

Hörsaalübungsaufgaben und Lösungen zu

Differentialgleichungen II

für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Aufgabe 1:

a) Man bestimme den Typ der folgenden partiellen Differentialgleichungen:

(i) $u_x + u^2 u_y = 3x + 4y - 6u + 5,$

(ii) $u_{xy} + y^2 u_y^2 = e^u + x^2 + y^2,$

(iii) $u_{xx}^2 + x^2 u_{yy} = 1 + 2x + 3y + 4u + 5u_x + 6u_y,$

(iv) $\ln(u_x + u_y) + u_x + u_y = 1,$

(v) $\begin{pmatrix} xu_x \\ xv_x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_y \\ -u_y \end{pmatrix}.$

b) Man zeige, dass folgende Funktionen harmonisch sind:

(i) $u_1(x, y) = x^3 - 3xy^2$

(ii) $u_2(x, y) = 3x^2y - y^3$

(iii) $u_3(x, y) = \operatorname{Im}(e^z + z) + 6\operatorname{Re}(z)$ mit $z = x + iy \in \mathbb{C}$.

Aufgabe 2:

Man löse folgende Differentialgleichungen

a) $u_{yy} - 4xu_y + 3x^2u = -8x + 3x^3 + 6x^2y,$

b) $u_{xy} = 2x \cos y + e^x + 3y^2,$

c) $x(x+1)u_{xy} = (2x+1)u_y.$

Aufgabe 3:

Man berechne mit Hilfe von Exponentialansätzen reelle Lösungen der folgenden Differentialgleichungen:

a) $u(t, x) = e^{x+\alpha t}$ für $u_{tt} = 9u_{xx}$,

b) $u(x, y, z) = e^{\alpha x + \beta y + \gamma z}$ für $u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} - 2u_z + u = 0$.

Aufgabe 4:

Man löse die Anfangswertaufgabe

$$2v_t + 5v_x = 12tx + 15t^2, \quad v(0, x) = \cos(2x)$$

und zeichne die Lösung.

Hinweis: Durch eine geeignete lineare Transformation

$$\begin{aligned} r &= at + bx \\ s &= ct + dx \end{aligned}$$

mit $ad - bc \neq 0$ transformiere man die Differentialgleichung auf eine gewöhnliche Differentialgleichung.

Aufgabe 5:

Man bestimme die allgemeine Lösung der folgenden partiellen Differentialgleichung erster Ordnung:

$$(2x - y)u_x + yu_y = 0.$$

Aufgabe 6:

Man bestimme die allgemeine Lösung der folgenden partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung:

$$4xu_x - 12xyu_y - x^2z^2u_z = 0.$$

Aufgabe 7:

Man löse die Anfangswertaufgabe

$$u_x + 2u_y = 0 \quad \text{mit} \quad u(x, 3x) = x^3 + x.$$

Aufgabe 8:

Man löse die Anfangswertaufgabe

$$xu_x + (x + 2y)u_y = 3u - 2x \quad \text{mit} \quad u(2x, 2x) = 2x + 8x^2$$

unter Verwendung der Charakteristikenmethode.

Aufgabe 9:

Gegeben sei das folgende Anfangswertproblem für die Burgers-Gleichung

$$u_t + uu_x = 0 \quad \text{für} \quad (x, t) \in \mathbb{R} \times (0, \infty) \quad \text{mit} \quad u(x, 0) = u_0(x).$$

a) Man berechne die allgemeine Lösung mit Hilfe der Charakteristikenmethode.

b) Man löse die Aufgabe für die Anfangsdaten

(i) $u_0(x) = 2(x + 1)$ und

(ii) $u_0(x) = 2(1 - x)$,

zeichne die charakteristischen Grundkurven und gebe den Zeitpunkt T an, bis zu dem die Lösung existiert.

Aufgabe 10:

Gegeben sei das Anfangswertproblem für die Burgers-Gleichung

$$u_t + uu_x = 0 \quad \text{für} \quad (x, t) \in \mathbb{R} \times (0, T)$$

mit

$$u(x, 0) = u_0(x) = \begin{cases} 0 & , \quad x \leq -2 \\ 1 & , \quad -2 < x \leq 0 \\ -1 & , \quad 0 < x \end{cases}$$

a) Man berechne die Entropielösung für $(x, t) \in \mathbb{R} \times (0, 2)$.

b) Man zeichne die Grundcharakteristiken ggf. mit Stoßfront im Rechteck $(x, t) \in (-3, 1) \times (0, 2)$.

c) Man zeichne $u(x, 0)$, $u(x, 1)$, $u(x, 2)$ für $x \in (-3, 1)$.

Aufgabe 11:

Man schreibe folgende partielle Differentialgleichungen zweiter Ordnung in Matrix-Vektorschreibweise, bestimme den Typ und skizziere im $\mathbb{R}^2$ gegebenenfalls die Gebiete unterschiedlichen Typs:

- a) $u_{xx} + 2u_{xy} + u_{yy} - 3u_y + x^2u = 1$,
- b) $(y + 2)u_{xx} + 4xu_{xy} + u_{yy} + 3u_x - e^xu_y + 27u = 23 \sin(y - \pi)$,
- c) $4u_{xx} - 4u_{xz} + 2u_{yy} + 4u_{zz} + x^2u_x - 9yu_z + 4u = 0$.

Aufgabe 12:

Gegeben sei die partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung:

$$\frac{17}{10}u_{xx} - \frac{9}{5}u_{xy} - \frac{7}{10}u_{yy} + \sqrt{10}u_x = x + 3y.$$

- a) Man bestimme den Typ der Gleichung und
- b) transformiere sie auf Normalform.

Aufgabe 13:

- a) Man zeige, dass die Wellengleichung $u_{tt} = 4u_{xx}$ folgende allgemeine Lösung besitzt:

$$u(x, t) = f(x - 2t) + g(x + 2t), \quad f, g \in C^2.$$

Tipp: Man transformiere u auf die Koordinaten $\xi = x - 2t$ und $\eta = x + 2t$ und berechne die allgemeine Lösung der transformierten Differentialgleichung.

- b) Man zeige, dass das folgende Randwertproblem für die Wellengleichung keine Lösung besitzt und damit kein korrekt gestelltes Problem ist

$$\begin{aligned} u_{tt} &= 4u_{xx}, & 0 < x, t < 1 \\ u(x, 0) &= x - x^2, & 0 \leq x \leq 1, \\ u(x, 1) &= 0, \\ u(0, t) &= 0, & 0 \leq t \leq 1, \\ u(1, t) &= 0. \end{aligned}$$

Man überprüfe auch, ob die vorgegebenen Randwerte in den Eckpunkten verträglich sind.

Aufgabe 14:

Man löse die Randwertaufgabe

$$\begin{aligned}\Delta u &= 0, & 0 < x < 1, & 0 < y < 2, \\ u(x, 0) &= 2 \sin(3\pi x), & u(x, 2) &= 0, & 0 \leq x \leq 1 \\ u(0, y) &= 0, & u(1, y) &= 0, & 0 \leq y \leq 2\end{aligned}$$

durch einen Separationsansatz der Form $u(x, y) = f(x) \cdot g(y)$, berechne minimalen und maximalen Funktionswert von u und zeichne die Lösung.

Aufgabe 15:

Gegeben sei das folgende Dirichlet-Problem im Kreisring $2 < r = \sqrt{x^2 + y^2} < 3$ (in Polarkoordinaten):

$$\begin{aligned}r^2 u_{rr} + r u_r + u_{\varphi\varphi} &= 0, \\ u(2, \varphi) &= \cos \varphi, \\ u(3, \varphi) &= 1 + \frac{65}{144} \sin(2\varphi).\end{aligned}$$

Man berechne die Lösung in Polarkoordinaten, gebe sie in kartesischen Koordinaten an und zeichne sie.

Aufgabe 16:

- a) Man zeige, dass der Laplace-Operator im $\mathbb{R}^2$ invariant gegenüber Drehungen ist, d.h. für die um den Winkel φ gedrehten Koordinaten

$$\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

gilt $u_{xx} + u_{yy} = u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta}$.

- b) Unter Verwendung der Mittelwerteigenschaft berechne man für die Lösung u des Problems

$$\begin{aligned}u_{xx} + u_{yy} &= 0 \quad \text{für} \quad (x-1)^2 + (y-1)^2 < 25, \\ u(x, y) &= xy \quad \text{für} \quad (x-1)^2 + (y-1)^2 = 25\end{aligned}$$

den Wert $u(1, 1)$.

