 2 \frac{s+3}{(s+3)^2 + 4} + 3 \frac{2}{(s+3)^2 + 4} \\
 V(s) &= \frac{-3(s+3) + 4}{(s+3)^2 + 4} = -3 \frac{s+3}{(s+3)^2 + 4} + 2 \frac{2}{(s+3)^2 + 4}
 \end{aligned}$$

Durch Rücktransformation erhält man die Lösungen der Anfangswertaufgabe:

$$u(x) = 2e^{-3x} \cos(2x) + 3e^{-3x} \sin(2x), \quad v(x) = 2e^{-3x} \sin(2x) - 3e^{-3x} \cos(2x).$$

Hätte man das System $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$

mit e -Funktionsansatz gelöst (war hier nicht verlangt), so hätte man das Eigensystem $\lambda_1 = -3 + 2i$, $\lambda_2 = -3 - 2i$ und $\mathbf{v}_1 = (1, -i)^T$, $\mathbf{v}_2 = (1, i)^T$ und die allgemeine Lösung

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} u(x) \\ v(x) \end{pmatrix} &= d_1 e^{(-3+2i)x} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} + d_2 e^{(-3-2i)x} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} \\ &= \underbrace{(d_1 + d_2)}_{=c_1} e^{-3x} \begin{pmatrix} \cos(2x) \\ \sin(2x) \end{pmatrix} + \underbrace{i(d_1 - d_2)}_{=c_2} e^{-3x} \begin{pmatrix} \sin(2x) \\ -\cos(2x) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

erhalten. Über die Anfangsbedingungen $(2, -3) = (u(0), v(0)) = (c_1, -c_2)$ hätte man natürlich die gleiche Lösung erhalten.

Lösung 23:

Für einen Gleichgewichtspunkt $\mathbf{y}(t) = \mathbf{y}^*$ gilt $(\mathbf{y}^*)' = \mathbf{0}$. Er berechnet sich also aus $\mathbf{A}\mathbf{y}^* + \mathbf{b} = \mathbf{0}$ und löst somit das inhomogene System $\mathbf{y}' = \mathbf{A}\mathbf{y} + \mathbf{b}$.

Durch die Verschiebung $\mathbf{z} := \mathbf{y} - \mathbf{y}^*$ entspricht dem Gleichgewichtspunkt $\mathbf{y}^*$ des inhomogenen Systems der Gleichgewichtspunkt $\mathbf{z}^* = \mathbf{0}$ des homogenen Systems $\mathbf{z}' = \mathbf{A}\mathbf{z}$. Die Klassifikation erfolgt also über die Eigenwerte von $\mathbf{A}$.

- a) (i) Berechnung des Gleichgewichtspunktes $\mathbf{y}^* = (x^*, y^*)^T$:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}}_{=\mathbf{A}} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 7 \\ -9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x^* \\ y^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

- (ii)

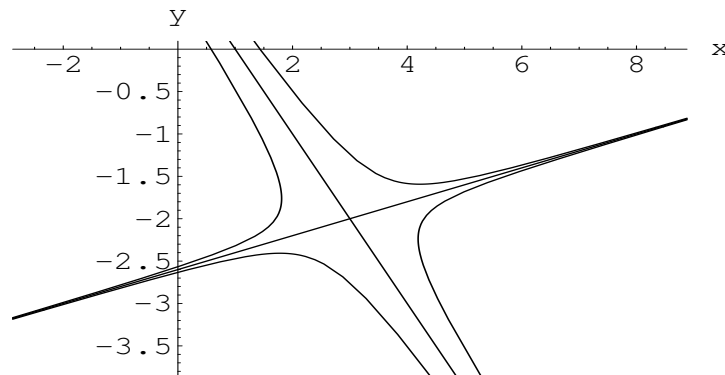
$$\det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 5 \\ 1 & -3-\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)(-3-\lambda) - 5 = (\lambda+4)(\lambda-2) = 0$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = -4, \lambda_2 = 2 \Rightarrow \mathbf{v}_1 = (1, -1)^T, \mathbf{v}_2 = (5, 1)^T$$

Wegen $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$ ist $\mathbf{y}^*$ instabiler Sattelpunkt.

