Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **WiSe 2021/22**

Hörsaalübungsaufgaben und Lösungen zu

Differentialgleichungen I

für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Aufgabe 1:
Man löse die folgenden Differentialgleichungen durch Trennung der Variablen (Separation):

a) $3y' - 2y + 1 = 0$,

b) $x^2y' + y^2 + 2y + 1 = 0$

und bestätige durch eine Probe, dass es sich um Lösungen handelt.

Aufgabe 2:
Man löse die folgenden Differentialgleichungen unter Verwendung der Variation der Konstanten:

a) $2y' - 3y = 4$,

b) $y' - \dfrac{2y}{x} = x^3e^{x^2}$.

Aufgabe 3:
Durch Substitution löse man folgende Differentialgleichungen:

a) $y' = \dfrac{x-y}{x}$ für $x \neq 0$,

b) $y' + xy \;=\; xy^3$,

Aufgabe 4:
Man löse die folgenden Anfangswertaufgaben:

a) $y' = 2xe^{-y}$ mit $y(0) = 0$,

b) $y' = 2xy$ mit $y(0) = 3$,

c) $y' - y + e^x y^2 = 0$ mit $y(0) = 1$.

Aufgabe 5:

a) Man berechne eine Lösung der Anfangswertaufgabe

$$y'(t) + y(t) + y^{2/3}(t) = 0 \, , \quad y(0) = 1 \, .$$

b) Man zeige, dass die Lösung im Intervall $[0, 3\ln 2]$ eindeutig bestimmt ist.

c) Man zeige, dass die Lösung im Intervall $[0, b]$ mit $b > 3\ln 2$ nicht mehr eindeutig bestimmt ist und gebe eine zweite Lösung an.

Aufgabe 6:
Man löse die folgenden Differentialgleichungen:

a) $(1 - y)y'' + 2(y')^2 = 0$,

b) $xy'' = y' \ln\left(\frac{y'}{x}\right)$.

Aufgabe 7:
Man löse die folgenden Differentialgleichungen:

a) $y' = \dfrac{x}{4(4y + 3x + 2)^3} - \dfrac{3}{4}$ mit $y(0) = 0$.

Hinweis: Substitution $u(x) = 4y(x) + 3x + 2$.

b) $y' + (6t - 4)y + (3t - 1)y^2 = 3 - 3t$.

Hinweis: Es existiert eine Lösung der Form $y_0(x) = K$ $(= \textit{konstant})$.

Aufgabe 8:

a) Man bestimme Lösungen der folgenden Differentialgleichungen

(i) Lineare homogene Differentialgleichung 2.Ordnung mit konstanten Koeffizienten

$$y'' - 3y' + 2y = 0\ ,$$

Hinweis: Es existieren Lösungen der Form $y(x) = e^{\lambda x}$ mit $\lambda \in \mathbb{R}$.

(ii) Eulersche (lineare homogene) Differentialgleichung 2.Ordnung

$$x^2 y'' - 6xy' + 12y = 0\ .$$

Hinweis: Es existieren Lösungen der Form $y(x) = x^\alpha$ mit $\alpha \in \mathbb{R}$.

b) Man zeige, dass jede Linearkombination der berechneten Lösungen wieder die Differentialgleichung löst.

Aufgabe 9:

Man löse die folgende Anfangswertaufgabe für $x \neq 0$:

$$\frac{d}{dx}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{x} & 16x^2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad \boldsymbol{y}(1) = \begin{pmatrix} 8 \\ 1 \end{pmatrix}\ .$$

Aufgabe 10:

Gegeben sei die folgende Anfangswertaufgabe für $t \neq 0$:

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= -y_1/t - 2y_2/t^3 \\ \dot{y}_2 &= -2ty_1 + y_2/t \end{aligned} \quad \text{mit} \quad y_1(1) = 3 \ \text{ und } \ y_2(1) = 1.$$

a) Man stelle die Anfangswertaufgabe in Matrix- Vektorschreibweise mit $\boldsymbol{y}(t) = (y_1(t), y_2(t))^T$ dar.

b) Man bestimme eine Polynomlösung der Form

$$\boldsymbol{y}^1(t) = \begin{pmatrix} a_0 + a_1\,t + a_2\,t^2 + a_3\,t^3 \\ b_0 + b_1\,t + b_2\,t^2 + b_3\,t^3 \end{pmatrix}\ .$$

c) Bilden $\boldsymbol{y}^1(t)$ und $\boldsymbol{y}^2(t) := \begin{pmatrix} 1/t^3 \\ 1/t \end{pmatrix}$ ein Fundamentalsystem der Differentialgleichung?

d) Man löse die Anfangswertaufgabe.

Aufgabe 11:
Man berechne die allgemeine Lösung der folgenden Differentialgleichungssysteme

a)
$$\dot{\boldsymbol{y}} = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} \boldsymbol{y} \,,$$

b)
$$\boldsymbol{y}' = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \boldsymbol{y} \,.$$

Aufgabe 12:
Man bestimme ein Fundamentalsystem des Differentialgleichungssystems

$$\boldsymbol{y}' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 5 & 3 & 1 \end{pmatrix} \boldsymbol{y} \,.$$

Aufgabe 13:
Gegeben sei das lineare Differentialgleichungssystem

$$\boldsymbol{y}' = \underbrace{\begin{pmatrix} 5 & 12 \\ 12 & -5 \end{pmatrix}}_{=:\boldsymbol{A}} \boldsymbol{y} \,.$$

a) Man beweise durch Induktion für $k \in \mathbb{N}$:

$$\boldsymbol{A}^k = 13^{k-1} \begin{pmatrix} 9 & 6 \\ 6 & 4 \end{pmatrix} + (-13)^{k-1} \begin{pmatrix} -4 & 6 \\ 6 & -9 \end{pmatrix} \,.$$

b) Man berechne die Matrix-Exponentiallösung $e^{x\boldsymbol{A}}$ des Systems.

c) Man berechne das Fundamentalsystem über Eigenwerte und Eigenvektoren von $\boldsymbol{A}$ und vergleiche das Ergebnis mit dem aus b).

Aufgabe 14:

a) Man bestimme die allgemeine reelle Lösung des homogenen Differentialgleichungssystems

$$\boldsymbol{y}' = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \boldsymbol{y} \,.$$

b) Gegeben sei die Anfangswertaufgabe

$$\boldsymbol{y}' = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \boldsymbol{y} + \begin{pmatrix} 3x-1 \\ 6-x \end{pmatrix} , \quad \boldsymbol{y}(0) = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix} .$$

(i) Man bestimme die allgemeine Lösung des homogenen Systems.

(ii) Man berechne eine spezielle Lösung des inhomogenen Systems über Variation der Konstanten und alternativ über den speziellen Ansatz

$$\boldsymbol{y}_p(x) = (ax+b, cx+d)^T$$

mit $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.

(iii) Man löse die Anfangswertaufgabe.

Aufgabe 15:

Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y'' - \frac{6}{x} y' + \frac{10}{x^2} y = -2x \,.$$

a) Man bestimme ein Fundamentalsystem mit dem Reduktionsverfahren.

Hinweis: Es gibt eine polynomiale Lösung $u(x) = ax^2 + bx + c$.

b) Man berechne eine spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung unter Verwendung der Variation der Konstanten.

c) Man gebe die allgemeine Lösung der Differentialgleichung an.

Aufgabe 16:

a) Für die Differentialgleichung $y''' + 7y'' + 7y' - 15y = 0$

(i) berechne man die allgemeine reelle Lösung,

(ii) schreibe die Differentialgleichung in ein System erster Ordnung um und

(iii) bestimme Eigenwerte, Eigenvektoren und eine Fundamentalmatrix des Systems.

b) Man berechne die allgemeine reelle Lösung für folgende Differentialgleichungen:

(i) $y''' - 12y' - 16y = 0$,

(ii) $y'''' + 2y''' + 3y'' - 2y' - 4y = 0$.

Aufgabe 17:
Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y'' + 5y' + 4y = 4x - 3\,.$$

a) Man berechne die allgemeine Lösung mit Hilfe eines speziellen Ansatzes für die Inhomogenität.

b) Man schreibe die Differentialgleichung als System erster Ordnung und berechne die allgemeine Lösung des Systems unter Verwendung der Variation der Konstanten.

Aufgabe 18:
Man löse die Anfangswertaufgabe

$$y''' - 3y' - 2y = -6e^{-x} \quad \text{mit} \quad y(0) = 2\,, \quad y'(0) = 0\,, \quad y''(0) = 9$$

mit Hilfe

a) des charakteristischen Polynoms sowie eines speziellen Ansatzes für die Inhomogenität und

b) der Laplace-Transformation.

Aufgabe 19:
Man löse die Anfangswertaufgabe

$$\begin{aligned} u' &= -3u - 2v\,, \quad u(0) = 2 \\ v' &= 2u - 3v\,, \quad v(0) = -3 \end{aligned}$$

mit Hilfe der Laplace-Transformation.

Aufgabe 20:
Man berechne die Lösung der Anfangswertaufgabe

$$y'' - y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$$

über einen Potenzreihenansatz der Form $\quad y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k.$

Aufgabe 21:
Für die Differentialgleichung

$$y'' + 4y = 0 \quad \text{mit} \quad 0 \leq x \leq \pi$$

bestimme man die allgemeine Lösung. Damit berechne man alle Lösungen für folgende Randbedingungen:

a) $y(0) = 0$ und $y'(\pi) = 1$, (Sturmsche Randbedingung)

b) $y(0) + 2y(\pi) = 0$ und $3y(0) + 4y(\pi) = 0$,

c) $y'(0) + y'(\pi) = 0$ und $y'(0) - y'(\pi) = 1$.

unter Verwendung der allgemeinen Lösungsdarstellung der Einzelgleichung und alternativ durch Umschreiben in ein System 1.Ordnung und dann unter Verwendung der Shooting-Matrix.

Aufgabe 22:
Man berechne die Eigenwerte und Eigenfunktionen der folgenden Sturm-Liouvilleschen Randeigenwertaufgabe

$$y'' - y + \lambda y = 0 \quad \text{mit} \quad y(0) = 0 \quad \text{und} \quad y(3) = 0 \,.$$

Aufgabe 23:
Man gebe die Gleichgewichtspunkte der folgenden Differentialgleichungssysteme an, untersuche sie auf Stabilität, bestimme ihren Typ, berechne die allgemeine Lösung des Differentialgleichungssystems und skizziere das zugehörige Phasenporträt:

a) $$\begin{aligned} \dot{x} &= x + 5y + 7, \\ \dot{y} &= x - 3y - 9, \end{aligned}$$

b) $$\begin{aligned} \dot{x} &= -x - 2y - 6, \\ \dot{y} &= 5x + y - 6. \end{aligned}$$

Aufgabe 24:
Gegeben sei das Differentialgleichungssystem

$$\begin{aligned} \dot{x} &= (x^2 - 9)(y + 4) \,, \\ \dot{y} &= xy^2 - y^2 - 4x + 4 \,. \end{aligned}$$

Man bestimme alle reellen stationären Lösungen (Gleichgewichtspunkte) und untersuche deren Stabilitätsverhalten mit (lokaler) Klassifikation.