Aufgabe 17:

Man berechne die Lösung des folgenden Dirichlet-Problems im Halbkreis

$$r^2 u_{rr} + r u_r + u_{\varphi\varphi} = 0 \quad \text{für} \quad 0 < r < 6 \quad \text{und} \quad 0 < \varphi < \pi,$$

$$u(r, 0) = 0 \quad \text{und} \quad u(r, \pi) = 0 \quad \text{für} \quad 0 \leq r \leq 6,$$

$$u(6, \varphi) = \left| \varphi - \frac{\pi}{2} \right| - \frac{\pi}{2} \quad \text{für} \quad 0 \leq \varphi \leq \pi,$$

bestimme den maximalen und minimalen Funktionswert von u und zeichne die Lösung.

Aufgabe 18:

Man berechne die Lösung der Anfangsrandwertaufgabe für folgende Wärmeleitungsgleichung

$$u_t = u_{xx} \quad \text{für} \quad 0 < x < 4, \quad 0 < t \leq T,$$

$$u(0, t) = 0 \quad \text{für} \quad 0 \leq t \leq T$$

$$u(4, t) = 0$$

$$u(x, 0) = u_0(x) \quad \text{für} \quad 0 \leq x \leq 4$$

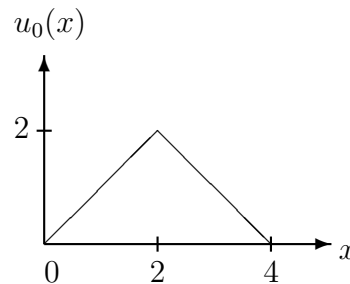


Bild 18 Anfangsfunktion u_0

und bestimme den Maximalwert der Lösung u im Gebiet $[0, 4] \times [0, T]$.

Aufgabe 19:

Gegeben sei folgende Anfangsrandwertaufgabe für die Wärmeleitungsgleichung

$$u_t = 4u_{xx} \quad \text{für} \quad 0 < x < 6, \quad 0 < t$$

$$u(0, t) = 3 \quad \text{für} \quad 0 \leq t$$

$$u(6, t) = 3$$

$$u(x, 0) = u_0(x) \quad \text{für} \quad 0 \leq x \leq 6.$$

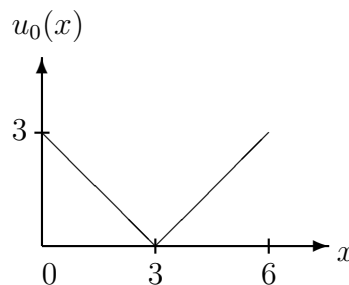


Bild 19 Anfangsfunktion u_0

- Man gebe $u_0(x)$ an.
- Man transformiere das gegebene Problem in u zuerst in ein Problem in v mit homogenen Randbedingungen.
- Man löse das transformierte Problem in v .

Hinweis: Es darf die sich aus dem Produktansatz ergebende Lösungsdarstellung verwendet werden.

- d) Man gebe die Lösung u an.
- e) Man bestimme den maximalen Funktionswert von u im zu Grunde liegenden Gebiet $G := [0, 6] \times [0, \infty[$.

Aufgabe 20:

Man berechne die Lösung der Anfangswertaufgabe

$$\begin{aligned} u_t &= u_{xx} \quad \text{für } x \in \mathbb{R} \text{ und } t > 0, \\ u(x, 0) &= e^{4x} \quad \text{für } x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

- a) unter Verwendung der Fundamentallösung und
- b) mit Hilfe eines Produktansatzes.

Aufgabe 21:

Man berechne die Lösung der Anfangsrandwertaufgabe für folgende Wärmeleitungsgleichung mit Hilfe eines Produktansatzes:

$$\begin{aligned} u_t &= \Delta u && \text{für } (x, y) \in]0, \pi[\times]0, \pi[, \quad 0 < t, \\ u(0, y, t) &= 0 = u(\pi, y, t) && \text{für } y \in [0, \pi], \quad 0 \leq t, \\ u(x, 0, t) &= 0 = u(x, \pi, t) && x \in [0, \pi], \quad 0 \leq t, \\ u(x, y, 0) &= 5 \sin 3x \sin 4y && \text{für } (x, y) \in [0, \pi] \times [0, \pi] \\ &\quad - 8 \sin x \cos x \sin y \cos y. \end{aligned}$$

Man zeichne die Lösung u für $t = 0, \frac{1}{100}, \frac{1}{25}, \frac{1}{5}$. Wie verhält sich die Lösung für $t \rightarrow \infty$?

Aufgabe 22:

Die Telegraphengleichung $u_{xx} = 4u_{tt} + 4u_t + u$ beschreibt den zeitlichen Verlauf einer Signalspannung u am Ort $x > 0$ in einem langen Übertragungskabel.

Gesucht ist die Signalspannung $u(x, t)$, wenn am Rand $x = 0$ des Übertragungskabels ein periodisches Signal der Form $u(0, t) = 5 \sin(3t)$, für $t \geq 0$, eingespeist wird. Außerdem soll die Signalspannung u für $x \rightarrow \infty$ beschränkt sein.

- a) Man zeige, dass ein Produktansatz der Form $u(x, t) = X(x) \cdot T(t)$ zu keiner Lösung führt.
- b) Man versuche den Lösungsansatz $u(x, t) = u_0 e^{-ax} \sin(3t - bx)$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ und $a > 0$.

Aufgabe 23:

Gegeben sei das Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} u_{tt} &= 16u_{xx}, & x \in \mathbb{R}, \quad t > 0, \\ u(x, 0) &= 0, & x \in \mathbb{R}, \\ u_t(x, 0) &= \cos x. \end{aligned}$$

- Man gebe den Abhängigkeitsbereich der Lösung im Punkt $(x_0, t_0) = (2, 1)$ an.
- Man zeichne den Bestimmtheitsbereich der Lösung zum Intervall $[-10, 14]$ für $t \geq 0$
- Man löse das Anfangswertproblem und zeichne die Lösung.

Aufgabe 24:

Gegeben sei das Anfangsrandwertproblem im Halbraum

$$\begin{aligned} u_{tt} - 4u_{xx} &= 0, & x \in \mathbb{R}_+, \quad t > 0, \\ u(x, 0) &= u_0(x), & x \geq 0, \\ u_t(x, 0) &= v_0(x), \\ u(0, t) &= 0, & t > 0. \end{aligned}$$

- Man gebe den Abhängigkeitsbereich der Lösung im Punkt $(x_0, t_0) = (3, 1)$ an.
- Man zeichne den Bestimmtheitsbereich der Lösung zum Intervall $[0, 6]$ für $t \geq 0$.
- Man löse das Anfangsrandwertproblem mit Hilfe der Reflexionsmethode und kläre, ob es sich bei der gefundenen Lösung um eine C^2 -Funktion handelt, für
 - $u_0(x) = x(x-1)(x+1), \quad v_0(x) = 8x,$
 - $u_0(x) = 1 - \cos x, \quad v_0(x) = 0.$

Aufgabe 25:

Gegeben sei die Anfangsrandwertaufgabe

$$\begin{aligned} u_{tt} &= u_{xx} & \text{für } 0 < x < 1, \quad 0 < t, \\ u(0, t) &= 0 = u(1, t) & \text{für } t \geq 0, \\ u(x, 0) &= u_0(x) := 0 \\ u_t(x, 0) &= v_0(x) := x^2(x-1) & \text{für } 0 \leq x \leq 1. \end{aligned}$$

- Man berechne die Lösung über den Produktansatz $u(x, t) = X(x) \cdot T(t)$.
- Man zeichne die Lösung.

Aufgabe 26:

Gegeben sei die Anfangsrandwertaufgabe

$$\begin{aligned} u_{tt} &= u_{xx}, & \text{für } 0 < x < 2 \text{ und } t > 0, \\ u(0, t) &= 0, & \text{für } t \geq 0, \\ u(2, t) &= 1, & \text{für } t \geq 0, \\ u(x, 0) &= x^2/4, & \text{für } 0 \leq x \leq 2, \\ u_t(x, 0) &= 0, & \text{für } 0 \leq x \leq 2. \end{aligned}$$

- a) Man bestimme zunächst eine geeignete Funktion $\tilde{u}(x, t)$, die die Randbedingungen erfüllt, und transformiere die Anfangsrandwertaufgabe durch

$$v(x, t) := u(x, t) - \tilde{u}(x, t)$$

in ein Problem mit homogenen Randbedingungen.