- (iii) Die allgemeine Lösung des autonomen Systems lautet

$$\mathbf{y}(t) = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} + c_1 e^{-4t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + c_2 e^{2t} \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Bild 23 a) instabiler Sattelpunkt $\mathbf{y}^* = (3, -2)^T$

- b) (i) Berechnung des Gleichgewichtspunktes
- $\mathbf{y}^* = (x^*, y^*)^T$
- :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}}_{=\mathbf{A}} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x^* \\ y^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

- (ii)

$$\det \begin{pmatrix} -1-\lambda & -2 \\ 5 & 1-\lambda \end{pmatrix} = (-1-\lambda)(1-\lambda) + 10 = \lambda^2 + 9 = 0$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = 3i, \lambda_2 = -3i = \bar{\lambda}_1$$

$$\Rightarrow \mathbf{v}_1 = ((-1+3i)/5, 1)^T, \mathbf{v}_2 = ((-1-3i)/5, 1)^T = \bar{\mathbf{v}}_1$$

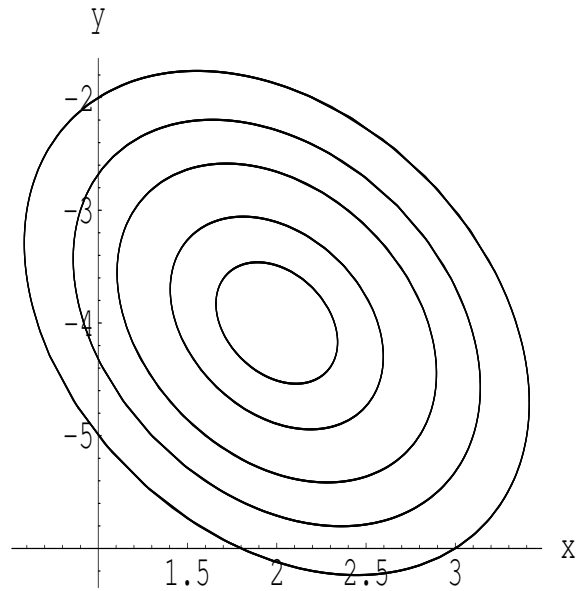
Da $\lambda_1 = \bar{\lambda}_2$, $\text{Im}(\lambda_1) \neq 0$, $\text{Re}(\lambda_1) = 0$ ist $\mathbf{y}^*$ stabiler Wirbelpunkt.

- (iii) Die allgemeine komplexe Lösung des autonomen Systems lautet

$$\mathbf{y}(t) = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix} + \underbrace{d_1 e^{3it} \begin{pmatrix} (-1+3i)/5 \\ 1 \end{pmatrix}}_{=\mathbf{y}^1} + d_2 e^{-3it} \begin{pmatrix} (-1-3i)/5 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Mit Real- und Imaginärteil der obigen komplexen Lösung $\mathbf{y}^1$ erhält man die allgemeine reelle Lösung

$$\mathbf{y}(t) = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix} + c_1 \begin{pmatrix} (-\cos 3t - 3\sin 3t)/5 \\ \cos 3t \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} (3\cos 3t - \sin 3t)/5 \\ \sin 3t \end{pmatrix}.$$

Bild 23 b) stabiler Wirbelpunkt $\mathbf{y}^* = (2, -4)^T$ **Lösung 24:**

Die Gleichgewichtspunkte ergeben sich aus

$$0 = (x^2 - 9)(y + 4) = (x - 3)(x + 3)(y + 4),$$

$$0 = xy^2 - y^2 - 4x + 4 = (x - 1)(y^2 - 4).$$

Durch Fallunterscheidungen in der ersten Gleichung erhält man die Gleichgewichtspunkte:

$$P_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}, P_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}, P_3 = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}, P_4 = \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \end{pmatrix}, P_5 = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

$$\mathbf{f}(x, y) = \begin{pmatrix} (x^2 - 9)(y + 4) \\ (x - 1)(y^2 - 4) \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \mathbf{J}\mathbf{f}(x, y) = \begin{pmatrix} 2x(y + 4) & x^2 - 9 \\ y^2 - 4 & 2y(x - 1) \end{pmatrix}$$