Lösung 1:

a) $3y' - 2y + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \dfrac{3y'}{2y-1} = 1$

$$\Rightarrow \quad \int \frac{3y'(x)}{2y(x)-1}\,dx = \int dx \quad \Rightarrow \quad \int \frac{3dy}{2y-1} = x + \tilde{c}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{3}{2}\ln|2y-1| = x + \tilde{c}$$

$$\Rightarrow \quad |2y-1| = e^{2(x+\tilde{c})/3} = e^{2x/3}e^{2\tilde{c}/3} = ke^{2x/3} \text{ mit } k > 0$$

$$\Rightarrow \quad y(x) = \left(1 \pm ke^{2x/3}\right)/2 = \frac{1}{2} + ce^{2x/3} \text{ mit } c \in \mathbb{R}.$$

Probe:

$$3y'(x) - 2y(x) + 1 = 3\left(\frac{1}{2} + ce^{2x/3}\right)' - 2\left(\frac{1}{2} + ce^{2x/3}\right) + 1$$
$$= 2ce^{2x/3} - 1 - 2ce^{2x/3} + 1 = 0$$

b) $x^2y' + y^2 + 2y + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad x^2y' = -(y+1)^2 \quad \Rightarrow \quad \dfrac{y'}{(y+1)^2} = -\dfrac{1}{x^2}$

$$\Rightarrow \quad \int \frac{y(x)'}{(y(x)+1)^2}\,dx = -\int \frac{1}{x^2}\,dx \quad \Rightarrow \quad -\frac{1}{y+1} = \frac{1}{x} + c \text{ mit } c \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \quad y(x) = -1 - \frac{1}{\frac{1}{x} + c} = -1 - \frac{x}{1+cx}$$

Probe:

$$x^2y'(x) + (y+1)^2 = x^2\left(-1 - \frac{x}{1+cx}\right)' + \left(-\frac{x}{1+cx}\right)^2$$
$$= x^2\left(-\frac{1+cx-xc}{(1+cx)^2}\right) + \frac{x^2}{(1+cx)^2} = 0$$

Lösung 2:

a) Allgemeine Lösung der homogenen linearen Differentialgleichung $2y' - 3y = 0$ durch Separation:

$$2y' - 3y = 0 \Rightarrow \int \frac{1}{y}\,dy = \int \frac{3}{2}\,dx \quad \Rightarrow \quad y_h(x) = c \cdot e^{3x/2}, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Spezielle Lösung der inhomogenen linearen Differentialgleichung durch Variation der Konstanten:

$$y_p(x) = c(x)e^{3x/2}.$$

Die Bestimmungsgleichung für $c(x)$ lautet: $\quad c'(x)e^{3x/2} = b(x).$

$2y' - 3y = 4 \Rightarrow y' - \dfrac{3y}{2} = 2 \Rightarrow b(x) = 2$

$\Rightarrow c'(x)e^{3x/2} = 2 \Rightarrow c'(x) = 2e^{-3x/2} \Rightarrow c(x) = -\dfrac{4}{3}e^{-3x/2}$

$\Rightarrow y_p(x) = c(x)e^{3x/2} = -\dfrac{4}{3}e^{-3x/2}e^{3x/2} = -\dfrac{4}{3}$

Damit ergibt sich die allgemeine Lösung der inhomogenen linearen Differentialgleichung

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = ce^{3x/2} - \frac{4}{3}\,, \quad c \in \mathbb{R}\,.$$

b) Allgemeine Lösung der homogenen linearen Differentialgleichung durch Separation:

$$y' - \frac{2y}{x} = 0 \Rightarrow \int \frac{dy}{y} = \int \frac{2}{x}\,dx \Rightarrow \ln|y| = 2\ln|x| + \tilde{c} = \ln x^2 + \tilde{c}$$

$$\Rightarrow y_h(x) = cx^2\,, \quad c \in \mathbb{R}\,.$$

Spezielle Lösung durch Variation der Konstanten $y_p(x) = c(x)x^2$ der inhomogenen linearen Differentialgleichung mit $h(x) = x^3e^{x^2}$durch Variation der Konstanten:

$$c'(x)x^2 = h(x) = x^3e^{x^2} \Rightarrow c'(x) = xe^{x^2} \Rightarrow c(x) = \frac{1}{2}e^{x^2}$$

$$\Rightarrow y_p(x) = c(x)x^2 = \frac{x^2}{2}e^{x^2}$$

Damit ergibt sich die allgemeine Lösung der inhomogenen linearen Differentialgleichung

$$y(x) = cy_h(x) + y_p(x) = cx^2 + \frac{x^2}{2}e^{x^2}\,, \quad c \in \mathbb{R}\,.$$

Lösung 3:

a) Ähnlichkeitsdifferentialgleichung: $\quad y' = \dfrac{x-y}{x} = 1 - \dfrac{y}{x}$

Substitution $u(x) = \dfrac{y(x)}{x}$

$xu' + u = 1 - u \quad \Rightarrow \quad u' = \dfrac{1-2u}{x}$

$\Rightarrow \quad \dfrac{u'}{2u-1} = -\dfrac{1}{x}, \quad u \neq \dfrac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \displaystyle\int \frac{du}{2u-1} = -\int \frac{1}{x}\,dx$

$\Rightarrow \quad \dfrac{1}{2}\ln|2u-1| = -\ln|x| + c_1, \quad c_1 = \ln c_2 \in \mathbb{R}, \quad c_2 > 0$

$\Rightarrow \quad \ln|2u-1| = 2\ln\dfrac{c_2}{|x|} = \ln\left(\dfrac{c_2}{x}\right)^2$

$$\Rightarrow \quad 2u-1=\pm\left(\frac{c_2}{x}\right)^2$$
$$\Rightarrow \quad u=\frac{1}{2}\pm\frac{1}{2}\left(\frac{c_2}{x}\right)^2$$
$$\Rightarrow \quad y=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}\frac{c_3}{x}, \quad c_3\neq 0$$

Insgesamt lautet die allgemeine Lösung $y(x)=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}\frac{c_3}{x}$ mit $c_3\in\mathbb{R}$.

Der Fall $u(x)=\frac{1}{2}$ ist hierin dann enthalten.

b) Bernoullische Differentialgleichung: $y'+xy = xy^3 \quad\Leftrightarrow\quad y'+xy-xy^3 = 0$
mit $\alpha=3$, $a(x)=x$ und $b(x)=-x$.
Substitution $y(x)=\dfrac{1}{\sqrt{u(x)}}$ eingesetzt in die Differentialgleichung ergibt:

$$u'-2xu = -2x\,.$$

Die homogene DGl. $u'-2xu = 0$ wird durch $u_h(x)=Ce^{x^2}$ gelöst.
Ein spezielle Lösung der inhomogenen DGl. $u'-2xu = -2x$
ergibt sich aus der Variation der Konstanten:

$$u_p(x)=C(x)e^{x^2} \Rightarrow C'(x)=-2xe^{-x^2} \Rightarrow C(x)=e^{-x^2} \Rightarrow u_p(x)=1.$$

Die allgemeine Lösung lautet: $u(x)=Ce^{x^2}+1.$

Rücksubstitution ergibt: $y(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+Ce^{x^2}}}$.

Lösung 4:

a) Trennung der Variablen ergibt:

$$y'=2xe^{-y} \Rightarrow \int e^y dy=\int 2x dx \Rightarrow e^y=x^2+C \Rightarrow y(x)=\ln(x^2+C).$$

Die Anfangsbedingung ergibt $0=y(0)=\ln C\Rightarrow C=1.$
Lösung der Anfangswertaufgabe: $y(x)=\ln(x^2+1)$

b) Trennung der Variablen ergibt:

$$y'=2xy \Rightarrow \frac{y'}{y}=2x \Rightarrow \int\frac{dy}{y}=\int 2x dx \Rightarrow \ln|y|=x^2+c \Rightarrow y(x)=Ce^{x^2}\,.$$

Die Anfangsbedingung ergibt $3=y\,(0)=Ce^{0^2}=C.$
Lösung der Anfangswertaufgabe: $y(x)=3e^{x^2}.$

c) Bernoullische Differentialgleichung

$$y' - y + e^x y^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad y' + ay + by^\alpha = 0$$

mit $a(x) = -1$ und $b(x) = e^x$ und $\alpha = 2$.

Substitution $u(x) = (y(x))^{1-2} = (y(x))^{-1}$ ergibt $u' = -u + e^x$.

Die Lösung der homogenen Differentialgleichung $u' = -u$ lautet:

$$u_h(x) = Ce^{-x}.$$

Variation der Konstanten $u_p(x) = C(x)e^{-x}$ für eine spezielle Lösung der inhomogenen Differentialgleichung ergibt:

$$C'(x)e^{-x} = e^x \;\Rightarrow\; C'(x) = e^{2x} \;\Rightarrow\; C(x) = \frac{1}{2}e^{2x} \;\Rightarrow\; u_p(x) = \frac{e^x}{2}$$

allgemeine Lösung: $\quad u(x) = u_h(x) + u_p(x) = Ce^{-x} + \dfrac{e^x}{2}$

Rücksubstitution: $\quad y(x) = \dfrac{1}{u(x)} = \dfrac{1}{Ce^{-x} + \dfrac{e^x}{2}}$

Anfangsbedingung: $\quad 1 = y(0) = \dfrac{1}{C + \dfrac{1}{2}} \;\Rightarrow\; C = \dfrac{1}{2}$

Lösung der Anfangswertaufgabe: $\quad y(x) = \dfrac{2}{e^{-x} + e^x}$

Lösung 5:

a) Bei $y'(t) + y(t) + y^{2/3}(t) = 0$ handelt es sich um eine Bernoullische Differentialgleichung mit $\alpha = \frac{2}{3}$, daher führt die Substitution $u = y^{1-\alpha} = y^{1/3}$ auf:

$$u' = \frac{1}{3}y^{-2/3}y' = \frac{1}{3}y^{-2/3}(-y - y^{2/3}) = -\frac{1}{3}(y^{1/3} + 1) = -\frac{1}{3}(u+1)$$

mit der allgemeinen Lösung $u(t) = ce^{-t/3} - 1$ mit $c \in \mathbb{R}$.

Eine Lösung der Anfangswertaufgabe ergibt sich damit durch:

$$y(t) = u^3(t) = \left(ce^{-t/3} - 1\right)^3 \quad \Rightarrow \quad 1 = y(0) = (c-1)^3 \;\Rightarrow\; c = 2.$$

Eine Lösung lautet also: $\quad y(t) = \left(2e^{-t/3} - 1\right)^3.$

b) Die Eindeutigkeit der Lösung im Intervall $[0, 3\ln 2]$ wird nun über den Eindeutigkeitssatz (vgl. auch Satz von Picard und Lindelöf) im Quader

$$Q := [a,b] \times [c,d]$$

mit $a < 0 < b < 3\ln 2$ und $0 < c < 1 < d$ nachgewiesen:

$$y'(t) + y(t) + y^{2/3}(t) = 0 \quad \Rightarrow \quad y'(t) = -y(t) - y^{2/3}(t) =: f(t,y).$$

(i) f ist stetig in Q.

(ii) Zunächst wird die Nullstelle von $y(t)$ berechnet:

$$0 = y(t) = \left(2e^{-t/3} - 1\right)^3 \Rightarrow 2e^{-t/3} = 1 \Rightarrow t = 3\ln 2\,.$$

Für $t \in [a, 3\ln 2[$ gilt also $y(t) > 0$.

Also ist $f_y(t,y) = -1 - \dfrac{2}{3y^{1/3}}$ stetig in Q, denn dort gilt $y > 0$.

Daher ist die Lösung $y(t)$ eindeutig bestimmt im Intervall $[a,b]$ und damit dann auch in $[0, 3\ln 2]$.

c) Nach a) löst $y_1(t) = \left(2e^{-t/3} - 1\right)^3$ die Anfangswertaufgabe im Intervall $[0,b]$ mit $b \in \mathbb{R}$.

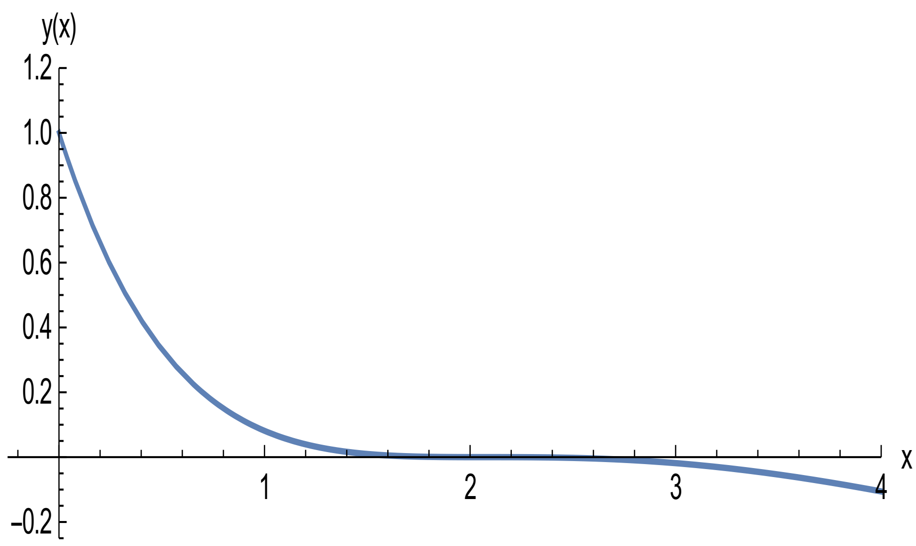

Bild 5 a) $y_1(t) = \left(2e^{-t/3} - 1\right)^3$

Konstruktion der zweiten Lösung:
Es gilt $y_1(3\ln 2) = 0$. Aus der Differentialgleichung folgt dann

$$y_1'(3\ln 2) = -y_1(3\ln 2) - y_1^{2/3}(3\ln 2) = 0.$$

Außerdem löst $y^* \equiv 0$ die Differentialgleichung.