- b) Anschließend löse man das Problem in v .

Hinweis: Dabei darf die sich aus dem Produktansatz ergebende Lösungsdarstellung verwendet werden.

- c) Man gebe die Lösung der Anfangsrandwertaufgabe an.

Aufgabe 27:

Berechnen Sie die Lösung der Anfangsrandwertaufgabe der Wärmeleitungsgleichung unter Verwendung der Fourier-Methode

$$\begin{aligned} u_t &= u_{xx} + (2x - 1)e^{-t} + 3\pi^2 \sin 3\pi x & \text{für } 0 < x < 1, \quad 0 < t, \\ u(x, 0) &= u_0(x) := \begin{cases} -4x + 1 & , \quad 0 \leq x \leq 1/2 \\ -1 & , \quad 1/2 \leq x \leq 1 \end{cases}, \\ u(0, t) &= e^{-t}, \quad u(1, t) = -e^{-t} & \text{für } 0 \leq t. \end{aligned}$$

Aufgabe 28:

Man löse die Anfangsrandwertaufgabe für die Wellengleichung unter Verwendung der Fourier-Methode:

$$\begin{aligned} u_{tt} &= c^2 u_{xx} + t \sin \left(\frac{2\pi x}{\ell} \right) + \frac{x - \ell}{\ell} \sin t - \frac{x}{\ell} \cos t, & 0 < x < \ell, \quad 0 < t, \\ u(0, t) &= \sin t, \quad u(\ell, t) = \cos t, & \text{für } t \geq 0, \\ u(x, 0) &= \frac{x}{\ell}, \quad u_t(x, 0) = 1 - \frac{x}{\ell}, & \text{für } 0 \leq x \leq \ell \end{aligned}$$

und zeichne die Lösung für $\ell = 1$ und $c = 1$.

Lösung 1:

- a) (i) $u_x + u^2 u_y = 3x + 4y - 6u + 5$, skalar, quasilinear, 1. Ordnung
 (ii) $u_{xy} + y^2 u_y^2 = e^u + x^2 + y^2$, skalar, semilinear, 2. Ordnung
 (iii) $u_{xx}^2 + x^2 u_{yy} = 1 + 2x + 3y + 4u + 5u_x + 6u_y$,
 skalar, nichtlinear, 2. Ordnung
 (iv) $\ln(u_x + u_y) + u_x + u_y = 1$, skalar, nichtlinear, 1. Ordnung,
 (v) $\begin{pmatrix} x u_x \\ x v_x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_y \\ -u_y \end{pmatrix}$, vektoriell, linear, 1. Ordnung
- b) (i) $\Delta u_1 = (x^3 - 3xy^2)_{xx} + (x^3 - 3xy^2)_{yy} = 6x - 6x = 0$
 (ii) $\Delta u_2 = (3x^2 y - y^3)_{xx} + (3x^2 y - y^3)_{yy} = 6y - 6y = 0$
 (iii) $\Delta u_3 = (e^x \sin(y) + y + 6x)_{xx} + (e^x \sin(y) + y + 6x)_{yy}$
 $= e^x \sin(y) - e^x \sin(y) = 0$.

Lösung 2:

- a) Fasst man x als Parameter auf, so kann diese partielle Differentialgleichung als gewöhnliche Differentialgleichung aufgefasst werden in $v(y) := u(x, y)$:

$$v'' - 4xv' + 3x^2v = -8x + 3x^3 + 6x^2y.$$

Lösung der homogenen gewöhnlichen Differentialgleichung

$$v'' - 4xv' + 3x^2v = 0$$

mit dem üblichen Ansatz $v(y) = e^{\lambda y}$, dabei kann λ von x abhängen, also $\lambda = \lambda(x)$ gelten.

$$p(\lambda) = \lambda^2 - 4x\lambda + 3x^2 = (\lambda - 2x)^2 - x^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda = 2x \pm x$$

$$\Rightarrow v_h(y) = c_1(x)e^{3xy} + c_2(x)e^{xy}$$

mit frei wählbaren stetigen Funktionen $c_1(x)$ und $c_2(x)$.

Lösung der inhomogenen gewöhnlichen Differentialgleichung

$$v'' - 4xv' + 3x^2v = -8x + 3x^3 + 6x^2y$$

mit dem üblichen Ansatz $v_p(y) = a(x)y + b(x)$:

$$v'' - 4xv' + 3x^2v = -4xa + 3x^2(ay + b)$$

$$= 3x^2ay - 4ax + 3x^2b = -8x + 3x^3 + 6x^2y$$

$$\Rightarrow a = 2 \Rightarrow b = x \Rightarrow v_p(y) = 2y + x$$

$$\Rightarrow u(x, y) = v_h(y) + v_p(y) = c_1(x)e^{3xy} + c_2(x)e^{xy} + 2y + x$$

- b) $u_{xy} = 2x \cos y + e^x + 3y^2 \Rightarrow u_x = 2x \sin y + ye^x + y^3 + c(x)$
 $\Rightarrow u(x, y) = x^2 \sin y + ye^x + xy^3 + f(x) + g(y)$
 mit beliebigen und differenzierbaren Funktion g und f , wobei $f'(x) = c(x)$ gilt.

- c) Setze $v(x, y) := u_y(x, y)$, dann erhält man:

$$\begin{aligned} x(x+1)u_{xy} &= (2x+1)u_y \\ \Rightarrow v_x &= \frac{2x+1}{x^2+x}v \Rightarrow \frac{v_x}{v} = \frac{2x+1}{x^2+x} \\ \Rightarrow \int \frac{dv}{v} &= \int \frac{2x+1}{x^2+x} dx \Rightarrow \ln|v| = \ln|x^2+x| + k(y) \\ \Rightarrow u_y &= v = c(y) \cdot (x^2+x) \Rightarrow u(x, y) = g(y) \cdot (x^2+x) + f(x) \end{aligned}$$

mit beliebigen und differenzierbaren Funktion f und g , wobei $g'(y) = c(y)$ gilt.

Lösung 3:

- a) $u(t, x) = e^{x+\alpha t}$ eingesetzt $u_{tt} = 9u_{xx}$ ergibt

$$\alpha^2 e^{x+\alpha t} = 9e^{x+\alpha t} \Rightarrow \alpha = \pm 3.$$

Lösungen der Differentialgleichungen sind also

$$f(x, t) = e^{x+3t} \quad \text{und} \quad f(x, t) = e^{x-3t}.$$

- b) $u(x, y, z) = e^{\alpha x + \beta y + \gamma z}$
 $\Rightarrow u_{xx} = \alpha^2 u, \quad u_{yy} = \beta^2 u, \quad u_{zz} = \gamma^2 u$

In die Differentialgleichung einsetzen:

$$u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} - 2u_z + u = 0$$

$$\Rightarrow \alpha^2 u + \beta^2 u + \gamma^2 u - 2\gamma u + u = 0$$

$$\stackrel{u \neq 0}{\Rightarrow} \alpha^2 + \beta^2 + (\gamma - 1)^2 = 0$$

$$\Rightarrow \gamma = 1 \pm i\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow u_1(x, y, z) &= e^{\alpha x + \beta y + z} \cos(\sqrt{\alpha^2 + \beta^2} z), \\ u_2(x, y, z) &= e^{\alpha x + \beta y + z} \sin(\sqrt{\alpha^2 + \beta^2} z). \end{aligned}$$

Lösung 4:

Mit $v(t, x) = w(r(t, x), s(t, x))$ transformieren sich die partiellen Ableitungen in der Differentialgleichung nach der Kettenregel

$$v_t = w_r r_t + w_s s_t, \quad v_x = w_r r_x + w_s s_x,$$

mit $r_t = a$, $s_t = c$, $r_x = b$ und $s_x = d$. Eingesetzt in die Differentialgleichung ergibt sich

$$\begin{aligned} 12tx + 15t^2 &= 2(w_r r_t + w_s s_t) + 5(w_r r_x + w_s s_x) \\ &= w_r(2r_t + 5r_x) + w_s(2s_t + 5s_x) \\ &= w_r(2a + 5b) + w_s(2c + 5d) . \end{aligned}$$