Die Klassifikation erfolgt nach Stabilitätssatz III über die Eigenwerte von $\mathbf{J}\mathbf{f}(P_i)$:

$$\mathbf{J}\mathbf{f}(3, 2) = \begin{pmatrix} 36 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix} \Rightarrow 0 < \lambda_1 = 8 < \lambda_2 = 36$$

$\Rightarrow P_1$ ist (lokal) ein instabiler Knotenpunkt 2. Art,

$$\mathbf{J}\mathbf{f}(3, -2) = \begin{pmatrix} 12 & 0 \\ 0 & -8 \end{pmatrix} \Rightarrow -8 = \lambda_1 < 0 < \lambda_2 = 12$$

$\Rightarrow P_2$ ist (lokal) ein instabiler Sattelpunkt,

$\mathbf{Jf}(-3, 2) = \begin{pmatrix} -36 & 0 \\ 0 & -16 \end{pmatrix} \Rightarrow -36 = \lambda_1 < \lambda_2 = -16 < 0$
 $\Rightarrow P_3$ ist (lokal) ein asymptotisch stabiler Knotenpunkt 2. Art,

$\mathbf{Jf}(-3, -2) = \begin{pmatrix} -12 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix} \Rightarrow -12 = \lambda_1 < 0 < \lambda_2 = 16$
 $\Rightarrow P_4$ ist (lokal) ein instabiler Sattelpunkt,

$\mathbf{Jf}(1, -4) = \begin{pmatrix} 0 & -8 \\ 12 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \lambda_1 = i\sqrt{96}, \lambda_2 = -i\sqrt{96}$
 $\Rightarrow P_5$ kann nach Stabilitätssatz III nicht klassifiziert werden.

Lösung 25:

- a) Man erhält alle stationären Punkte des autonomen Systems $\mathbf{y}' = \mathbf{f}(\mathbf{y})$ durch Lösen von:

$$\mathbf{0} = \mathbf{f}(\mathbf{y}) = \begin{pmatrix} -3y_1^5 - 4y_1y_2^2 \\ y_1^2y_2 - 5y_2^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y_1(3y_1^4 + 4y_2^2) \\ y_1^2y_2 - 5y_2^3 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Einzigster stationärer Punkt ist also $\mathbf{y}^* = \mathbf{0}$.

- b)

$$\mathbf{Jf}(\mathbf{y}) = \begin{pmatrix} -15y_1^4 - 4y_2^2 & -8y_1y_2 \\ 2y_1y_2 & y_1^2 - 15y_2^2 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{Jf}(\mathbf{0}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Die Eigenwerte von $\mathbf{Jf}(\mathbf{0})$ lauten $\lambda_{1,2} = 0$. Stabilitätssatz III ist damit nicht anwendbar.

- c) Für die Funktion $V(\mathbf{y}) = ay_1^2 + by_2^2$ gilt $V(\mathbf{0}) = 0$ und die Bedingung $V(\mathbf{y}) > 0$ für $\mathbf{y} \neq \mathbf{0}$ ergibt, dass $a, b > 0$ gelten muss.