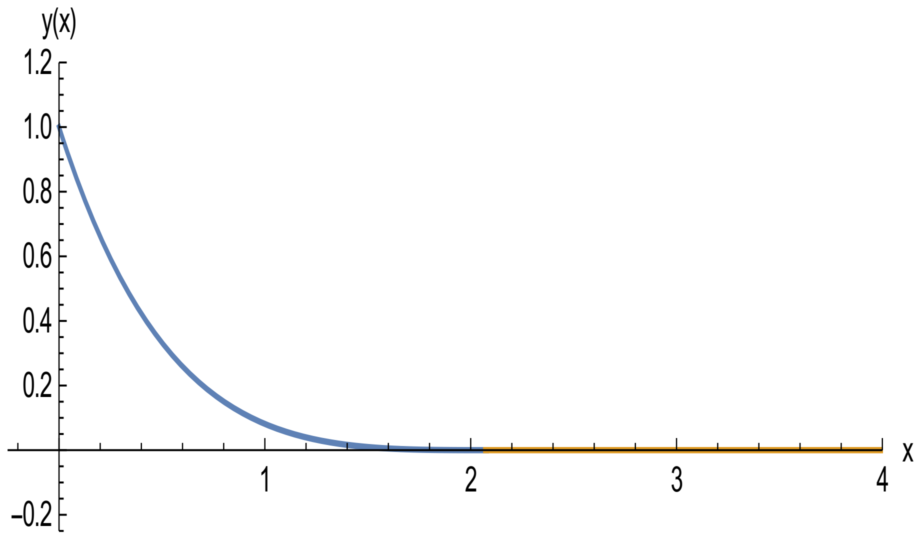

Bild 5 b) $y_2(t)$

Somit ist

$$y_2(t) := \begin{cases} \left(2e^{-t/3} - 1\right)^3 & , 0 \leq t \leq 3 \ln 2 \\ 0 & 3 \ln 2 < t \leq b \end{cases}$$

eine stetig differenzierbare Funktion auf $[0, b]$, die ebenfalls die Differentialgleichung löst und die Anfangsbedingung erfüllt, also Lösung der Anfangswertaufgabe ist.

Lösung 6:

a) $(1-y)y'' + 2(y')^2 \;=\; 0 \quad \Leftrightarrow \quad y'' \;=\; \dfrac{2(y')^2}{y-1} \;=\; f(y, y')\,.$

Mit $v = y'$ erhält man $v' = \dfrac{2v^2}{v(y-1)}\,.$

Trennung der Variablen ergibt

$\ln|v| = 2\ln|y-1| + c \;\Rightarrow\; v = y' = C(y-1)^2\,.$

Erneute Trennung der Variablen ergibt $-\dfrac{1}{y-1} = Cx + D\,.$

Die allgemeine Lösung lautet daher

$$y = \frac{Cx + D - 1}{Cx + D} = \frac{x + C_1}{x + C_2}\,.$$

b) $xy'' = y' \ln\left(\frac{y'}{x}\right) \quad \Leftrightarrow \quad y'' = \frac{y'}{x} \ln\left(\frac{y'}{x}\right) = f(x, y')$

Man setzt $y' = z$ und erhält eine Ähnlichkeitsdifferentialgleichung in der $u = \frac{z}{x}$ substituiert wird:

$$z' = \frac{z}{x} \ln\left(\frac{z}{x}\right) \Rightarrow u' = \frac{u \ln u - u}{x}$$

$$\Rightarrow \int \frac{du}{u \ln u - u} = \int \frac{1}{u} \cdot \frac{du}{\ln u - 1} = \int \frac{dx}{x} \Rightarrow \ln|\ln u - 1| = \ln|x| + c$$

$$\Rightarrow \ln u = Cx + 1 \Rightarrow u = e^{Cx+1}$$

$$\Rightarrow z = y' = xe^{Cx+1} \Rightarrow y = \int xe^{Cx+1} dx$$

$$y(x) = \left\{ \begin{array}{ll} \frac{ex^2}{2} & \text{falls } C = 0 \\ e^{Cx+1}\left(\frac{x}{C} - \frac{1}{C^2}\right) & \text{falls } C \neq 0 \end{array} \right\} + K$$

Lösung 7:

a) Substitution $\quad u = 4y + 3x + 2 \quad \Rightarrow \quad y = \frac{u - 3x - 2}{4}$

$\Rightarrow \quad u(0) = 2$ und $y' = \frac{1}{4}(u' - 3)$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{4}(u' - 3) = y' = \frac{x}{4(4y + 3x + 2)^3} - \frac{3}{4} = \frac{x}{4u^3} - \frac{3}{4} \quad \Rightarrow \quad \boxed{u' = \frac{x}{u^3}}$$

Separation: $\quad \int u^3\, du = \int x\, dx \quad \Rightarrow \quad \frac{u^4}{4} = \frac{x^2}{2} + c \quad \Rightarrow \quad u(x) = \sqrt[4]{2x^2 + 4c}$

$\Rightarrow \quad 2 = u(0) = \sqrt[4]{2 \cdot 0^2 + 4c} \quad \Rightarrow \quad c = 4$

Nach Rücksubstitution ergibt sich: $\quad y(x) = \frac{\sqrt[4]{2x^2 + 16} - 3x - 2}{4}$.

b) Ein Vergleich von

$$y' + (6t - 4)y + (3t - 1)y^2 = 3 - 3t$$

mit

$$y(x)' + a(x)y(x) + b(x)y^2(x) = c(x)$$

ergibt, dass es sich um eine Riccatische Differentialgleichung handelt mit

$$a(t) = 6t - 4\,, \quad b(t) = 3t - 1\,, \quad c(t) = 3 - 3t.$$

Mit dem Ansatz $y_0(t) = K$ versuchen wir eine spezielle Lösung der Differentialgleichung zu erhalten:

$$0 + (6t - 4)K + (3t - 1)K^2 = (6K + 3K^2)t - 4K - K^2 = -3t + 3$$

$$\Rightarrow \quad 6K + 3K^2 = -3 \text{ und } -4K - K^2 = 3 \quad \Rightarrow \quad K = -1.$$

Also ist $y_0(x) = -1$ eine spezielle Lösung.

Damit führt die Substitution $u(t) = \dfrac{1}{y(t) - y_0(t)} = \dfrac{1}{y(t) + 1}$ auf folgende lineare Differentialgleichung in u:

$$u' - (6t - 4 + 2(3t - 1)\,(-1))u = 3t - 1 \quad \Rightarrow \quad u' + 2u = 3t - 1.$$

Die allgemeine Lösung der homogenen Differentialgleichung lautet

$$u_h(t) = c\,e^{-2t}.$$

Eine spezielle Lösung u_p der inhomogenen Differentialgleichung erhält man aus der Variation der Konstanten $u_p(t) = c(t)e^{-2t}$:

$$c'(t)e^{-2t} = 3t - 1 \Rightarrow c(t) = \int (3t - 1)e^{2t}dt = \left(\frac{3}{2}t - \frac{5}{4}\right)e^{2t} \Rightarrow u_p(t) = \frac{3}{2}t - \frac{5}{4}$$

Damit lautet die allgemeine Lösung der inhomogenen Differentialgleichung

$$u(t) = c\,e^{-2t} + \frac{3}{2}t - \frac{5}{4}$$

und damit die der ursprünglichen Differentialgleichung mit $c \in \mathbb{R}$

$$y(t) = \frac{1}{c\,e^{-2t} - \frac{5}{4} + \frac{3}{2}t} - 1.$$

Lösung 8:

a) (i) Durch Einsetzen von $y(x) = e^{\lambda x}$ in die Differentialgleichung erhält man

$$((e^{\lambda x})'' - 3(e^{\lambda x})' + 2e^{\lambda x} = (\lambda^2 - 3\lambda + 2)e^{\lambda x} = 0\,.$$

Wegen $e^{\lambda x} > 0$ ist $y(x) = e^{\lambda x}$ genau dann Lösung, wenn λ Nullstelle des folgenden Polynoms ist

$$p(\lambda) = \lambda^2 - 3\lambda + 2 = (\lambda - 1)(\lambda - 2) = 0\,.$$

Mit den Nullstellen $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$ ergeben sich die linear unabhängigen Lösungen

$$y_1(x) = e^x\,, \quad y_2(x) = e^{2x}\,.$$

(ii) Durch Einsetzen von $y(x) = x^\alpha$ in die Differentialgleichung erhält man

$$\begin{aligned} 0 &= x^2(x^\alpha)'' - 6x(x^\alpha)' + 12x^\alpha \\ &= (\alpha(\alpha-1) - 6\alpha + 12)x^\alpha \\ &= (\alpha^2 - 7\alpha + 12)x^\alpha\,. \end{aligned}$$

Wegen $x^\alpha \neq 0$ für $x \neq 0$ ist $y(x) = x^\alpha$ genau dann Lösung, wenn α Nullstelle des folgenden Polynoms ist

$$q(\alpha) = \alpha^2 - 7\alpha + 12 = (\alpha-3)(\alpha-4) = 0\,.$$

Mit den Nullstellen $\alpha_1 = 3\,,\ \alpha_2 = 4$ ergeben sich die linear unabhängigen Lösungen

$$y_1(x) = x^3\,, \quad y_2(x) = x^4\,.$$

b) Setzt man in eine lineare homogene Differentialgleichung vom Typ

$$a_2(x)y''(x) + a_1(x)y'(x) + a_0(x)y(x) = 0$$

eine Linearkombination $y(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x)$ von Lösungen $y_1(x), y_2(x)$ mit $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ ein, so erhält man

$$\begin{aligned} & a_2(c_1y_1 + c_2y_2)'' + a_1(c_1y_1 + c_2y_2)' + a_0(c_1y_1 + c_2y_2) \\ = \ & a_2(c_1y_1'' + c_2y_2'') + a_1(c_1y_1' + c_2y_2') + a_0(c_1y_1 + c_2y_2) \\ = \ & c_1(a_2y_1'' + a_1y_1' + a_0y_1) + c_2(a_2y_2'' + a_1y_2' + a_0y_2) \\ = \ & c_1 \cdot 0 + c_2 \cdot 0 = 0\,. \end{aligned}$$

Damit löst eine Linearkombination von Lösungen die Differentialgleichung.

Lösung 9:

Da das Differentialgleichungssystem obere Dreiecksform besitzt, lösen wir zuerst die 2. Gleichung mit dem Ansatz $y_2(x) = e^{\lambda x}$

$$y_2' = 4y_2 \quad \Rightarrow \quad \lambda e^{\lambda x} = 4e^{\lambda x} \quad \Rightarrow \quad \lambda = 4$$

Damit erhalten wir die Lösung der 2. Gleichung $y_2(x) = c_2e^{4x}$.

Die Anfangsbedingung ergibt $1 = y_2(1) = c_2e^4 \Rightarrow c_2 = e^{-4} \quad \Rightarrow \quad y_2(x) = e^{4x-4}$.

Setzt man diese Lösung in die erste Gleichung ein, so erhält man

$$y_1' = \frac{1}{x}y_1 + 16x^2y_2 = \frac{1}{x}y_1 + 16x^2e^{4x-4}\,.$$

eine lineare inhomogene Differentialgleichung.

Die lineare homogene Differentialgleichung $y_1' = \frac{1}{x} y_1 \quad \overset{x\neq 0}{\Leftrightarrow} \quad x y_1' = y_1$ lösen wir mit dem Ansatz für Eulersche Differentialgleichungen $y_1(x) = x^\alpha$

$$x y_1' = y_1 \quad \Rightarrow \quad x(x^\alpha)' = x^\alpha \quad \Rightarrow \quad \alpha x^\alpha = x^\alpha \quad \Rightarrow \quad \alpha = 1\,.$$

Damit erhalten wir die Lösung $y_{1h}(x) = c_1 x$.