Durch geschickte Wahl der noch unbestimmten Koeffizienten a, b, c und d der linearen Transformation kann man einen Koeffizienten der transformierten Differentialgleichung gleich Null setzen und den anderen eindeutig festlegen unter Berücksichtigung von $ad - bc \neq 0$ (reguläre Transformation). Beispielsweise führt die Wahl

$$a = 5, b = -2, c = 0, d = 1/5 \Rightarrow \begin{array}{l} r = 5t - 2x \\ s = x/5 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} t = r/5 + 2s \\ x = 5s \end{array}$$

auf die transformierte Differentialgleichung

$$w_s(r, s) = 12(r/5 + 2s)5s + 15(r/5 + 2s)^2 = \frac{3}{5}(r^2 + 40rs + 300s^2) .$$

Dies ist eine gewöhnliche Differentialgleichung in der Variablen s mit dem Parameter r . Integration bezüglich s führt auf die Lösung

$$\begin{aligned} w(r, s) &= \frac{3}{5}(r^2 s + 20rs^2 + 100s^3) + f(r) \\ \Rightarrow v(t, x) &= \frac{3}{5} \left((5t - 2x)^2 \frac{x}{5} + 20(5t - 2x) \left(\frac{x}{5} \right)^2 + 100 \left(\frac{x}{5} \right)^3 \right) + f(5t - 2x) \\ &= 3t^2 x + f(5t - 2x) \end{aligned}$$

Die Anfangsvorgabe wird verwendet, um die noch unbestimmte Funktion f festzulegen

$$v(0, x) = f(-2x) = \cos(2x) \Rightarrow f(x) = \cos x .$$

Damit lautet die Lösung der partiellen Differentialgleichung erster Ordnung

$$v(t, x) = 3t^2 x + \cos(5t - 2x) .$$

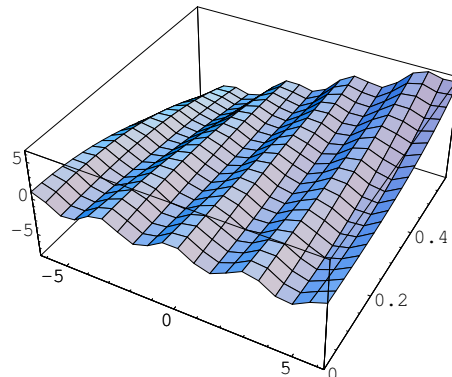


Bild 4: $v(t, x) = 3t^2 x + \cos(5t - 2x)$ für $0 \leq t \leq 0.6$ und $-2\pi \leq x \leq 2\pi$

Lösung 5:

Hier werden drei alternative Möglichkeiten des Lösen der charakteristischen Differentialgleichungen dargestellt:

a) Lösen mit Phasendifferentialgleichung:

$$(2x - y)u_x + yu_y = 0 \quad \stackrel{y \neq 0}{\Leftrightarrow} \quad \frac{2x - y}{y}u_x + u_y = 0$$

Die zweite charakteristische Differentialgleichung lautet jetzt

$$\dot{y}(t) = 1 .$$

Man erhält $y = t + C_0$, d.h. y und t sind bis auf Verschiebung um C_0 identisch. Für die weitere Lösung wählen wir $C_0 = 0$, also $y = t$ und berechnen $x = x(y)$.

Damit lautet die Phasendifferentialgleichung

$$x' = \frac{2x - y}{y} = \frac{2x}{y} - 1 .$$

Die zugehörige homogene Differentialgleichung wird gelöst durch Separation

$$x'(y) = \frac{2x}{y} \quad \Rightarrow \quad \frac{x'}{x} = \frac{2}{y} \quad \Rightarrow \quad x_h(y) = C_1 y^2 .$$

Eine Lösung der zugehörigen inhomogenen Differentialgleichung erhält man durch Variation der Konstanten mit dem Ansatz

$$x_p(y) = C(y)y^2 \quad \Rightarrow \quad C'(y)y^2 = -1 \quad \Rightarrow \quad C(y) = \frac{1}{y} \quad \Rightarrow \quad x_p(y) = y .$$

Man erhält über die allgemeine Lösung:

$$x(y) = C_1 y^2 + y \quad \Rightarrow \quad C_1 = \frac{x - y}{y^2} .$$

b) Die charakteristischen Differentialgleichungen

$$(2x - y)u_x + yu_y = 0 \quad \Rightarrow \quad \dot{x} = 2x - y, \quad \dot{y} = y .$$

Elementares Lösen des charakteristischen Differentialgleichungssystems:

$$\dot{y} = y \Rightarrow y(t) = c_1 e^t \Rightarrow e^t = \frac{y}{c_1}$$

$\dot{x} = 2x - y = 2x - c_1 e^t$ ist eine lineare inhomogene Differentialgleichung.

Allgemeine Lösung der homogenen Differentialgleichung:

$$x_h(t) = c_2 e^{2t} .$$

Variation der Konstanten für die inhomogene Differentialgleichung: $x_p(t) = c(t)e^{2t}$:

$$\dot{c}e^{2t} = -c_1e^t \Rightarrow \dot{c} = -c_1e^{-t} \Rightarrow c(t) = c_1e^{-t}$$

Allgemeine Lösung: $x(t) = c_2e^{2t} + c_1e^t$. Damit ergibt sich

$$x = c_2 \left(\frac{y}{c_1} \right)^2 + y \Rightarrow \frac{c_2}{c_1^2} = \frac{x-y}{y^2} \quad \left(\text{mit } C_1 = \frac{c_2}{c_1^2}, \text{ vgl. a) } \right).$$

- c) Lösen der charakteristischen Differentialgleichungen als lineares System mit konstanten Koeffizienten:

$$\begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{=\mathbf{A}} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$$

$$p_{\mathbf{A}}(\lambda) = \det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = (2 - \lambda)(1 - \lambda) = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2$$

Man berechnet die zugehörigen Eigenvektoren:

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Allgemeine Lösung des Systems:

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = c_1 \mathbf{v}_1 e^t + c_2 \mathbf{v}_2 e^{2t} = \begin{pmatrix} c_1 e^t + c_2 e^{2t} \\ c_1 e^t \end{pmatrix} \quad (\text{vgl. b))}$$

Man erhält somit die allgemeine Lösung der Ausgangsgleichung:

$$u(x, y) = \Phi \left(\frac{x-y}{y^2} \right)$$

mit einer beliebigen C^1 -Funktion Φ .

Lösung 6:

Normiert man einen Koeffizienten in der Differentialgleichung auf eins

$$4xu_x - 12xyu_y - x^2z^2u_z = 0 \stackrel{x \neq 0}{\Leftrightarrow} u_x - 3yu_y - \frac{xz^2}{4}u_z = 0,$$

so kann man die charakteristischen Differentialgleichungen um eine Gleichung reduzieren und nennt sie dann Phasendifferentialgleichungen:

$$\dot{x} = 1, \quad \dot{y} = -3y, \quad \dot{z} = -\frac{xz^2}{4}.$$

$\dot{x} = 1 \Rightarrow x = t + C_0$, d.h. x und t stimmen bis auf Verschiebung um C_0 überein. Ohne Einschränkung kann $C_0 = 0$ gewählt werden, also $x = t$.

Lösen der Phasendifferentialgleichung:

$$y' = -3y \Rightarrow y(x) = C_1 e^{-3x}$$

$$\Rightarrow C_1 = y e^{3x} =: \varphi_1(x, y, z)$$

$$z' = -\frac{xz^2}{4} \Rightarrow -\frac{z'}{z^2} = \frac{x}{4} \Rightarrow \frac{1}{z} = \frac{x^2}{8} + C_2$$

$$\Rightarrow C_2 = \frac{1}{z} - \frac{x^2}{8} =: \varphi_2(x, y, z).$$

Damit lautet die allgemeine Lösung mit einer beliebigen C^1 -Funktion Φ :

$$u(x, y, z) = \Phi(\varphi_1(x, y, z), \varphi_2(x, y, z)) = \Phi\left(y e^{3x}, \frac{1}{z} - \frac{x^2}{8}\right).$$