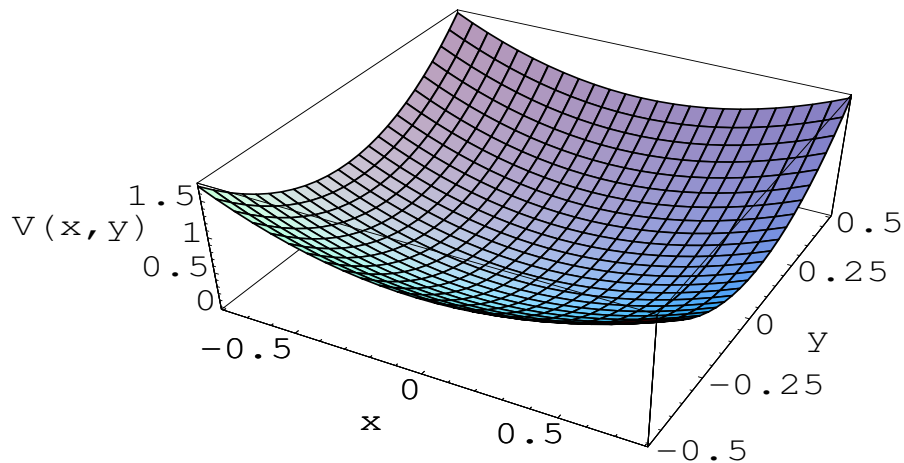
$$\begin{aligned} \langle \text{grad}V(\mathbf{y}), \mathbf{f}(\mathbf{y}) \rangle &= (2ay_1, 2by_2) \begin{pmatrix} -3y_1^5 - 4y_1y_2^2 \\ y_1^2y_2 - 5y_2^3 \end{pmatrix} \\ &= -6ay_1^6 + y_1^2y_2^2(2b - 8a) - 10by_2^4. \end{aligned}$$

Damit ist $\text{grad}V(\mathbf{y}) \cdot \mathbf{f}(\mathbf{y}) < 0$ für alle $0 < \|\mathbf{y}\| \leq R$ nur erfüllbar, falls $2b - 8a \leq 0$ gilt.

Für $a = 1$ und $b = 4$ erhält man also die folgende strenge Ljapunov-Funktion

$$V(\mathbf{y}) = y_1^2 + 4y_2^2.$$

Aus Stabilitätssatz IV folgt nun, dass $\mathbf{y}^* = \mathbf{0}$ ein asymptotisch stabiler stationärer Punkt ist.

Bild 25 Ljapunov-Funktion $V(\mathbf{y}) = y_1^2 + 4y_2^2$ **Lösung 26:**

- a) Die lineare Randwertaufgabe 1. Ordnung läßt sich mit $\mathbf{y} = (y_1, y_2, y_3)^T$ schreiben als

$$\dot{\mathbf{y}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}}_{=: \mathbf{A}} \mathbf{y}$$

mit Randbedingungen

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{=: \mathbf{B}_0} \mathbf{y}(0) + \underbrace{\begin{pmatrix} e^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-1} \end{pmatrix}}_{=: \mathbf{B}_1} \mathbf{y}(1) = \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}}_{=: \mathbf{b}}.$$

- b) Fundamentalsystem:

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) &= \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 1 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 2 - \lambda \end{vmatrix} = (2 - \lambda)(\lambda^2 - 1) \\ &= (2 - \lambda)(\lambda - 1)(\lambda + 1) \stackrel{!}{=} 0. \end{aligned}$$

Die Matrix $\mathbf{A}$ hat also die Eigenwerte $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = 2$.

Als zugehörige Eigenvektoren können gewählt werden:

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Die allgemeine Lösung lautet mit Fundamentalsystem $\mathbf{Y}(t)$:

$$\mathbf{y}(t) = \underbrace{\begin{pmatrix} e^{-t} & e^t & e^{2t} \\ -e^{-t} & e^t & e^{2t} \\ 0 & 0 & e^{2t} \end{pmatrix}}_{=: \mathbf{Y}(t)} \mathbf{c}, \quad \mathbf{c} \in \mathbb{R}^3$$