Die lineare inhomogene Differentialgleichung $y_1' = \frac{1}{x} y_1 + 16x^2 e^{4x-4}$ wird mit Variation der Konstanten über den Ansatz $y_{1p}(x) = k(x)x$ gelöst

$$\Rightarrow \quad k'(x)x = 16x^2 e^{4x-4} \quad \Rightarrow \quad k'(x) = 16x e^{4x-4}\,.$$

Mit partieller Integration erhält man

$$k(x) = 4x e^{4x-4} - \int 4e^{4x-4} dx = 4x e^{4x-4} - e^{4x-4}\,.$$

Damit erhält man die allgemeine Lösung der 1. Gleichung

$$y_1(x) = y_{1h}(x) + y_{1p}(x) = c_1 x + 4x^2 e^{4x-4} - x e^{4x-4}$$

Die Anfangsbedingung ergibt $8 = y_1(1) = c_1 + 4e^{4-4} - e^{4-4} \Rightarrow c_1 = 5$

Die Lösung der 1. Gleichung lautet also $y_1(x) = 5x + 4x^2 e^{4x-4} - x e^{4x-4}$.

Lösung 10:

a) $$\dot{\boldsymbol{y}}(t) = \begin{pmatrix} -1/t & -2/t^3 \\ -2t & 1/t \end{pmatrix} \boldsymbol{y}(t) \quad \text{mit} \quad \boldsymbol{y}(1) = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}\,.$$

b) Die Lösung in Polynomform

$$\boldsymbol{y}^1(t) := \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_0 + a_1\,t + a_2\,t^2 + a_3\,t^3 \\ b_0 + b_1\,t + b_2\,t^2 + b_3\,t^3 \end{pmatrix}\,.$$

wird in die Differentialgleichung eingesetzt und die Unbekannten $a_0, \ldots, b_3$ werden über Koeffizientenvergleich bestimmt:

1.Gleichung:

$$\begin{aligned} y_1'(t) = \quad & -y_1(t)/t - 2y_2(t)/t^3 \\ \Rightarrow \quad & a_1 + 2a_2 t + 3a_3 t^2 = -(a_0 + a_1\,t + a_2\,t^2 + a_3\,t^3)/t \\ & \qquad\qquad -2(b_0 + b_1\,t + b_2\,t^2 + b_3\,t^3)/t^3 \\ \Leftrightarrow \quad & 3a_3 t^2 + 2a_2 t + a_1 = -a_3 t^2 - a_2 t - a_1 - 2b_3 - (a_0 + 2b_2)/t - 2b_1/t^2 - 2b_0/t^3 \\ \Rightarrow \quad & a_3 = 0\,,\ a_2 = 0\,,\ a_1 = -a_1 - 2b_3\,,\ a_0 + 2b_2 = 0\,,\ b_1 = 0\,,\ b_0 = 0 \\ \Rightarrow \quad & y_1(t) = a_1 t + a_0\,, \quad y_2(t) = b_3 t^3 + b_2 t^2 \end{aligned}$$

2.Gleichung:

$$y_2'(t) = -2ty_1(t) + y_2(t)/t$$

$$\Rightarrow \quad 3b_3t^2 + 2b_2t = -2t(a_1t + a_0) + (b_3t^3 + b_2t^2)/t = (-2a_1 + b_3)t^2 + (-2a_0 + b_2)t$$

$$\Rightarrow \quad 3b_3 = -2a_1 + b_3\ ,\ 2b_2 = -2a_0 + b_2 \quad \Rightarrow \quad a_0 = 0 = b_2\ ,\ -b_3 = a_1 \in \mathbb{R}$$

Für $a_1 = 1$ erhält man damit eine Lösung der Differentialgleichung

$$\boldsymbol{y}^1(t) = \begin{pmatrix} t \\ -t^3 \end{pmatrix} .$$

c) $\boldsymbol{y}^2(t)$ löst die Differentialgleichung:

$$\begin{pmatrix} -1/t & -2/t^3 \\ -2t & 1/t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/t^3 \\ 1/t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3/t^4 \\ -1/t^2 \end{pmatrix} = \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} 1/t^3 \\ 1/t \end{pmatrix} .$$

Die Lösungen $\boldsymbol{y}^1(t)$ und $\boldsymbol{y}^2(t)$ sind linear unabhängig, denn für die Matrix $\boldsymbol{Y}(t) := (\boldsymbol{y}^1(t)|\boldsymbol{y}^2(t))$ gilt

$$\det \begin{pmatrix} t & 1/t^3 \\ -t^3 & 1/t \end{pmatrix} = 2 \neq 0 \quad \text{für} \quad t \neq 0.$$

Damit ist $\boldsymbol{Y}(t)$ Fundamentalmatrix.

d) Mit $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^2$ lautet die allgemeine Lösung der Differentialgleichung $\boldsymbol{y}(t) = \boldsymbol{Y}(t)\,\mathbf{c}$.

Nach Auswertung der Anfangsbegingung

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \boldsymbol{y}(1) = \boldsymbol{Y}(1)\,\mathbf{c} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{c} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} .$$

ergibt sich die Lösung der Anfangswertaufgabe

$$\boldsymbol{y}(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t + 2/t^3 \\ -t^3 + 2/t \end{pmatrix} .$$

Lösung 11:

a) Berechnung der Eigenwerte:

$$p_{\boldsymbol{A}}(\lambda) = \begin{vmatrix} 5-\lambda & -1 \\ -1 & 5-\lambda \end{vmatrix} = (5-\lambda)^2 - 1 = \lambda^2 - 10\lambda + 24 = (\lambda-4)(\lambda-6) = 0$$

Die Eigenwerte lauten $\lambda_1 = 4,\ \lambda_2 = 6$.

Berechnung der zugehörigen Eigenvektoren durch $(\boldsymbol{A} - \lambda\boldsymbol{E})\boldsymbol{v} = \mathbf{0}$

Eigenvektor $\boldsymbol{v}^1$ zu $\lambda_1 = 4$:

$$\left(\begin{array}{rr|r} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{array}\right) \quad \to \quad \left(\begin{array}{rr|r} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{v}^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Eigenvektor $\boldsymbol{v}^2$ zu $\lambda_2 = 6$:

$$\left(\begin{array}{rr|r} -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{array}\right) \quad \to \quad \left(\begin{array}{rr|r} -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{v}^2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Damit erhält man ein Fundamentalsystem:

$$\boldsymbol{y}^1(t) = e^{\lambda_1 t}\boldsymbol{v}^1 = e^{4t}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{y}^2(t) = e^{\lambda_2 t}\boldsymbol{v}^2 = e^{6t}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Die allgemeine Lösung lautet mit $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$:

$$\boldsymbol{y}(t) = c_1\boldsymbol{y}^1(t) + c_2\boldsymbol{y}^2(t) = c_1 e^{4t}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 e^{6t}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

b) Berechnung der Eigenwerte:

$$\begin{aligned} p_{\boldsymbol{A}}(\lambda) &= \begin{vmatrix} -1-\lambda & -1 & 1 \\ 0 & -2-\lambda & 0 \\ 1 & -1 & -1-\lambda \end{vmatrix} = -(2+\lambda)\begin{vmatrix} -1-\lambda & 1 \\ 1 & -1-\lambda \end{vmatrix} \\ &= -(2+\lambda)((1+\lambda)^2 - 1) = -\lambda(2+\lambda)^2 \Rightarrow \lambda_1 = 0,\ \lambda_{2,3} = -2\,. \end{aligned}$$

Berechnung der zugehörigen Eigenvektoren:

Eigenvektor $\boldsymbol{v}^1$ zu $\lambda_1 = 0$:

$$\left(\begin{array}{rrr|r} -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \end{array}\right) \quad \to \quad \left(\begin{array}{rrr|r} -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{v}^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Eigenvektoren zu $\lambda_{2,3} = -2$:

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \boldsymbol{v}^2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{v}^3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Damit erhält man ein Fundamentalsystem:

$$\boldsymbol{y}^1(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{y}^2(x) = e^{-2x}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{y}^3(x) = e^{-2x}\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Die allgemeine Lösung lautet mit $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$:

$$\boldsymbol{y}(x) = c_1\boldsymbol{y}^1(x) + c_2\boldsymbol{y}^2(x) + c_3\boldsymbol{y}^3(x) = c_1\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 e^{-2x}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_3 e^{-2x}\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Lösung 12:

Berechnung der Eigenwerte:

$$\begin{aligned} p_{\boldsymbol{A}}(\lambda) &= \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 1 \\ 1 & -\lambda & 0 \\ 5 & 3 & 1-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda \begin{vmatrix} -\lambda & 0 \\ 3 & 1-\lambda \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & -\lambda \\ 5 & 3 \end{vmatrix} \\ &= -\lambda^3 + \lambda^2 + 5\lambda + 3 = (3-\lambda)(\lambda+1)^2 \;\Rightarrow\; \lambda_1 = 3,\; \lambda_{2,3} = -1\,. \end{aligned}$$

Berechnung der zugehörigen Eigen- und Hauptvektoren:

Eigenvektor $\boldsymbol{v}^1$ zu $\lambda_1 = 3$:

$$\left(\begin{array}{rrr|r} -3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 0 & 0 \\ 5 & 3 & -2 & 0 \end{array}\right) \quad \to \quad \left(\begin{array}{rrr|r} -3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 1/3 & 0 \\ 0 & 3 & -1/3 & 0 \end{array}\right) \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{v}^1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 9 \end{pmatrix}.$$

Eigenvektoren zu $\lambda_{2,3} = -1$:

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & 3 & 2 & 0 \end{array}\right) \quad \to \quad \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & -3 & 0 \end{array}\right) \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{v}^2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Da $1 = g(\lambda_{2,3}) < a(\lambda_{2,3}) = 2$ gilt, ist ein Hauptvektor 1. Stufe über den Ansatz $(\boldsymbol{A} - \lambda_{2,3}\boldsymbol{I})\boldsymbol{v}^3 = \boldsymbol{v}^2$ zu berechnen:

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 5 & 3 & 2 & 1 \end{array}\right) \quad \to \quad \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & -3 & 6 \end{array}\right) \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{v}^3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Ein Fundamentalsystem lautet damit:

$$\boldsymbol{y}^1(x) = e^{3x}\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 9 \end{pmatrix}, \boldsymbol{y}^2(x) = e^{-x}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{y}^3(x) = e^{-x}\left\{ x\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Lösung 13:

a) $k = 1$: $\quad 13^{1-1}\begin{pmatrix} 9 & 6 \\ 6 & 4 \end{pmatrix} + (-13)^{1-1}\begin{pmatrix} -4 & 6 \\ 6 & -9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 12 \\ 12 & -5 \end{pmatrix} = \boldsymbol{A}$