Lösung 7:

charakteristische Differentialgleichungen

$$\dot{x} = 1, \quad \dot{y} = 2$$

$$\dot{x} = 1 \Rightarrow x = t$$

$$y'(x) = 2 \Rightarrow y = 2x + C \Rightarrow C = y - 2x$$

$$\text{allgemeine Lösung } u(x, y) = \psi(y - 2x)$$

$$\text{Anfangsbedingung } x^3 + x = u(x, 3x) = \psi(3x - 2x) = \psi(x)$$

$$\text{Lösung der Anfangswertaufgabe } u(x, y) = (y - 2x)^3 + (y - 2x)$$

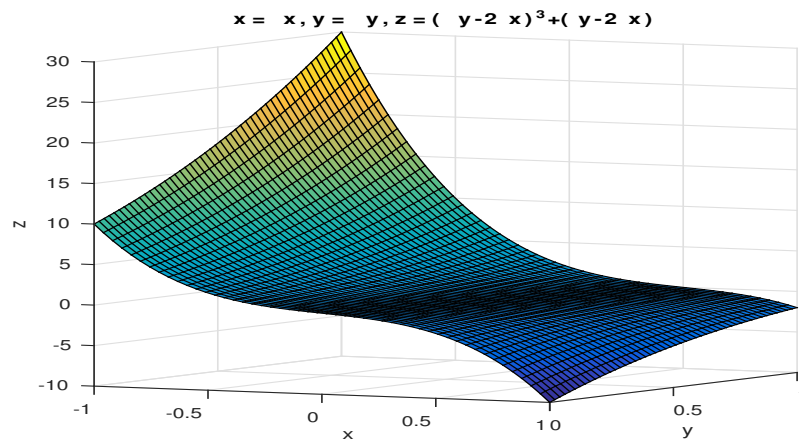


Bild 7: Lösung $u(x, y)$

Lösung 8:

Der inhomogenen linearen PDG 1.Ordnung in den Variablen (x, y) wird das erweiterte Problem in den Variablen (x, y, u) zugeordnet:

$$xU_x + (x + 2y)U_y + (3u - 2x)U_u = 0 .$$

Für dieses Problem werden die charakteristischen Differentialgleichungen gelöst

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= x \\ \dot{y}(t) &= x + 2y \\ \dot{u}(t) &= 3u - 2x\end{aligned}$$

a) kurzer Lösungsweg

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= x & \Rightarrow x(t) &= C_1 e^t \\ \dot{y}(t) &= x + 2y = 2y + C_1 e^t & \Rightarrow y(t) &= C_2 e^{2t} - C_1 e^t \\ \dot{u}(t) &= 3u - 2x = 3u - 2C_1 e^t & \Rightarrow u(t) &= C_3 e^{3t} + C_1 e^t\end{aligned}$$

b) Standardlösungsmethode für lineare Systeme mit konstanten Koeffizienten:

$$\begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \\ \dot{u}(t) \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 3 \end{pmatrix}}_{=\mathbf{A}} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ u(t) \end{pmatrix}$$

$$p_{\mathbf{A}}(\lambda) = \det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = (1 - \lambda)(2 - \lambda)(3 - \lambda) = 0$$

$$\text{Eigenwerte: } \lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 3$$

$$\text{Eigenvektoren: } \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Allgemeine Lösung des (homogenen) Systems:

$$\mathbf{v}_h(t) = C_1 e^t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 e^{2t} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + C_3 e^{3t} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} .$$

Elimination von t durch $x(t) = C_1 e^t \Rightarrow e^t = \frac{x}{C_1}$ und anschließendes Auflösen nach den Konstanten

$$y = y(t) = C_2 e^{2t} - C_1 e^t = \left(\frac{C_2 x^2}{C_1^2} \right) - x \Rightarrow \tilde{C}_2 := \frac{C_2}{C_1^2} = \frac{x + y}{x^2}$$

$$u = C_3 e^{3t} + C_1 e^t = \left(\frac{C_3 x^3}{C_1^3} \right) + x \quad \Rightarrow \quad \tilde{C}_3 := \frac{C_3}{C_1^3} = \frac{u - x}{x^3}$$

Damit wird die Lösung u beschrieben durch folgende implizite Gleichung:

$$U(x, y, u) = \Phi(\tilde{C}_2, \tilde{C}_3) = \Phi\left(\frac{x+y}{x^2}, \frac{u-x}{x^3}\right) = 0$$

Setzt man die Auflösbarkeit nach der 2. Variablen von Φ voraus, so ergibt sich die allgemeine Lösung mit einer noch frei wählbaren Funktion Ψ :

$$\frac{u-x}{x^3} = \Psi\left(\frac{x+y}{x^2}\right) \quad \Rightarrow \quad u(x, y) = x + x^3 \Psi\left(\frac{x+y}{x^2}\right)$$

Durch Einsetzen der Anfangsbedingung wird Ψ bestimmt:

$$2x + 8x^2 = u(2x, 2x) = 2x + 8x^3 \Psi\left(\frac{4x}{4x^2}\right) \Rightarrow \Psi\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x} \Rightarrow \Psi(x) = x.$$

Daraus erhält man die Lösung der Anfangswertaufgabe:

$$u(x, y) = x + x^3 \frac{x+y}{x^2} = x + x^2 + xy.$$

Lösung 9:

a) Der quasilinearen Burgers-Gleichung

$$0 = u_t + uu_x$$

wird das erweiterte Problem

$$U_t + uU_x + 0 \cdot U_u = 0$$

zugeordnet. Die charakteristischen Differentialgleichungen

$$t'(s) = 1, \quad x'(s) = u, \quad u'(s) = 0$$

ergeben $t = s$ und somit $u'(t) = 0 \Rightarrow u(t) = C$ und

$$x'(t) = u = C \Rightarrow x = Ct + D \Rightarrow D = x - ut$$

Damit wird die allgemeine Lösung durch die folgende implizite Gleichung mit einer C^1 -Funktion Φ beschrieben:

$$\Phi(u, x - ut) = 0.$$

Angenommen diese implizite Lösungsdarstellung lässt sich nach dem Satz über implizite Funktionen nach der ersten Komponente auflösen, so erhält man mit einer unbekannten Funktion ψ die implizite Lösungsdarstellung

$$u(x, t) = \psi(x - u(x, t)t).$$

- b) (i) Die Anfangsbedingung $u(x, 0) = 2(x + 1)$ führt auf

$$2(x + 1) = u(x, 0) = \psi(x - u(x, 0) \cdot 0) = \psi(x) .$$

Die implizite Lösungsdarstellung der Anfangswertaufgabe lautet also

$$u(x, t) = \psi(x - u(x, t)t) = 2(x - u(x, t)t + 1) .$$

Auflösen nach u ergibt für alle $(x, t) \in \mathbb{R} \times (0, \infty)$ die Lösung die explizite Darstellung

$$u(x, t) = \frac{2x + 2}{2t + 1} .$$

Charakteristische Grundkurve: $(x(t), t)$ mit

$$x(t) = u_0(x_0)t + x_0 = 2(x_0 + 1)t + x_0 .$$

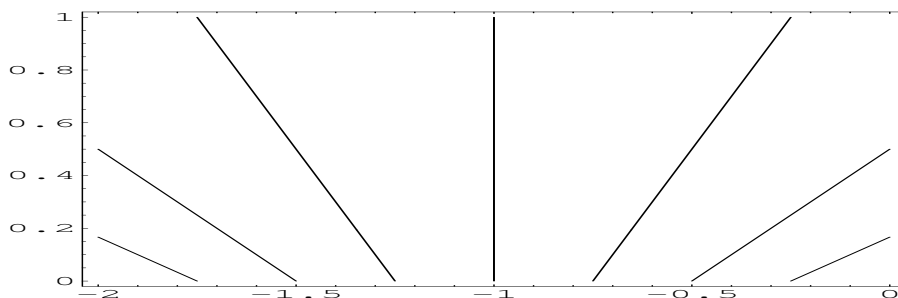


Bild 9 b) (i): $x(t) = 2(x_0 + 1)t + x_0$

- (ii) Die Anfangsbedingung $u(x, 0) = 2(1 - x)$ führt auf

$$2(1 - x) = u(x, 0) = \psi(x - u(x, 0) \cdot 0) = \psi(x) .$$

Die implizite Lösungsdarstellung der Anfangswertaufgabe lautet also

$$u(x, t) = \psi((x - u(x, t)t) = 2(1 - x + u(x, t)t) .$$

Auflösen nach u ergibt für alle $(x, t) \in \mathbb{R} \times \left(0, \frac{1}{2}\right)$ die explizite Darstellung

$$u(x, t) = \frac{2 - 2x}{1 - 2t} .$$

Für $T = \frac{1}{2}$ besitzt diese Lösung eine Singularität.

Charakteristische Grundkurve: $x(t) = 2(1 - x_0)t + x_0$.