- c) Einsetzen der allgemeinen Lösung in die Randbedingungen führt auf das Gleichungssystem

$$\underbrace{(\mathbf{B}_0 \mathbf{Y}(0) + \mathbf{B}_1 \mathbf{Y}(1))}_{\mathbf{E}} \mathbf{c} = \mathbf{b}.$$

$$\mathbf{E} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + e^{-1} \cdot \begin{pmatrix} e^{-1} & e^1 & e^2 \\ -e^{-1} & e^1 & e^2 \\ 0 & 0 & e^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + e^{-2} & 2 & 1 + e^1 \\ -1 - e^{-2} & 2 & 1 + e^1 \\ 0 & 0 & 1 + e^1 \end{pmatrix}$$

Die Lösung des Gleichungssystems

$$(\mathbf{E} \mathbf{c}) = \begin{pmatrix} 1 + e^{-2} & 2 & 1 + e^1 \\ -1 - e^{-2} & 2 & 1 + e^1 \\ 0 & 0 & 1 + e^1 \end{pmatrix} \mathbf{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} (= \mathbf{b})$$

lautet $\mathbf{c} = (0, 1, 0)^T$. Damit wird das Randwertproblem gelöst durch

$$\mathbf{y}(t) = e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Lösung 27:

- a) Euler-Lagrange-Gleichung für $f(t, y, y') = 16y^2 + (y')^2 - 8yy' = (y' - 4y)^2$

$$\begin{aligned} \Rightarrow 0 &= f_y - \frac{d}{dt} f_{y'} = (32y - 8y') - \frac{d}{dt} (2(y' - 4y)) \\ &= 32y - 8y' - (2y'' - 8y') = 2(16y - y''). \end{aligned}$$

- b) Die resultierende Randwertaufgabe lautet also

$$y'' = 16y \quad \text{mit} \quad y(0) = 0 \quad \text{und} \quad y(2) = 1.$$

Die allgemeine Lösung der Differentialgleichung mit $p(\lambda) = \lambda^2 - 16$ lautet

$$y(t) = \tilde{c}_1 e^{4t} + \tilde{c}_2 e^{-4t} = c_1 \sinh 4t + c_2 \cosh 4t.$$

Anpassen an die Randbedingungen:

$$0 = y(0) = c_1 \sinh 0 + c_2 \cosh 0 = c_2 \quad \Rightarrow \quad c_2 = 0$$

$$1 = y(2) = c_1 \sinh 8 \quad \Rightarrow \quad c_1 = \frac{1}{\sinh 8} \quad \Rightarrow \quad y(t) = \frac{\sinh 4t}{\sinh 8}$$

$$\begin{aligned} \text{c)} \quad I \left[\frac{\sinh 4t}{\sinh 8} \right] &= \int_0^2 \left(\frac{4 \cosh 4t}{\sinh 8} - \frac{4 \sinh 4t}{\sinh 8} \right)^2 dt \\ &= \frac{16}{\sinh^2 8} \int_0^2 (\cosh 4t - \sinh 4t)^2 dt = \frac{16}{\sinh^2 8} \int_0^2 (e^{-4t})^2 dt \\ &= \left(-\frac{2}{\sinh^2 8} e^{-8t} \right) \Big|_0^2 = \frac{2 - 2e^{-16}}{\sinh^2 8} = 9.00281 \cdot 10^{-7} \end{aligned}$$

Lösung 28:

Die allgemeine Lösung der Differentialgleichung $y'' + 4y = 0$ lautet:

$$y(x) = c_1 \sin 2x + c_2 \cos 2x \quad \text{mit } c_1, c_2 \in \mathbb{R},$$

$$y'(x) = 2c_1 \cos 2x - 2c_2 \sin 2x.$$

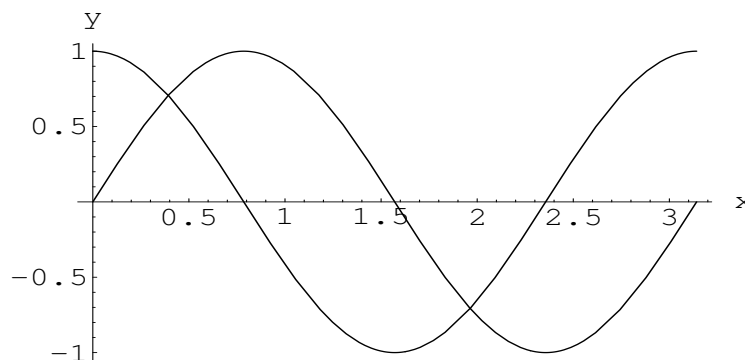


Bild 28 Fundamentalsystem $\sin 2x, \cos 2x$

Alternativ als System erster Ordnung geschrieben:

$$\begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -4 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix}$$

mit der allgemeinen Lösung

$$\begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \sin 2x & \cos 2x \\ 2 \cos 2x & -2 \sin 2x \end{pmatrix}}_{\mathbf{Y}(x)} \underbrace{\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}}_{\mathbf{c}}.$$

Dabei ist $\mathbf{Y}(x)$ Fundamentalsystem. Aus den Randbedingungen erhält man:

a) $y(0) = c_1 \sin 0 + c_2 \cos 0 = c_2 = 0,$

$$y'(\pi) = 2c_1 \cos(2\pi) = 1 \Rightarrow c_1 = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \text{es gibt genau eine Lösung: } y(x) = \frac{1}{2} \sin 2x$$

Alternativ als System in Matrixschreibweise:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{\mathbf{B}_0} \begin{pmatrix} y(0) \\ y'(0) \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\mathbf{B}_\pi} \begin{pmatrix} y(\pi) \\ y'(\pi) \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\mathbf{d}}$$

Setzt man die allgemeine Lösung in Fundamentalsystemschreibweise in die Randbedingungen ein, so ist zur Berechnung von $\mathbf{c}$ das Gleichungssystem $\underbrace{(\mathbf{B}_0 \mathbf{Y}(0) + \mathbf{B}_\pi \mathbf{Y}(\pi))}_{\mathbf{E}} \mathbf{c} = \mathbf{d}$ zu lösen, mit

$$\mathbf{E} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

$\mathbf{E}$ ist regulär und die Lösung der Randwertaufgabe ergibt sich aus:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{c} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

b) $y(0) + 2y(\pi) = c_2 + 2c_2 = 3c_2 = 0,$

$$3y(0) + 4y(\pi) = 3c_2 + 4c_2 = 7c_2 = 0$$

$$\Rightarrow \text{es gibt unendlich viele Lösungen: } y(x) = c_1 \sin 2x, \quad c_1 \in \mathbb{R}$$

Alternativ als System in Matrixschreibweise:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}}_{\mathbf{B}_0} \begin{pmatrix} y(0) \\ y'(0) \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}}_{\mathbf{B}_\pi} \begin{pmatrix} y(\pi) \\ y'(\pi) \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\mathbf{d}}$$

Setzt man die allgemeine Lösung in Fundamentalsystemschreibweise in die Randbedingungen ein, so ist zur Berechnung von $\mathbf{c}$ das Gleichungssystem $\underbrace{(\mathbf{B}_0 \mathbf{Y}(0) + \mathbf{B}_\pi \mathbf{Y}(\pi))}_{\mathbf{E}} \mathbf{c} = \mathbf{d}$ zu lösen, mit

$$\mathbf{E} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}.$$

$\mathbf{E}$ ist singulär und die Lösungen der Randwertaufgabe ergeben sich aus:

$$\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 7 \end{pmatrix} \mathbf{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

c) $y'(0) + y'(\pi) = 2c_1 + 2c_1 = 4c_1 = 0$,

$y'(0) - y'(\pi) = 2c_1 - 2c_1 = 0 \neq 1$

$\Rightarrow$ es gibt keine Lösung

Alternativ als System in Matrixschreibweise:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\mathbf{B}_0} \begin{pmatrix} y(0) \\ y'(0) \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}}_{\mathbf{B}_\pi} \begin{pmatrix} y(\pi) \\ y'(\pi) \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\mathbf{d}}$$