$k \to k+1$:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{A}^{k+1} &= \boldsymbol{A}^k \boldsymbol{A} \\
&= \left(13^{k-1}\begin{pmatrix} 9 & 6 \\ 6 & 4 \end{pmatrix} + (-13)^{k-1}\begin{pmatrix} -4 & 6 \\ 6 & -9 \end{pmatrix}\right)\left(\begin{pmatrix} 9 & 6 \\ 6 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 & 6 \\ 6 & -9 \end{pmatrix}\right) \\
&= 13^{k-1}\begin{pmatrix} 9 & 6 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 9 & 6 \\ 6 & 4 \end{pmatrix} + (-13)^{k-1}\begin{pmatrix} -4 & 6 \\ 6 & -9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -4 & 6 \\ 6 & -9 \end{pmatrix} \\
&= 13^{k-1}\begin{pmatrix} 117 & 78 \\ 78 & 52 \end{pmatrix} + (-13)^{k-1}\begin{pmatrix} 52 & -78 \\ -78 & 117 \end{pmatrix} \\
&= 13^{k}\begin{pmatrix} 9 & 6 \\ 6 & 4 \end{pmatrix} + (-13)^{k}\begin{pmatrix} -4 & 6 \\ 6 & -9 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

b) Berechnung der Matrix-Exponentiallösung $e^{x\boldsymbol{A}}$:

$$\begin{aligned}
e^{x\boldsymbol{A}} &= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!}\boldsymbol{A}^k = \boldsymbol{A}^0 + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{x^k}{k!}\left(13^{k-1}\begin{pmatrix} 9 & 6 \\ 6 & 4 \end{pmatrix} + (-13)^{k-1}\begin{pmatrix} -4 & 6 \\ 6 & -9 \end{pmatrix}\right) \\
&= \boldsymbol{A}^0 + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(13x)^k}{k!}\begin{pmatrix} 9/13 & 6/13 \\ 6/13 & 4/13 \end{pmatrix} + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-13x)^k}{k!}\begin{pmatrix} 4/13 & -6/13 \\ -6/13 & 9/13 \end{pmatrix} \\
&= \boldsymbol{A}^0 + (e^{13x}-1)\begin{pmatrix} 9/13 & 6/13 \\ 6/13 & 4/13 \end{pmatrix} + (e^{-13x}-1)\begin{pmatrix} 4/13 & -6/13 \\ -6/13 & 9/13 \end{pmatrix} \\
&= e^{13x}\begin{pmatrix} 9/13 & 6/13 \\ 6/13 & 4/13 \end{pmatrix} + e^{-13x}\begin{pmatrix} 4/13 & -6/13 \\ -6/13 & 9/13 \end{pmatrix} \\
&= \left(\frac{3}{13}e^{13x}\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} - \frac{2}{13}e^{-13x}\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix} \,\middle|\, \frac{2}{13}e^{13x}\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} + \frac{3}{13}e^{-13x}\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}\right) \\
&= \underbrace{\left(e^{13x}\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \,\middle|\, e^{-13x}\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}\right)}_{=:\boldsymbol{Y}(x)}\underbrace{\begin{pmatrix} 3/13 & 2/13 \\ -2/13 & 3/13 \end{pmatrix}}_{=:\S}
\end{aligned}$$

c) $\det(\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{I}) = \begin{vmatrix} 5-\lambda & 12 \\ 12 & -5-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda-5)(\lambda+5)-144 = (\lambda-13)(\lambda+13) = 0$

Die Eigenwerte lauten $\quad \lambda_1 = 13\,,\ \lambda_2 = -13$

Eigenvektor $\boldsymbol{v}^1$ zu $\lambda_1 = 13$

$$\left(\begin{array}{cc|c} -8 & 12 & 0 \\ 12 & -18 & 0 \end{array}\right) \quad \to \quad \left(\begin{array}{cc|c} -8 & 12 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{v}^1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Eigenvektor $\boldsymbol{v}^2$ zu $\lambda_2 = -13$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 18 & 12 & 0 \\ 12 & 8 & 0 \end{array}\right) \quad \rightarrow \quad \left(\begin{array}{cc|c} 18 & 12 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{v}^2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Eine Fundamentalmatrix lautet damit:

$$\boldsymbol{Y}(x) = \left(e^{13x} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \middle| \, e^{-13x} \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix} \right)$$

Der Wechsel von der Fundamentalmatrix $e^{x\boldsymbol{A}}$ zur Fundamentalmatrix $\boldsymbol{Y}(x)$ kann als Basiswechsel der zugehörigen Fundamentalssysteme aufgefasst werden, der durch die reguläre Matrix § ($\det § = 1/13$) beschrieben wird. Für die allgemeine Lösung $\boldsymbol{y}(x) = \boldsymbol{Y}(x)\mathbf{c} = e^{x\boldsymbol{A}}\tilde{\mathbf{c}}$ der Differentialgleichung besteht dann für die Koeffizientenvektoren $\mathbf{c}$ und $\tilde{\mathbf{c}}$ der Zusammenhang $\mathbf{c} = §\tilde{\mathbf{c}}$.

Lösung 14:

a) Berechnung der Eigenwerte:

$$p(\lambda) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ -1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda-2)^2 + 1 \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = 2+i, \quad \lambda_2 = 2-i\,.$$

Berechnung der zugehörigen Eigenvektoren:

$$\lambda_1 = 2+i: \quad \left(\begin{array}{cc|c} 2-(2+i) & 1 & 0 \\ -1 & 2-(2+i) & 0 \end{array}\right) \quad \rightarrow \quad \left(\begin{array}{cc|c} -i & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$$

Außerdem gilt $\lambda_2 = 2 - i = \bar{\lambda}_1$ und $\boldsymbol{v}_2 = \bar{\boldsymbol{v}}_1$.

Damit ergibt sich die allgemeine Lösung der homogenen Differentialgleichung in komplexer Darstellung mit $d_1, d_2 \in \boldsymbol{C}$:

$$\boldsymbol{y}(x) = d_1 e^{(2+i)x} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} + d_2 e^{(2-i)x} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}\,.$$

Für die allgemeine reelle Lösung muss $e^{\lambda_1 x}\boldsymbol{v}_1 = e^{\bar{\lambda}_2 x}\bar{\boldsymbol{v}}_2$ in Real- und Imaginärteil zerlegt werden:

$$\begin{aligned} e^{\lambda_1 x}\boldsymbol{v}_1 &= e^{(2+i)x} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} = e^{2x}(\cos x + i \sin x) \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \\ &= e^{2x} \begin{pmatrix} \cos x \\ -\sin x \end{pmatrix} + i e^{2x} \begin{pmatrix} \sin x \\ \cos x \end{pmatrix}\,. \end{aligned}$$

Die allgemeine reelle Lösung der homogenen Differentialgleichung mit $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ lautet:

$$\boldsymbol{y}_h(x) \;=\; c_1 e^{2x}\begin{pmatrix} \cos x \\ -\sin x \end{pmatrix} + c_2 e^{2x}\begin{pmatrix} \sin x \\ \cos x \end{pmatrix}.$$

b) (i) Charakteristisches Polynom:

$$p(\lambda) = \begin{vmatrix} -3-\lambda & 1 \\ 1 & -3-\lambda \end{vmatrix}$$
$$= (-3-\lambda)(-3-\lambda) - 1 = \lambda^2 + 6\lambda + 8 = (\lambda+2)(\lambda+4) = 0$$

Eigenwerte: $\lambda_1 = -2\,,\ \lambda_2 = -4$

Eigenvektoren:

zu $\lambda_1 = -2$: $\left(\begin{array}{rr|r} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{rr|r} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

zu $\lambda_2 = -4$: $\left(\begin{array}{rr|r} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{rr|r} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

Allgemeine Lösung des homogenen Systems mit $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$:

$$\boldsymbol{y}_h(x) = c_1 e^{-2x}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 e^{-4x}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

(ii) Mit dem Fundamentalsystem $\boldsymbol{Y}(x) = \begin{pmatrix} e^{-2x} & e^{-4x} \\ e^{-2x} & -e^{-4x} \end{pmatrix}$ führt Variation der Konstanten $\boldsymbol{y}_p(x) = \boldsymbol{Y}(x)\mathbf{c}(x)$ auf

$\boldsymbol{Y}(x)\mathbf{c}'(x) = \begin{pmatrix} 3x-1 \\ 6-x \end{pmatrix} \Leftrightarrow$

$\left(\begin{array}{rr|c} e^{-2x} & e^{-4x} & 3x-1 \\ e^{-2x} & -e^{-4x} & 6-x \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{rr|c} e^{-2x} & e^{-4x} & 3x-1 \\ 0 & -2e^{-4x} & 7-4x \end{array}\right)$

$\Rightarrow \mathbf{c}'(x) = \begin{pmatrix} (x+5/2)e^{2x} \\ (2x-7/2)e^{4x} \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{c}(x) = \begin{pmatrix} (x/2+1)e^{2x} \\ (x/2-1)e^{4x} \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \boldsymbol{y}_p(x) = \begin{pmatrix} e^{-2x} & e^{-4x} \\ e^{-2x} & -e^{-4x} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} (x/2+1)e^{2x} \\ (x/2-1)e^{4x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 2 \end{pmatrix}$

Alternativ kann hier eine spezielle Lösung der Form

$$\boldsymbol{y}_p(x) = (ax+b, cx+d)^T$$

durch einsetzen in die Differentialgleichung berechnet werden

$$\begin{pmatrix} ax+b \\ cx+d \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} ax+b \\ cx+d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3x-1 \\ 6-x \end{pmatrix}.$$

Man erhält

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-3a+c+3)x - a - 3b + d - 1 \\ (a-3c-1)x + b - c - 3d + 6 \end{pmatrix}$$

und über einen Koeffizientenvergleich das lineare Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} -3 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -3 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \\ -6 \end{pmatrix}$$

mit der Lösung $(a,b,c,d) = (1,0,0,2)$, also wieder $\boldsymbol{y}_p(x) = (x,2)^T$.

(iii) Die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems lautet

$$\boldsymbol{y}(x) = \begin{pmatrix} x \\ 2 \end{pmatrix} + c_1 e^{-2x} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 e^{-4x} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} .$$

Mit der Anfangsvorgabe erhält man

$$\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix} = \boldsymbol{y}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} + c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 5 \\ 1 & -1 & -1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 5 \\ 0 & -2 & -6 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} .$$

Die Lösung der Anfangswertaufgabe lautet

$$\boldsymbol{y}(x) = \begin{pmatrix} x \\ 2 \end{pmatrix} + 2e^{-2x} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 3e^{-4x} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} .$$

Lösung 15:

a) Die Koeffizienten der polynomialen Lösung $u(x) = ax^2 + bx + c$ ergeben sich durch Einsetzen von u in die Differentialgleichung:

$$\begin{aligned} 0 &= 2a - \frac{6(2ax+b)}{x} + \frac{10(ax^2+bx+c)}{x^2} \quad \Rightarrow \\ 0 &= 2ax^2 - 6x(2ax+b) + 10(ax^2+bx+c) \\ &= x^2(2a - 12a + 10a) + x(-6b + 10b) + 10c \\ &= 4bx + 10c \Rightarrow b = c = 0 \,,\ a \in \mathbb{R} \,,\ \text{wähle z.B. } a = 1, \ \text{ also } u(x) = x^2 \end{aligned}$$

Reduktionsansatz für eine weitere linear unabhängige Lösung:

$$y(x) = u(x) \cdot z(x) \,.$$

Einsetzen in die Differentialgleichung liefert:

$$\begin{aligned} 0 &= u''z + 2u'z' + uz'' - \frac{6}{x}(u'z + uz') + \frac{10}{x^2}uz \\ 0 &= uz'' + (2u' - \frac{6u}{x})z' + (\underbrace{u'' - \frac{6}{x}u' + \frac{10}{x^2}u}_{=0})z \\ 0 &= x^2 z'' + (4x - 6x)z' = x^2 w' - 2xw \quad \text{ mit } w = z' \,. \end{aligned}$$

Die resultierende Differentialgleichung $x^2w' - 2xw = 0$ wird durch Separation gelöst:

$$\int \frac{dw}{w} = \int \frac{2dx}{x} \quad \Rightarrow \quad w(x) = x^2 = z'(x) \quad \Rightarrow \quad z(x) = \frac{x^3}{3}\,.$$

Die weitere linear unabhängige Lösung aus dem Reduktionsansatz lautet daher:

$$y(x) = u(x) \cdot z(x) = x^2 \cdot \frac{x^3}{3} = \frac{x^5}{3}\,.$$

Als Fundamentalsystem kann also $y_1(x) = x^2$, $y_2(x) = x^5$ gewählt werden.

b) Umschreiben in ein System mit zugehöriger Fundamentalmatrix:

$$\begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\dfrac{10}{x^2} & \dfrac{6}{x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ -2x \end{pmatrix}}_{\boldsymbol{b}(x)} \leftrightarrow \boldsymbol{Y}(x) = \begin{pmatrix} x^2 & x^5 \\ 2x & 5x^4 \end{pmatrix}\,.$$

Ansatz für Variation der Konstanten:

$\boldsymbol{y}_p(x) = \boldsymbol{Y}(x)\mathbf{c}(x) \;\Rightarrow\; \boldsymbol{Y}(x)\mathbf{c}'(x) = \boldsymbol{b}(x)$

$$\begin{pmatrix} x^2 & x^5 \\ 2x & 5x^4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1'(x) \\ c_2'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2x \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} c_1'(x) \\ c_2'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{2}{3} \\ -\dfrac{2}{3x^3} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \begin{pmatrix} c_1(x) \\ c_2(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{2x}{3} \\ \dfrac{1}{3x^2} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \begin{pmatrix} y_p(x) \\ y_p'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^2 & x^5 \\ 2x & 5x^4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dfrac{2x}{3} \\ \dfrac{1}{3x^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^3 \\ 3x^2 \end{pmatrix}$$