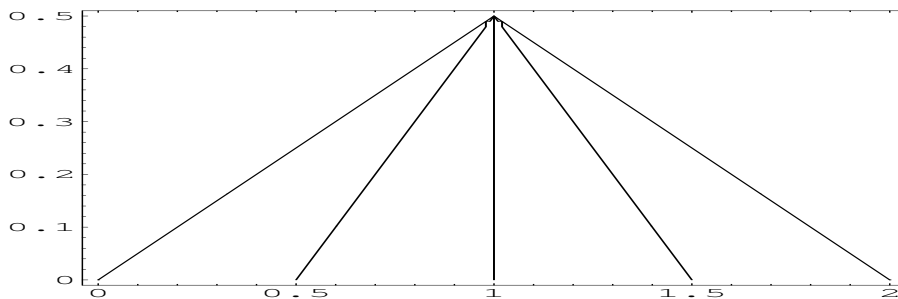


Bild 9 b) (ii): $x(t) = 2(1 - x_0)t + x_0$

Im Punkt $(x, t) = \left(1, \frac{1}{2}\right)$ schneiden sich alle charakteristischen Grundkurven.

Lösung 10:

- a) Der Sprung von u_0 bei $x_0 = -2$ erzeugt eine Verdünnungswelle u_v .
Mit $u_l = 0 < u_r = 1$ erhält man

$$u_v(x, t) = \begin{cases} 0 & , & x \leq -2 \\ \frac{x+2}{t} & , & -2 < x \leq -2+t \\ 1 & , & -2+t < x \end{cases}$$

Die Entropiebedingung

$$u(x+z, t) - u(x, t) < \frac{Cz}{t} \quad \text{für } t, z, C > 0, \quad x \in \mathbb{R}$$

wird von u_v , auf Grund der Stetigkeit von u_v , erfüllt.

Außerdem kann man eine Stoßwelle u_s berechnen. Die Rankine-Hugoniot Bedingung lautet

$$\dot{s} = \frac{1}{2}(u_l + u_r) = \frac{1}{2}(0 + 1) = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad s(t) = \frac{t}{2} + C$$

Mit $s(0) = x_0 = -2$ erhält man die Stoßfront $s_0(t) = \frac{t}{2} - 2$ und damit die Stoßwelle.

$$u_s(x, t) = \begin{cases} 0 & , & x \leq \frac{t}{2} - 2 = s(t) \\ 1 & , & \frac{t}{2} - 2 < x \end{cases}$$

Die Entropiebedingung für u_s ergibt z.B für $x = s(t)$ einen Widerspruch

$$u_s(s(t) + z, t) - u_s(s(t), t) = 1 - 0 = 1 < \frac{Cz}{t}.$$

Diese Bedingung ist nur für $\frac{t}{C} < z$ und nicht für alle $z > 0$ erfüllt. Also ist u_v die Entropielösung.

Der Sprung von u_0 bei $x_1 = 0$ führt nur zu einer Stoßwelle mit $u_l = 1 > u_r = -1$. Eine Verdünnungswelle ist hier nicht definiert.

Die Rankine-Hugoniot Bedingung lautet

$$\dot{s} = \frac{1}{2}(u_l + u_r) = \frac{1}{2}(1 - 1) = 0 \quad \Rightarrow \quad s(t) = C$$

Mit $s(0) = x_1 = 0$ erhält man die Stoßfront $s_1(t) = 0$ und damit die Stoßwelle.

$$u_s(x, t) = \begin{cases} 1 & , \quad x \leq 0 \\ -1 & , \quad 0 < x \end{cases}$$

Die Entropiebedingung ist wegen $u(x+z, t) - u(x, t) \leq 0 < \frac{Cz}{t}$ automatisch erfüllt.

Damit lautet die gesamte Entropielösung also

$$u(x, t) = \begin{cases} 0 & , \quad x \leq -2 \\ \frac{x+2}{t} & , \quad -2 < x \leq -2+t \\ 1 & , \quad -2+t < x \leq 0 \\ -1 & , \quad 0 < x \end{cases}$$

Diese Lösung ist jedoch nur für $-2+t \leq 0 \Rightarrow t \leq 2 =: T$ definiert, also nur bis zu dem Zeitpunkt, wo die Verdünnungswelle auf die Stoßfront der Stoßwelle trifft.

b)

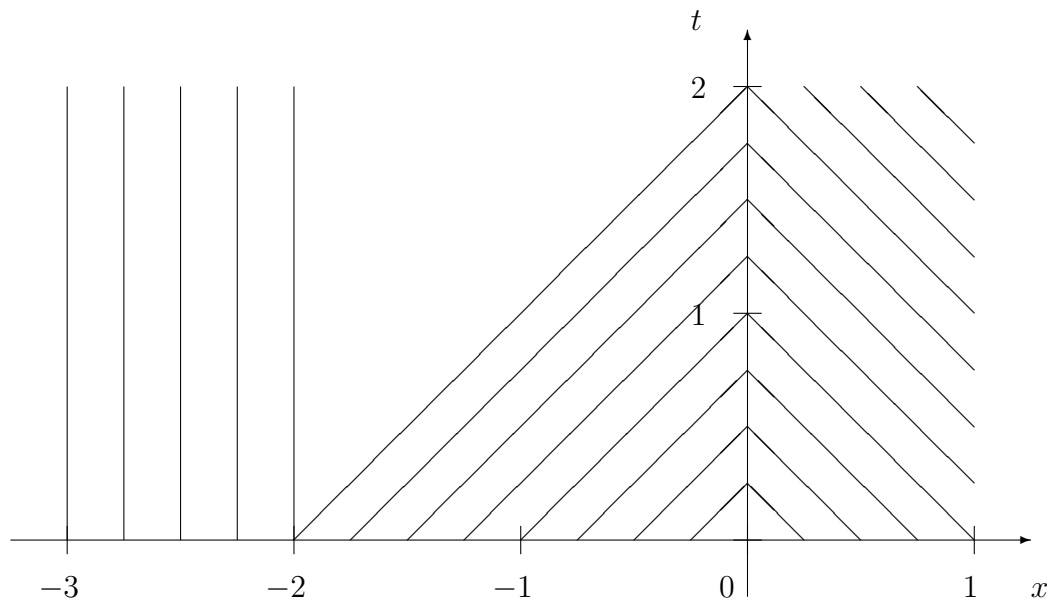


Bild 10 b) Grundcharakteristiken mit Stoßfront

c)

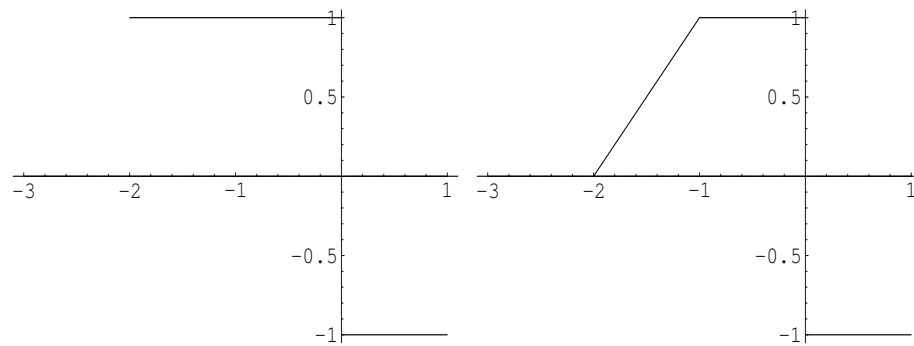


Bild 10 c) (i): $u(x, 0), u(x, 1)$

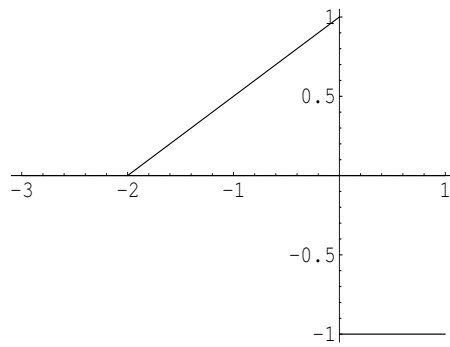


Bild 10 c) (ii): $u(x, 2)$

Lösung 11:

a) $u_{xx} + 2u_{xy} + u_{yy} - 3u_y + x^2u = 1 \quad \Leftrightarrow$

$$\underbrace{\nabla^T \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \nabla u}_{=: \mathbf{A}} + (0, -3) \nabla u + x^2 u = 1$$

$$\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = (1 - \lambda)^2 - 1 = \lambda(\lambda - 2) = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = 0, \lambda_2 = 2$$