Setzt man die allgemeine Lösung in Fundamentalsystemschreibweise in die Randbedingungen ein, so ist zur Berechnung von $\mathbf{c}$ das Gleichungssystem $\underbrace{(\mathbf{B}_0 \mathbf{Y}(0) + \mathbf{B}_\pi \mathbf{Y}(\pi))}_{\mathbf{E}} \mathbf{c} = \mathbf{d}$ zu lösen, mit

$$\mathbf{E} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$\mathbf{E}$ ist singulär und $\mathbf{d}$ liegt nicht im Spaltenraum von $\mathbf{E}$

$$\begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{keine Lösung.}$$

Lösung 29:

Der Lösungsansatz $y(t) = t^\alpha$ für die homogene Differentialgleichung

$$y''(t) - \frac{1}{t}y'(t) = 0$$

eingesetzt in die Differentialgleichung ergibt

$$(\alpha(\alpha - 1) - \alpha)t^{\alpha-2} = 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha(\alpha - 2) = 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha = 0, \alpha = 2.$$

Damit besitzt die homogene Differentialgleichung das Fundamentalsystem

$$y_1(t) = 1 \quad , \quad y_2(t) = t^2.$$

Der Ansatz für die Greensche Funktion lautet:

$$G(t, \tau) = \begin{cases} (a_1(\tau) + b_1(\tau))y_1(t) + (a_2(\tau) + b_2(\tau))y_2(t) & : \tau \leq t \\ (a_1(\tau) - b_1(\tau))y_1(t) + (a_2(\tau) - b_2(\tau))y_2(t) & : t \leq \tau \end{cases}$$

Stetigkeit und Sprungbedingung in der Ableitung für $t = \tau$ führen auf

$$\left\{ \begin{array}{lcl} b_1(t)y_1(t) + b_2(t)y_2(t) & = & b_1(t) \cdot 1 + b_2(t) \cdot t^2 = 0 \\ b_1(t)y_1'(t) + b_2(t)y_2'(t) & = & 2b_2(t) \cdot t = \frac{1}{2} \end{array} \right\}$$

$$\Rightarrow \quad b_1(t) = -\frac{t}{4} \quad , \quad b_2(t) = \frac{1}{4t} \quad .$$

Mit den Randbedingungen $y'(1) = 0, y(2) = 0$ werden a_1 und a_2 berechnet:

$$\begin{cases} G_t(1, \tau) = (a_1(\tau) - b_1(\tau))y'_1(1) + (a_2(\tau) - b_2(\tau))y'_2(1) = 0 \\ G(2, \tau) = (a_1(\tau) + b_1(\tau))y_1(2) + (a_2(\tau) + b_2(\tau))y_2(2) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2(a_2(\tau) - b_2(\tau)) = 0 \\ (a_1(\tau) + b_1(\tau)) + 4(a_2(\tau) + b_2(\tau)) = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad a_2(\tau) = b_2(\tau) = \frac{1}{4\tau} \quad , \quad a_1(\tau) = -b_1(\tau) - 8b_2(\tau) = \frac{\tau}{4} - \frac{2}{\tau} \quad .$$

Damit lautet die Greensche Funktion:

$$G(t, \tau) = \begin{cases} -\frac{2}{\tau} + \frac{1}{2\tau}t^2 & : \quad \tau \leq t \\ \frac{\tau}{2} - \frac{2}{\tau} & : \quad t \leq \tau \end{cases}$$

Mit der nun berechneten Greenschen Funktion und der Inhomogenität $h(t) = 2t$ ergibt sich die Lösung $y(t)$ der Randwertaufgabe folgendermaßen:

$$\begin{aligned} y(t) &= \int_1^2 G(t, \tau)h(\tau) d\tau = \int_1^t G(t, \tau)h(\tau) d\tau + \int_t^2 G(t, \tau)h(\tau) d\tau \\ &= \int_1^t \left(-\frac{2}{\tau} + \frac{1}{2\tau}t^2\right) 2\tau d\tau + \int_t^2 \left(\frac{\tau}{2} - \frac{2}{\tau}\right) 2\tau d\tau \\ &= \int_1^t -4 + t^2 d\tau + \int_t^2 \tau^2 - 4 d\tau \\ &= (t^2 - 4)\tau \Big|_1^t + \frac{\tau^3}{3} - 4\tau \Big|_t^2 \\ &= (t^2 - 4)(t - 1) + \frac{2^3 - t^3}{3} - 4(2 - t) = \frac{2t^3}{3} - t^2 - \frac{4}{3} \end{aligned}$$