Als spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung kann daher $y_p(x) = x^3$ gewählt werden.

c) Die allgemeine Lösung der Differentialgleichung mit $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ lautet

$$y(x) = x^3 + c_1x^2 + c_2x^5\,.$$

Lösung 16:

a) (i) Der Lösungsansatz $y(x) = e^{\lambda x}$ in $y''' + 7y'' + 7y' - 15y = 0$ eingesetzt ergibt das charakteristische Polynom:

$$p(\lambda) = \lambda^3 + 7\lambda^2 + 7\lambda - 15 = (\lambda - 1)(\lambda + 3)(\lambda + 5) \overset{!}{=} 0\,.$$

Die Nullstellen $\lambda_1 = 1\,, \lambda_2 = -3\,, \lambda_3 = -5$ liefern das Fundamentalsytem $y_1(x) = e^x\ ,\ y_2(x) = e^{-3x}\ ,\ y_3(x) = e^{-5x}$. Die allgemeine Lösung lautet also

$$y(x) = c_1 e^x + c_2 e^{-3x} + c_3 e^{-5x} \quad \text{mit} \quad c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}\,.$$

(ii)

$$\begin{pmatrix} y \\ y' \\ y'' \end{pmatrix}' = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 15 & -7 & -7 \end{pmatrix}}_{\boldsymbol{A}} \begin{pmatrix} y \\ y' \\ y'' \end{pmatrix}$$

(iii) Eigenwerte

$$\det(\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{I}) = -\lambda^3 - 7\lambda^2 - 7\lambda + 15 = -p(\lambda) \Rightarrow \lambda_1 = 1, \lambda_2 = -3, \lambda_3 = -5$$

Fundamentalmatrix und Eigenvektoren $\boldsymbol{v}_i$ zu λ_i

$$\boldsymbol{Y}(x) = \begin{pmatrix} e^x & e^{-3x} & e^{-5x} \\ e^x & -3e^{-3x} & -5e^{-5x} \\ e^x & 9e^{-3x} & 25e^{-5x} \end{pmatrix}\ , \quad (\boldsymbol{v}_1|\boldsymbol{v}_2|\boldsymbol{v}_3) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & -5 \\ 1 & 9 & 25 \end{pmatrix}$$

b) (i) $y''' - 12y' - 16y = 0$

$\Rightarrow \quad p(\lambda) = \lambda^3 - 12\lambda - 16 = (\lambda - 4)(\lambda + 2)^2 = 0$

Die Nullstellen $\lambda_1 = 4\,, \lambda_{2,3} = -2$ liefern das Fundamentalsytem $y_1(x) = e^{4x}\ ,\ y_2(x) = e^{-2x}\ ,\ y_3(x) = xe^{-2x}$. Die allgemeine Lösung lautet also

$$y(x) = c_1 e^{4x} + c_2 e^{-2x} + c_3 x e^{-2x} \quad \text{mit} \quad c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}\,.$$

(ii) $y'''' + 2y''' + 3y'' - 2y' - 4y = 0 \quad \Rightarrow$

$p(\lambda) = \lambda^4 + 2\lambda^3 + 3\lambda^2 - 2\lambda - 4 = (\lambda - 1)(\lambda + 1)((\lambda + 1)^2 + 3) = 0$

Die Nullstellen $\lambda_1 = 1\,, \lambda_2 = -1,\ ,\ \lambda_3 = -1 + i\sqrt{3}\,, \lambda_4 = -1 - i\sqrt{3}$ liefern das komplexe Fundamentalsytem

$$y_1(x) = e^x\ ,\ y_2(x) = e^{-x}\ ,\ \tilde{y}_3(x) = e^{(-1+i\sqrt{3})x}\ ,\ \tilde{y}_4(x) = e^{(-1-i\sqrt{3})x}\,.$$

Zerlegung der komplexen Lösungen in Real- und Imaginärteil ergibt

$$\tilde{y}_3(x) = e^{(-1+i\sqrt{3})x} = \underbrace{e^{-x}\cos(\sqrt{3}x)}_{=:y_3(x)} + i\,\underbrace{e^{-x}\sin(\sqrt{3}x)}_{=:y_4(x)} = \overline{\tilde{y}_4(x)}\,.$$

Die allgemeine reelle Lösung lautet also

$$y(x) = c_1 e^x + c_2 e^{-x} + c_3 e^{-x}\cos(\sqrt{3}x) + c_4 e^{-x}\sin(\sqrt{3}x) \quad \text{mit} \quad c_i \in \mathbb{R}\,.$$

Lösung 17:

a) Zunächst wird die allgemeine Lösung der homogenen Differentialgleichung $y''+5y'+4y=0$ mit Hilfe des charakteristischen Polynoms berechnet:

$$p(\lambda)=\lambda^2+5\lambda+4=(\lambda+4)(\lambda+1)\overset{!}{=}0\,.$$

Die Nullstellen $\lambda_1=-4\,,\lambda_2=-1$ liefern das Fundamentalsytem

$$y_1(x)=e^{-4x}\,,\ y_2(x)=e^{-x}\,.$$

Die allgemeine Lösung der homogenen Differentialgleichung lautet also

$$y(x)=c_1e^{-4x}+c_2e^{-x}\quad \text{mit}\quad c_1,c_2\in\mathbb{R}\,.$$

Für die polynomiale Inhomogenität $f(x)=4x-3$ kann hier der Ansatz

$$y_p(x)=ax+b$$

verwendet werden. Eingesetzt in die inhomogene Differentialgleichung erhält man

$$5a+4(ax+b)=4ax+5a+4b\overset{!}{=}4x-3\,.$$

Ein Koeffizientenvergleich ergibt $a=1\,,\ b=-2$. Die allgemeine Lösung der inhomogenen Differentialgleichung lautet daher

$$y(x)=c_1e^{-4x}+c_2e^{-x}+x-2\,.$$

b)

$$y''+5y'+4y=4x-3\quad\Leftrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} y\\ y'\end{pmatrix}'=\begin{pmatrix}0&1\\-4&-5\end{pmatrix}\begin{pmatrix} y\\ y'\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\4x-3\end{pmatrix}$$

Würde man das homogene System lösen, käme man auf das charakteristische Polynom $p(\lambda)=\lambda^2+5\lambda+4$, also auf die Eigenwerte $\lambda_1=-4\,,\lambda_2=-1$ mit den zugehörigen Eigenvektoren $\boldsymbol{v}_1=(1,-4)^T$ und $\boldsymbol{v}_2=(1,-1)^T$ und erhielte damit das Fundamentalsystem

$$\boldsymbol{Y}(x)=\begin{pmatrix}e^{-4x}&e^{-x}\\-4e^{-4x}&-e^{-x}\end{pmatrix}\,.$$

Da wir aus a) für das System die Fundamentalmatrix

$$\boldsymbol{Y}(x)=\begin{pmatrix}y_1(x)&y_2(x)\\y_1'(x)&y_2'(x)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}e^{-4x}&e^{-x}\\-4e^{-4x}&-e^{-x}\end{pmatrix}$$

schon kennen, verzichten wir hier auf die Berechnung des Eigensystems.

Der Ansatz der Variation der Konstanten $\boldsymbol{y}_p(x) = \boldsymbol{Y}(x)\mathbf{c}(x)$ eingesetzt in die inhomogene Differentialgleichung führt auf das Lösen des linearen Gleichungssystems

$$\boldsymbol{Y}(x)\mathbf{c}'(x) = \begin{pmatrix} e^{-4x} & e^{-x} \\ -4e^{-4x} & -e^{-x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1'(x) \\ c_2'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4x-3 \end{pmatrix}.$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} e^{-4x} & e^{-x} & 0 \\ -4e^{-4x} & -e^{-x} & 4x-3 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|c} e^{-4x} & e^{-x} & 0 \\ 0 & 3e^{-x} & 4x-3 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} c_1'(x) \\ c_2'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -(4x-3)e^{4x}/3 \\ (4x-3)e^{x}/3 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} c_1(x) \\ c_2(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -(x-1)e^{4x}/3 \\ (4x-7)e^{x}/3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \begin{pmatrix} y_p(x) \\ y_p'(x) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} e^{-4x} & e^{-x} \\ -4e^{-4x} & -e^{-x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -(x-1)e^{4x}/3 \\ (4x-7)e^{x}/3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x-2 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Erwartungsgemäß stimmt die erste Komponente der allgemeinen Lösung des Systems

$$\begin{pmatrix} y(x) \\ y'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-4x} & e^{-x} \\ -4e^{-4x} & -e^{-x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x-2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

mit der aus a) überein und die zweite mit deren Ableitung.

Lösung 18:

a) Zunächst wird die allgemeine Lösung der homogenen Differentialgleichung $y''' - 3y' - 2y = 0$ mit Hilfe des charakteristischen Polynoms berechnet:

$$p(\lambda) = \lambda^3 - 3\lambda - 2 = (\lambda+1)^2(\lambda-2) \stackrel{!}{=} 0\,.$$

Die Nullstellen $\lambda_{1,2} = -1\,, \lambda_3 = 2$ liefern das Fundamentalsytem

$$y_1(x) = e^{-x}\,,\; y_2(x) = xe^{-x}\,,\; y_3(x) = e^{2x}\,.$$

Die allgemeine Lösung der homogenen Differentialgleichung lautet also

$$y(x) = c_1e^{-x} + c_2xe^{-x} + c_3e^{2x} \quad \text{mit} \quad c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}\,.$$

Da $\lambda_{1,2} = -1$ Nullstelle des charakteristischen Polynoms ist, lautet der spezielle Ansatz für die Inhomogenität

$$y_p(x) = ax^2 e^{-x} .$$

Die Ableitungen lauten:

$y_p'(x) = ae^{-x}(-x^2 + 2x)$, $\quad y_p''(x) = ae^{-x}(x^2 - 4x + 2)$,

$y_p'''(x) = ae^{-x}(-x^2 + 6x - 6)$.

Einsetzen in die inhomogene Differentialgleichung ergibt

$$ae^{-x}(-x^2 + 6x - 6) - 3ae^{-x}(-x^2 + 2x) - 2ax^2 e^{-x} = -6ae^{-x} \stackrel{!}{=} -6e^{-x} .$$

Ein Koeffizientenvergleich ergibt $a = 1$. Die allgemeine Lösung der inhomogenen Differentialgleichung lautet daher

$$y(x) = c_1 e^{-x} + c_2 x e^{-x} + c_3 e^{2x} + x^2 e^{-x} .$$

c_1, c_2, c_3 werden aus den Anfangsbedingungen berechnet. Mit den Ableitungen

$y'(x) = -c_1 e^{-x} + (1 - x)c_2 e^{-x} + 2c_3 e^{2x} + (2x - x^2)e^{-x}$,

$y''(x) = c_1 e^{-x} + (x - 2)c_2 e^{-x} + 4c_3 e^{2x} + (x^2 - 4x + 2)e^{-x}$

erhält man

$2 = y(0) = c_1 + c_3$,
$0 = y'(0) = -c_1 + c_2 + 2c_3$,
$9 = y''(0) = c_1 - 2c_2 + 4c_3 + 2$.