Damit ist die Differentialgleichung in ganz $\mathbb{R}^2$ von parabolischem Typ.

b) $(y + 2)u_{xx} + 4xu_{xy} + u_{yy} + 3u_x - e^x u_y + 27u = 23 \sin(y - \pi)$

$$\Leftrightarrow \underbrace{\nabla^T \begin{pmatrix} y+2 & 2x \\ 2x & 1 \end{pmatrix} \nabla u}_{=: \mathbf{A}} + (3, -e^x - 2) \nabla u + 27u = 23 \sin(y - \pi)$$

$$\lambda_1 \cdot \lambda_2 = \det \mathbf{A} = y + 2 - 4x^2 \begin{cases} > 0 & \text{(elliptisch)} & \text{für } y > 4x^2 - 2 \\ = 0 & \text{(parabolisch)} & \text{für } y = 4x^2 - 2 \\ < 0 & \text{(hyperbolisch)} & \text{für } y < 4x^2 - 2 \end{cases}$$

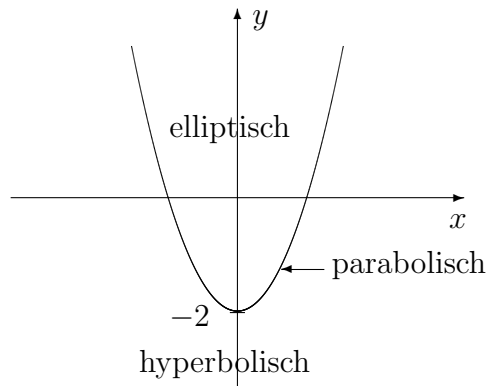


Bild 11 b) Gebiete unterschiedlichen Typs

c) $4u_{xx} - 4u_{xz} + 2u_{yy} + 4u_{zz} + x^2u_x - 9yu_z + 4u = 0$

$$\Leftrightarrow \underbrace{\nabla^T \begin{pmatrix} 4 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 4 \end{pmatrix}}_{=: \mathbf{A}} \nabla u + (x^2, 0, -9y) \nabla u + 4u = 0$$

$$\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = (2 - \lambda)((4 - \lambda)^2 - 4) = (2 - \lambda)(\lambda - 2)(\lambda - 6) = 0$$

$$\Rightarrow \lambda_{1,2} = 2, \quad \lambda_3 = 6$$

Damit ist die Differentialgleichung in ganz $\mathbb{R}^3$ von elliptischem Typ.

Lösung 12:

a) $\frac{17}{10}u_{xx} - \frac{9}{5}u_{xy} - \frac{7}{10}u_{yy} + \sqrt{10}u_x = x + 3y$

$$\Leftrightarrow \nabla^T \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{17}{10} & -\frac{9}{10} \\ \frac{9}{10} & -\frac{7}{10} \end{pmatrix}}_{=: \mathbf{A}} \nabla u + (\sqrt{10}, 0) \nabla u = x + 3y$$

$$\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = (\lambda + 1)(\lambda - 2) = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = -1, \quad \lambda_2 = 2$$

Es handelt sich damit in ganz $\mathbb{R}^2$ um eine hyperbolische Differentialgleichung.

b) Eigenvektoren $\mathbf{v}_1$ und $\mathbf{v}_2$ von $\mathbf{A}$ und Transformationsmatrix SS :

$$\mathbf{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad SS = \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

Mit den neuen Variablen

$$\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} := SS^T \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = SS \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}$$

wird die Ausgangsgleichung nach der Kettenregel transformiert und in eine Gleichung in $\tilde{u}(\xi, \eta) := u(x(\xi, \eta), y(\xi, \eta))$ überführt:

$$-\tilde{u}_{\xi\xi} + 2\tilde{u}_{\eta\eta} + \tilde{u}_{\xi} + 3\tilde{u}_{\eta} = \sqrt{10}\xi.$$

Erneute Transformation mit den Variablen

$$\mu := \xi, \nu := \frac{\eta}{\sqrt{2}}$$

führt auf die 1. hyperbolische Normalform in $\hat{u}(\mu, \nu) := \tilde{u}(\xi(\mu, \nu), \eta(\mu, \nu))$

$$\hat{u}_{\nu\nu} - \hat{u}_{\mu\mu} + \hat{u}_{\mu} + \frac{3}{\sqrt{2}}\hat{u}_{\nu} = \sqrt{10}\mu.$$

Lösung 13:

a) Die Kettenregel ergibt für $u(\xi(x, t), \eta(x, t))$:

$$u_x = u_{\xi}\xi_x + u_{\eta}\eta_x = u_{\xi} + u_{\eta},$$

$$u_{xx} = u_{\xi\xi}\xi_x + u_{\xi\eta}\eta_x + u_{\eta\xi}\xi_x + u_{\eta\eta}\eta_x = u_{\xi\xi} + 2u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta},$$

$$u_t = u_{\xi}\xi_t + u_{\eta}\eta_t = -2u_{\xi} + 2u_{\eta},$$

$$u_{tt} = -2(u_{\xi\xi}\xi_t + u_{\xi\eta}\eta_t) + 2(u_{\eta\xi}\xi_t + u_{\eta\eta}\eta_t) = 4u_{\xi\xi} - 8u_{\xi\eta} + 4u_{\eta\eta}$$

$$\text{Man erhält } u_{tt} = 4u_{xx} \Leftrightarrow 16u_{\xi\eta} = 0.$$

Durch Integration nach η und ξ erhält man die allgemeine Lösung

$$u(\xi, \eta) = f(\xi) + g(\eta) \Leftrightarrow u(x, t) = f(x - 2t) + g(x + 2t).$$

b) Zunächst wird die Kompatibilität in den Eckpunkten überprüft:

$$u(x, 0) = x - x^2 \Rightarrow u(0, 0) = 0, u(1, 0) = 0$$

$$u(x, 1) = 0 \Rightarrow u(0, 1) = 0, u(1, 1) = 0,$$

$$u(0, t) = 0 \Rightarrow u(0, 0) = 0, u(0, 1) = 0$$

$$u(1, t) = 0 \Rightarrow u(1, 0) = 0, u(1, 1) = 0.$$

Hier ergibt sich also kein Widerspruch.

Die allgemeine Lösung der Wellengleichung besitzt die Darstellung

$$u(x, t) = f(x - 2t) + g(x + 2t),$$

mit noch zu bestimmenden Funktionen $f, g \in C^2$.

Aus den Randdaten erhält man

$$0 = u(0, t) = f(-2t) + g(2t) \stackrel{\mu=2t}{\Rightarrow} g(\mu) = -f(-\mu)$$

$$\Rightarrow u(x, t) = f(x - 2t) - f(-x - 2t)$$

$$0 = u(1, t) = f(1 - 2t) - f(-1 - 2t) \stackrel{\mu=1-2t}{\Rightarrow} f(\mu) = f(\mu - 2)$$

$$x - x^2 = u(x, 0) = f(x) - f(-x)$$

$$= f(x - 2) - f(-x - 2) = u(x, 1) = 0$$

Dies führt auf den Widerspruch $x - x^2 = 0$, da $x \in [0, 1]$ beliebig.