Lösung 30:

Das charakteristische Polynom

$$p(\mu) = \mu^2 - 2 - \lambda = 0$$

besitzt die Nullstellen $\mu = \pm\sqrt{2 + \lambda}$.

Zu unterscheiden sind jetzt drei Fälle:

a) $2 + \lambda = 0 \Leftrightarrow \lambda = -2:$

Die allgemeine Lösung lautet hier $y(t) = c_1 + c_2 t$.

Mit $y'(t) = c_2$ erhält man aus den Randbedingungen das Gleichungssystem $0 = y'(0) = c_2$, $0 = y(1) = c_1$, d.h. $y = 0$. Also ist $\lambda = -2$ kein Eigenwert.

b) $2 + \lambda > 0 \Leftrightarrow \lambda > -2:$

Die allgemeine Lösung lautet

$$y(t) = c_1 e^{t\sqrt{2+\lambda}} + c_2 e^{-t\sqrt{2+\lambda}}.$$

Mit $y'(t) = c_1 \sqrt{2+\lambda} e^{t\sqrt{2+\lambda}} - c_2 \sqrt{2+\lambda} e^{-t\sqrt{2+\lambda}}$ erhält man aus den Randbedingungen das Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y'(0) \\ y(1) \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \sqrt{2+\lambda} & -\sqrt{2+\lambda} \\ e^{\sqrt{2+\lambda}} & e^{-\sqrt{2+\lambda}} \end{pmatrix}}_{=\mathbf{A}} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

$$\det \mathbf{A} = \sqrt{2+\lambda} e^{-\sqrt{2+\lambda}} + e^{\sqrt{2+\lambda}} \sqrt{2+\lambda} = 2\sqrt{2+\lambda} \cosh(\sqrt{2+\lambda}) > 0$$

Damit existiert nur die triviale Lösung $y = 0$ und es gibt für $\lambda > -2$ keine Eigenwerte und Eigenfunktionen.

c) $2 + \lambda < 0 \Leftrightarrow \lambda < -2:$

Die allgemeine komplexe bzw. reelle Lösung lautet

$$y(t) = c_1 e^{t\sqrt{2+\lambda}} + c_2 e^{-t\sqrt{2+\lambda}} = d_1 \cos(t\sqrt{-(\lambda+2)}) + d_2 \sin(t\sqrt{-(\lambda+2)})$$

mit

$$y'(t) = -d_1 \sqrt{-(\lambda+2)} \sin(t\sqrt{-(\lambda+2)}) + d_2 \sqrt{-(\lambda+2)} \cos(t\sqrt{-(\lambda+2)}).$$

Aus den Randbedingungen ergibt sich

$$0 = y'(0) = d_2 \sqrt{-(\lambda+2)} \Rightarrow d_2 = 0,$$

$$0 = y(1) = d_1 \cos(\sqrt{-(\lambda+2)})$$

Da triviale Lösungen keine Eigenwerte und Eigenfunktionen liefern, folgt $d_1 \neq 0$ und $\cos(\sqrt{-(\lambda+2)}) = 0$.

$$\text{Eigenwerte ergeben sich also aus } \sqrt{-(\lambda+2)} = k\pi + \frac{\pi}{2} = \frac{(2k+1)\pi}{2}$$

$$\Rightarrow \lambda_k = -2 - \frac{(2k+1)^2 \pi^2}{4}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Die zugehörigen Eigenfunktionen lauten:

$$y_k(t) = d_1 \cos \frac{(2k+1)\pi t}{2}, \quad d_1 \in \mathbb{R}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$