Durch Lösen des Gleichungssystems ergibt sich

$$c_1 = 1 ,\ c_2 = -1 ,\ c_3 = 1 .$$

Damit lautet die Lösung der Anfangswertaufgabe

$$y(x) = e^{-x} - xe^{-x} + e^{2x} + x^2 e^{-x} .$$

b) Die Laplace-Transformierte von $y(x)$ sei $Y(s)$. Damit lautet die transformierte Differentialgleichung:

$$\begin{aligned} -\frac{6}{s+1} &= s^3 Y(s) - s^2 y(0+) - s y'(0+) - y''(0+) \\ &\quad -3\,(sY(s) - y(0+)) - 2Y(s) \\ &= Y(s)(s^3 - 3s - 2) - 2s^2 - 9 + 6 \\ &= Y(s)(s+1)^2(s-2) - 2s^2 - 3 \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\Rightarrow \quad Y(s) &= \frac{1}{(s+1)^2(s-2)}\left(2s^2+3-\frac{6}{s+1}\right) \\
&= \frac{(2s^2+3)(s+1)-6}{(s+1)^3(s-2)} \\
&= \frac{2s^3+2s^2+3s-3}{(s+1)^3(s-2)} \\
&\overset{PBZ}{=} \frac{1}{s+1}-\frac{1}{(s+1)^2}+\frac{2}{(s+1)^3}+\frac{1}{s-2} \\
\Rightarrow \quad y(x) &= e^{-x}-xe^{-x}+x^2e^{-x}+e^{2x}
\end{aligned}
$$

Lösung 19:

Die Laplace-Transformierten von $u(x)$ und $v(x)$ seien $U(s)$ und $V(s)$. Damit lautet das transformierte Differentialgleichungssystem:

$$
\begin{aligned}
sU(s)-u(0+) &= -3U(s)-2V(s) \\
sV(s)-v(0+) &= 2U(s)-3V(s)
\end{aligned}
$$

$\Leftrightarrow$

$$
\begin{pmatrix} s+3 & 2 \\ -2 & s+3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} U(s) \\ V(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}
$$

$$
\Rightarrow \quad \begin{pmatrix} U(s) \\ V(s) \end{pmatrix} = \frac{1}{(s+3)^2+4}\begin{pmatrix} s+3 & -2 \\ 2 & s+3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}
$$

$$
U(s) = \frac{2(s+3)+6}{(s+3)^2+4} = 2\frac{s+3}{(s+3)^2+4}+3\frac{2}{(s+3)^2+4}
$$

$$
V(s) = \frac{-3(s+3)+4}{(s+3)^2+4} = -3\frac{s+3}{(s+3)^2+4}+2\frac{2}{(s+3)^2+4}
$$

Durch Rücktransformation erhält man die Lösungen der Anfangswertaufgabe:

$$
u(x) = 2e^{-3x}\cos(2x)+3e^{-3x}\sin(2x)\,, \quad v(x) = 2e^{-3x}\sin(2x)-3e^{-3x}\cos(2x)\,.
$$

Hätte man das System $\quad \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$

über Eigenwerte und Eigenvektoren der Systemmatrix gelöst, so hätte man das Eigensystem $\lambda_1 = -3+2i$, $\lambda_2 = -3-2i$ und $\boldsymbol{v}_1 = (1,-i)^T$, $\boldsymbol{v}_2 = (1,i)^T$ und die allgemeine Lösung

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} u(x) \\ v(x) \end{pmatrix} &= d_1 e^{(-3+2i)x} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} + d_2 e^{(-3-2i)x} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} \\ &= \underbrace{(d_1+d_2)}_{=c_1} e^{-3x} \begin{pmatrix} \cos(2x) \\ \sin(2x) \end{pmatrix} + \underbrace{i(d_1-d_2)}_{=c_2} e^{-3x} \begin{pmatrix} \sin(2x) \\ -\cos(2x) \end{pmatrix}\end{aligned}$$

erhalten. Über die Anfangsbedingungen $(2,-3) = (u(0), v(0)) = (c_1, -c_2)$ hätte man natürlich die gleiche Lösung erhalten.

Lösung 20:

Im Inneren des Konvergenzintervalls darf die Potenzreihe gliedweise differenziert werden. Setzt man die Potenzreihe und ihre zweite Ableitung in die Differentialgleichung ein, so ergibt sich

$$\sum_{k=2}^{\infty} a_k k(k-1)x^{k-2} - \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = \sum_{k=0}^{\infty} (a_{k+2}(k+2)(k+1) - a_k)x^k = 0\,.$$

Aus dem Koeffizientenvergleich mit der Nullfunktion ergibt sich folgende Rekursionsformel zur Berechnung der a_k:

$$a_{k+2}(k+2)(k+1) - a_k = 0 \quad \Rightarrow \quad a_{k+2} = \frac{1}{(k+2)(k+1)} a_k\,.$$

Hier unterscheidet man

$$a_{2k} = \frac{1}{2k(2k-1)} a_{2k-2} = \frac{1}{2k(2k-1)(2k-2)(2k-3)} a_{2k-4} = \cdots = \frac{1}{(2k)!} a_0$$

und

$$a_{2k+1} = \frac{1}{(2k+1)2k} a_{2k-1} = \frac{1}{(2k+1)2k(2k-1)(2k-2)} a_{2k-3} = \cdots = \frac{1}{(2k+1)!} a_1\,.$$

Die Anfangswerte ergeben: $y'(0) = a_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad a_{2k+1} = 0$ und

$y(0) = a_0 = 1 \quad \Rightarrow \quad a_{2k} = \frac{1}{(2k)!}$ also

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k)!} x^{2k} = \cosh(x)$$

als Lösung der Anfangswertaufgabe.

Lösung 21:

Die allgemeine Lösung der Differentialgleichung $\quad y'' + 4y = 0 \quad$ lautet:

$$y(x) = c_1 \sin 2x + c_2 \cos 2x \quad \text{mit } c_1, c_2 \in \mathbb{R}\,,$$

$$y'(x) = 2c_1 \cos 2x - 2c_2 \sin 2x\,.$$

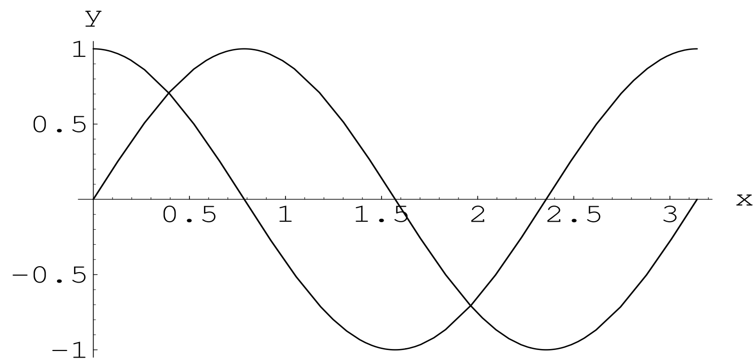

Bild 21 Fundamentalsystem $\sin 2x$, $\cos 2x$

Alternativ als System erster Ordnung geschrieben:

$$\begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -4 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix}$$

mit der allgemeinen Lösung

$$\begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \sin 2x & \cos 2x \\ 2\cos 2x & -2\sin 2x \end{pmatrix}}_{\boldsymbol{Y}(x)} \underbrace{\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}}_{\mathbf{c}}\,.$$

Dabei ist $\boldsymbol{Y}(x)$ Fundamentalsystem. Aus den Randbedingungen erhält man:

a) $y(0) = c_1 \sin 0 + c_2 \cos 0 = c_2 = 0\,,$

$y'(\pi) = 2c_1 \cos(2\pi) = 1 \;\Rightarrow\; c_1 = \dfrac{1}{2}$

$\Rightarrow \quad$ es gibt genau eine Lösung: $\quad y(x) = \dfrac{1}{2} \sin 2x$

Alternativ als System in Matrixschreibweise:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{\boldsymbol{B}_0} \begin{pmatrix} y(0) \\ y'(0) \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\boldsymbol{B}_\pi} \begin{pmatrix} y(\pi) \\ y'(\pi) \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\boldsymbol{d}}$$

Setzt man die allgemeine Lösung in Fundamentalsystemschreibweise in die Randbedingungen ein, so ist zur Berechnung von $\mathbf{c}$ das Gleichungssystem $\underbrace{(\boldsymbol{B}_0\boldsymbol{Y}(0)+\boldsymbol{B}_\pi\boldsymbol{Y}(\pi))}_{\boldsymbol{E}}\mathbf{c}=\boldsymbol{d}$ zu lösen, mit

$$\boldsymbol{E}=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\2&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\2&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1\\2&0\end{pmatrix}.$$

$\boldsymbol{E}$ ist regulär und die Lösung der Randwertaufgabe ergibt sich aus:

$$\begin{pmatrix}0&1\\2&0\end{pmatrix}\mathbf{c}=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\ \Rightarrow\ \mathbf{c}=\begin{pmatrix}1/2\\0\end{pmatrix}$$

b) $y(0)+2y(\pi)=c_2+2c_2=3c_2=0\,,$

$3y(0)+4y(\pi)=3c_2+4c_2=7c_2=0$

$\Rightarrow$ es gibt unendlich viele Lösungen: $y(x)=c_1\sin 2x\,,\quad c_1\in\mathbb{R}$

Alternativ als System in Matrixschreibweise:

$$\underbrace{\begin{pmatrix}1&0\\3&0\end{pmatrix}}_{\boldsymbol{B}_0}\begin{pmatrix}y(0)\\y'(0)\end{pmatrix}+\underbrace{\begin{pmatrix}2&0\\4&0\end{pmatrix}}_{\boldsymbol{B}_\pi}\begin{pmatrix}y(\pi)\\y'(\pi)\end{pmatrix}=\underbrace{\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}}_{\boldsymbol{d}}$$

Setzt man die allgemeine Lösung in Fundamentalsystemschreibweise in die Randbedingungen ein, so ist zur Berechnung von $\mathbf{c}$ das Gleichungssystem $\underbrace{(\boldsymbol{B}_0\boldsymbol{Y}(0)+\boldsymbol{B}_\pi\boldsymbol{Y}(\pi))}_{\boldsymbol{E}}\mathbf{c}=\boldsymbol{d}$ zu lösen, mit

$$\boldsymbol{E}=\begin{pmatrix}1&0\\3&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\2&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2&0\\4&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\2&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&3\\0&7\end{pmatrix}.$$

$\boldsymbol{E}$ ist singulär und die Lösungen der Randwertaufgabe ergeben sich aus:

$$\begin{pmatrix}0&3\\0&7\end{pmatrix}\mathbf{c}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\ \Rightarrow\ \mathbf{c}=\begin{pmatrix}c_1\\0\end{pmatrix}$$

c) $y'(0)+y'(\pi)=2c_1+2c_1=4c_1=0\,,$

$y'(0)-y'(\pi)=2c_1-2c_1=0\neq 1$

$\Rightarrow$ es gibt keine Lösung

Alternativ als System in Matrixschreibweise:

$$\underbrace{\begin{pmatrix}0&1\\0&1\end{pmatrix}}_{\boldsymbol{B}_0}\begin{pmatrix}y(0)\\y'(0)\end{pmatrix}+\underbrace{\begin{pmatrix}0&1\\0&-1\end{pmatrix}}_{\boldsymbol{B}_\pi}\begin{pmatrix}y(\pi)\\y'(\pi)\end{pmatrix}=\underbrace{\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}}_{\boldsymbol{d}}$$

Setzt man die allgemeine Lösung in Fundamentalsystemschreibweise in die Randbedingungen ein, so ist zur Berechnung von $\mathbf{c}$ das Gleichungssystem $\underbrace{(\boldsymbol{B}_0\boldsymbol{Y}(0) + \boldsymbol{B}_\pi\boldsymbol{Y}(\pi))}_{\boldsymbol{E}}\mathbf{c} = \boldsymbol{d}$ zu lösen, mit

$$\boldsymbol{E} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$\boldsymbol{E}$ ist singulär und $\boldsymbol{d}$ liegt nicht im Spaltenraum von $\boldsymbol{E}$

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\mathbf{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{ keine Lösung.}$$

Lösung 22:

Das charakteristische Polynom

$$p(\mu) = \mu^2 - 1 + \lambda = 0$$

besitzt die Nullstellen $\mu = \pm\sqrt{1-\lambda}$. Zu unterscheiden sind jetzt drei Fälle:

a) $1 - \lambda = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda = 1$:

Die allgemeine reelle Lösung lautet $y(t) = c_1 + c_2 t$.

Aus den Randbedingungen $0 = y(0) = c_1$ und $0 = y(3) = 3c_2$ folgt nur die triviale Lösung $y = 0$, also keine Eigenfunktion und damit ist $\lambda = 1$ kein Eigenwert.

b) $1 - \lambda > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda < 1$:

Die allgemeine reelle Lösung lautet $y(t) = c_1 e^{\sqrt{1-\lambda}t} + c_2 e^{-\sqrt{1-\lambda}t}$.

Aus den Randbedingungen ergibt sich

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y(0) \\ y(3) \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ e^{3\sqrt{1-\lambda}} & e^{-3\sqrt{1-\lambda}} \end{pmatrix}}_{=\boldsymbol{E}}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

$$\det \boldsymbol{E} = e^{-3\sqrt{1-\lambda}} - e^{3\sqrt{1-\lambda}} = -2 \cdot \frac{1}{2}\left(e^{3\sqrt{1-\lambda}} - e^{-3\sqrt{1-\lambda}}\right) = -2\sinh(3\sqrt{1-\lambda}) < 0$$

Damit existiert nur die triviale Lösung und es gibt auch hier keine Eigenwerte und Eigenfunktionen.

c) $1 - \lambda < 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda > 1$:

Die allgemeine komplexe bzw. reelle Lösung lautet

$$y(t) = c_1 e^{\sqrt{1-\lambda}t} + c_2 e^{-\sqrt{1-\lambda}t} = c_1 e^{i\sqrt{\lambda-1}t} + c_2 e^{-i\sqrt{\lambda-1}t} = d_1\cos(t\sqrt{\lambda-1}) + d_2\sin(t\sqrt{\lambda-1}).$$

Aus den Randbedingungen ergibt sich

$$0 = y(0) = d_1 \ , \quad 0 = y(3) = d_2 \sin(3\sqrt{\lambda - 1}) \ .$$

Da triviale Lösungen keine Eigenwerte und Eigenfunktionen liefern, folgt $d_2 \neq 0$ und

$$\sin(3\sqrt{\lambda - 1}) = 0 \quad \Rightarrow \quad 3\sqrt{\lambda - 1} = k\pi \quad \Rightarrow$$

Eigenwerte: $\quad \lambda_k = 1 + \dfrac{(k\pi)^2}{9} \ , \quad k = 1, 2 \ldots$

zugehörige Eigenfunktionen: $\quad y_k(t) = d_2 \sin\left(\dfrac{k\pi t}{3}\right) \ , \quad d_2 \in \mathbb{R}$

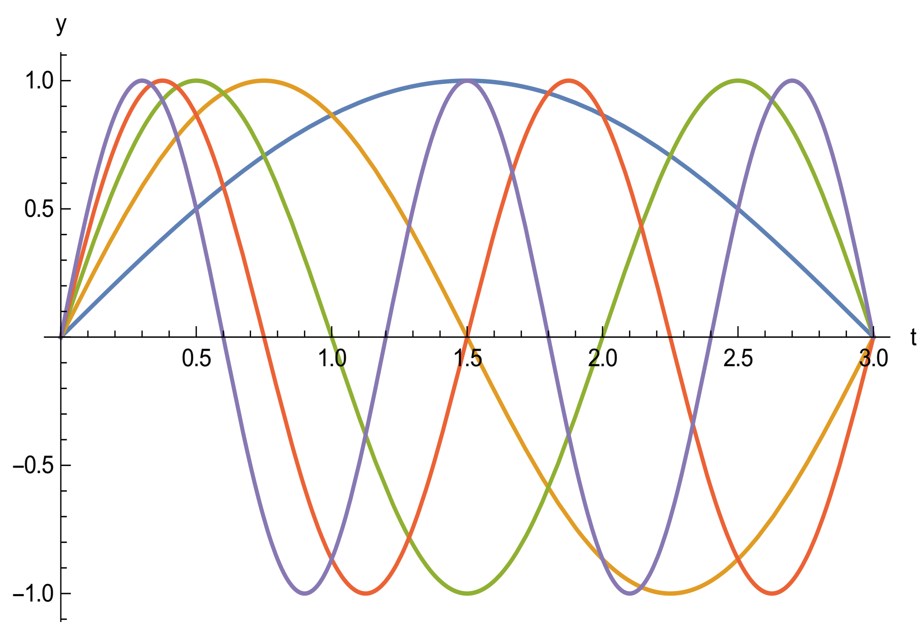

Bild 22 Eigenfunktionen $y_k(t) = \sin\left(\frac{k\pi t}{3}\right)$, $k = 1, 2, 3, 4, 5$

Lösung 23:

Für einen Gleichgewichtspunkt $\boldsymbol{y}^*$ gilt $(\boldsymbol{y}^*)' = \boldsymbol{0}$.

Er berechnet sich also aus $\boldsymbol{A}\boldsymbol{y}^* + \boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$ und löst somit das inhomogene System $\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{A}\boldsymbol{y} + \boldsymbol{b}$.

Durch die Verschiebung $\boldsymbol{z} := \boldsymbol{y} - \boldsymbol{y}^*$ entspricht dem Gleichgewichtspunkt $\boldsymbol{y}^*$ des inhomogenen Systems der Gleichgewichtspunkt $\boldsymbol{z}^* = \boldsymbol{0}$ des homogenen Systems $\boldsymbol{z}' = \boldsymbol{A}\boldsymbol{z}$. Die Klassifikation erfolgt also über die Eigenwerte von $\boldsymbol{A}$.

a) (i) Berechnung des Gleichgewichtspunktes $\boldsymbol{y}^* = (x^*, y^*)^T$:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}}_{=\boldsymbol{A}} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 7 \\ -9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x^* \\ y^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} .$$

(ii)

$$\det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 5 \\ 1 & -3-\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)(-3-\lambda) - 5 = (\lambda+4)(\lambda-2) = 0$$

$\Rightarrow \quad \lambda_1 = -4\,,\ \lambda_2 = 2 \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{v}_1 = (1,-1)^T\,,\ \boldsymbol{v}_2 = (5,1)^T$

Wegen $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$ ist $\boldsymbol{y}^*$ instabiler Sattelpunkt.

(iii) Die allgemeine Lösung des autonomen Systems lautet

$$\boldsymbol{y}(t) = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} + c_1 e^{-4t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + c_2 e^{2t} \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix} .$$

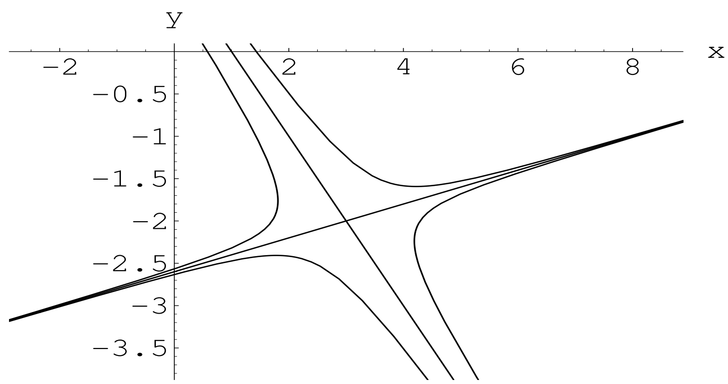

Bild 23 a) instabiler Sattelpunkt $\boldsymbol{y}^* = (3,-2)^T$

b) (i) Berechnung des Gleichgewichtspunktes $\boldsymbol{y}^* = (x^*, y^*)^T$:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}}_{=\boldsymbol{A}} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x^* \\ y^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix} .$$

(ii)

$$\det \begin{pmatrix} -1-\lambda & -2 \\ 5 & 1-\lambda \end{pmatrix} = (-1-\lambda)(1-\lambda) + 10 = \lambda^2 + 9 = 0$$

$\Rightarrow \quad \lambda_1 = 3i\,,\ \lambda_2 = -3i = \bar{\lambda}_1$

$\Rightarrow \quad \boldsymbol{v}_1 = ((-1+3i)/5, 1)^T\,,\ \boldsymbol{v}_2 = ((-1-3i)/5, 1)^T = \bar{\boldsymbol{v}}_1$

Da $\lambda_1 = \bar{\lambda}_2$, $\mathrm{Im}(\lambda_1) \neq 0$, $\mathrm{Re}(\lambda_1) = 0$ ist $\boldsymbol{y}^*$ stabiler Wirbelpunkt.

(iii) Die allgemeine komplexe Lösung des autonomen Systems lautet

$$\boldsymbol{y}(t) = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix} + d_1 \underbrace{e^{3it} \begin{pmatrix} (-1+3i)/5 \\ 1 \end{pmatrix}}_{=\boldsymbol{y}^1} + d_2 e^{-3it} \begin{pmatrix} (-1-3i)/5 \\ 1 \end{pmatrix} .$$

Mit Real- und Imaginärteil der obigen komplexen Lösung $\boldsymbol{y}^1$ erhält man die allgemeine reelle Lösung

$$\boldsymbol{y}(t) = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix} + c_1 \begin{pmatrix} (-\cos 3t - 3\sin 3t)/5 \\ \cos 3t \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} (3\cos 3t - \sin 3t)/5 \\ \sin 3t \end{pmatrix} .$$

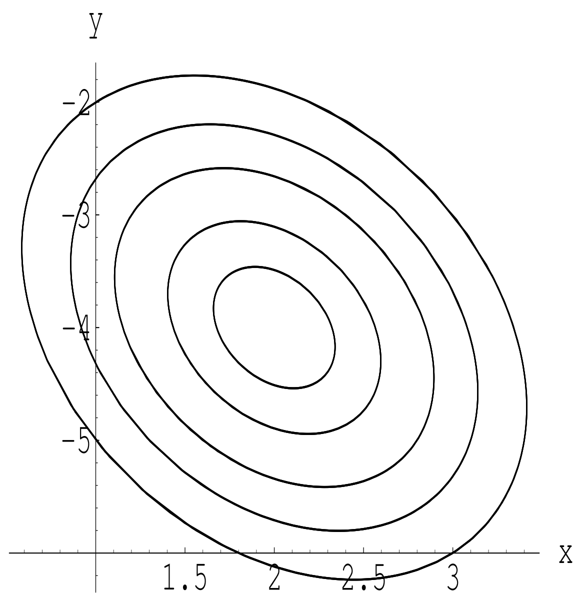

Bild 23 b) stabiler Wirbelpunkt $\boldsymbol{y}^* = (2, -4)^T$

Lösung 24:

Die Gleichgewichtspunkte ergeben sich aus

$$\begin{aligned} 0 &= (x^2 - 9)(y + 4) = (x - 3)(x + 3)(y + 4) , \\ 0 &= xy^2 - y^2 - 4x + 4 = (x - 1)(y^2 - 4) . \end{aligned}$$

Durch Fallunterscheidungen in der ersten Gleichung erhält man die Gleichgewichtspunkte:

$$P_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} , \; P_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} , \; P_3 = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix} , \; P_4 = \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \end{pmatrix} , \; P_5 = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix} .$$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{f}(x, y) &= \begin{pmatrix} (x^2 - 9)(y + 4) \\ (x - 1)(y^2 - 4) \end{pmatrix} \\ \Rightarrow \quad \boldsymbol{Jf}(x, y) &= \begin{pmatrix} 2x(y + 4) & x^2 - 9 \\ y^2 - 4 & 2y(x - 1) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Die Klassifikation erfolgt nach dem Stabilitätssatz für nichtlineare autonome Systeme über die Eigenwerte von $\boldsymbol{Jf}(P_i)$:

$\boldsymbol{J}\boldsymbol{f}(3,2) = \begin{pmatrix} 36 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix} \Rightarrow 0 < \lambda_1 = 8 < \lambda_2 = 36$
$\Rightarrow P_1$ ist (lokal) ein instabiler Knotenpunkt,

$\boldsymbol{J}\boldsymbol{f}(3,-2) = \begin{pmatrix} 12 & 0 \\ 0 & -8 \end{pmatrix} \Rightarrow -8 = \lambda_1 < 0 < \lambda_2 = 12$
$\Rightarrow P_2$ ist (lokal) ein instabiler Sattelpunkt,

$\boldsymbol{J}\boldsymbol{f}(-3,2) = \begin{pmatrix} -36 & 0 \\ 0 & -16 \end{pmatrix} \Rightarrow -36 = \lambda_1 < \lambda_2 = -16 < 0$
$\Rightarrow P_3$ ist (lokal) ein asymptotisch stabiler Knotenpunkt,

$\boldsymbol{J}\boldsymbol{f}(-3,-2) = \begin{pmatrix} -12 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix} \Rightarrow -12 = \lambda_1 < 0 < \lambda_2 = 16$
$\Rightarrow P_4$ ist (lokal) ein instabiler Sattelpunkt,

$\boldsymbol{J}\boldsymbol{f}(1,-4) = \begin{pmatrix} 0 & -8 \\ 12 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \lambda_1 = i\sqrt{96}\,,\ \lambda_2 = -i\sqrt{96}$
$\Rightarrow P_5$ kann nicht nicht klassifiziert werden.