Lösung 14:

Einsetzen von $u(x, y) = f(x) \cdot g(y)$ in die Differentialgleichung ergibt

$$f''(x)g(y) + f(x)g''(y) = 0.$$

Durch Separation erhält man

$$-\frac{f''(x)}{f(x)} = \frac{g''(y)}{g(y)} =: \lambda.$$

Da die obigen Quotienten für alle x und y gelten, müssen sie notwendig konstant sein. Diese Konstante werde mit λ bezeichnet. Damit ergeben sich zwei gewöhnliche Differentialgleichungen in x bzw. in y

$$f''(x) + \lambda f(x) = 0 \quad \text{und} \quad g''(y) - \lambda g(y) = 0.$$

Der Produktansatz in die Randbedingungen eingesetzt ergibt

$$0 = u(0, y) = f(0)g(y) \Rightarrow f(0) = 0$$

$$(\text{sonst gilt } g \equiv 0 \Rightarrow u \equiv 0),$$

$$0 = u(1, y) = f(1)g(y) \Rightarrow f(1) = 0.$$

Die gewöhnliche Randeigenwertaufgabe

$$f''(x) + \lambda f(x) = 0 \quad \text{mit} \quad f(0) = 0 = f(1),$$

besitzt folgende Eigenwerte mit zugehörigen Eigenfunktionen

$$\lambda_k = k^2\pi^2, \quad f_k(x) = \sin k\pi x.$$

Damit lautet die allgemeine Lösung von $g''(y) - k^2\pi^2 g(y) = 0$

$$g_k(y) = \tilde{c}_k e^{k\pi y} + \tilde{d}_k e^{-k\pi y} = c_k \cosh k\pi y + d_k \sinh k\pi y.$$

Mit $0 = u(x, 2) = f(x)g(2) \Rightarrow g(2) = 0$ und man erhält mit Hilfe der Funktionalgleichung $\sinh(s+t) = \sinh s \cosh t + \cosh s \sinh t$

$$g_k(y) = b_k \sinh k\pi(y-2).$$

Da die Differentialgleichung linear ist erhält man durch Superposition eine Lösungsdarstellung der Form

$$u(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sinh k\pi(y-2) \sin k\pi x.$$

Über die verbleibende Randbedingung

$$2 \sin(3\pi x) = u(x, 0) = \sum_{k=1}^{\infty} -b_k \sinh 2k\pi \sin k\pi x.$$

ergeben sich die b_k aus den Fourierkoeffizienten von $2 \sin(3\pi x)$ hier über eine Koeffizientenvergleich:

$$2 = -b_3 \sinh 6\pi.$$

Die Lösung lautet daher $u(x, y) = -\frac{2 \sinh 3\pi(y-2)}{\sinh 6\pi} \sin 3\pi x.$

Nach dem Maximumprinzip für harmonische Funktionen werden minimaler und maximaler Funktionswert auf dem Rand angenommen. Hier sind es also die Extrema von $u(x, 0) = 2 \sin(3\pi x)$:

$$u_{\min} = u\left(\frac{1}{2}, 0\right) = 2 \sin(3\pi/2) = -2, \quad u_{\max} = u\left(\frac{1}{6}, 0\right) = 2.$$

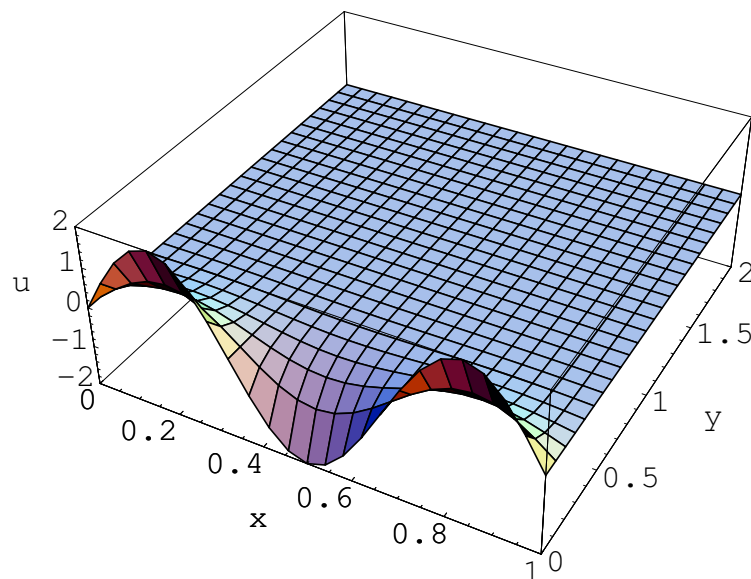


Bild 14 Lösung $u(x, y)$

Plotbefehl in Mathematica:

```
Plot3D[-2*Sinh[3*Pi*(y - 2)]*Sin[3*Pi*x]/Sinh[6*Pi],
{x, 0, 1}, {y, 0, 2}, AxesLabel -> {"x", "y", "u"},
PlotRange -> {-2, 2}]
```

Lösung 15:

Der Produktansatz $u(r, \varphi) = R(r) \cdot \Phi(\varphi)$ eingesetzt in die Differentialgleichung, ergibt die beiden gewöhnlichen Differentialgleichungen

$$r^2 R'' \Phi + r R' \Phi + R \Phi'' = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{r^2 R'' + r R'}{R} = -\frac{\Phi''}{\Phi} =: \lambda$$

Da $\Phi(\varphi)$ im Kreisring 2π -periodisch sein muss ($\Phi(0) = \Phi(2\pi)$), erhält man nichttriviale Lösungen $\Phi(\varphi)$ nur für $\lambda \geq 0$, nämlich für $\lambda_0 = 0$ und $\lambda_k = k^2$:

$$\Phi_0(\varphi) = a_0, \quad \Phi_k(\varphi) = a_k \sin(k\varphi) + b_k \cos(k\varphi), \quad k = 1, 2, \dots$$

Setzt man $\lambda_0 = 0$ und $\lambda_k = k^2$ in die Differentialgleichung für $R(r)$ ein, so erhält man dort die Lösungen

$$R_0(r) = c_0 + d_0 \ln r, \quad R_k(r) = c_k r^k + d_k r^{-k}.$$

Durch Superposition ergibt sich aus dem Produktansatz damit die Lösungsdarstellung im Kreisring

$$u(r, \varphi) = A_0 + B_0 \ln r + \sum_{k=1}^{\infty} (A_k r^k + C_k r^{-k}) \cos(k\varphi) + (B_k r^k + D_k r^{-k}) \sin(k\varphi).$$

Die Randbedingung

$$\begin{aligned} u(2, \varphi) &= \cos(\varphi) \\ &= A_0 + B_0 \ln 2 + \sum_{k=1}^{\infty} (A_k 2^k + C_k 2^{-k}) \cos(k\varphi) + (B_k 2^k + D_k 2^{-k}) \sin(k\varphi) \end{aligned}$$

ergibt $A_0 + B_0 \ln 2 = 0$, $2A_1 + C_1/2 = 1$,

sonst $A_k 2^k + C_k 2^{-k} = 0 = B_k 2^k + D_k 2^{-k}$.

Die Randbedingung

$$\begin{aligned} u(3, \varphi) &= 1 + \frac{65}{144} \sin(2\varphi) \\ &= A_0 + B_0 \ln 3 + \sum_{k=1}^{\infty} (3^k A_k + 3^{-k} C_k) \cos(k\varphi) + (3^k B_k + 3^{-k} D_k) \sin(k\varphi) \end{aligned}$$

ergibt $A_0 + B_0 \ln 3 = 1$, $9B_2 + \frac{D_2}{9} = \frac{65}{144}$,

sonst $3^k A_k + 3^{-k} C_k = 0 = 3^k B_k + 3^{-k} D_k$.

Lösen des Gleichungssystems für A_0, B_0 :

$$\begin{pmatrix} 1 & \ln 2 \\ 1 & \ln 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_0 \\ B_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow A_0 = \frac{-\ln 2}{\ln 3 - \ln 2}, \quad B_0 = \frac{1}{\ln 3 - \ln 2}$$

Die Koeffizientenmatrizen für $k \geq 1$ sind regulär, denn

$$\det \begin{pmatrix} 2^k & 2^{-k} \\ 3^k & 3^{-k} \end{pmatrix} = \frac{2^k}{3^k} - \frac{3^k}{2^k} = \left(\frac{2}{3}\right)^k \left(1 - \left(\frac{9}{4}\right)^k\right) \neq 0$$

Man erhält nur die von 0 verschiedenen Koeffizienten

$$\begin{pmatrix} 2 & 1/2 \\ 3 & 1/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \\ C_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow A_1 = -\frac{2}{5}, \quad C_1 = \frac{18}{5}$$

$$\begin{pmatrix} 4 & 1/4 \\ 9 & 1/9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_2 \\ D_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 65/144 \end{pmatrix} \Rightarrow B_2 = \frac{1}{16}, \quad D_2 = -1$$

Damit lautet die Lösung

$$u(r, \varphi) = \frac{\ln r - \ln 2}{\ln 3 - \ln 2} + \left(\frac{18}{5r} - \frac{2r}{5}\right) \cos \varphi + \left(\frac{r^2}{16} - \frac{1}{r^2}\right) \sin(2\varphi).$$

Umwandlung in kartesische Koordinaten $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$ mit $\sin(2\varphi) = 2 \sin(\varphi) \cos(\varphi)$

Man erhält so z.B.: $r^2 \sin(2\varphi) = 2r \sin(\varphi) r \cos(\varphi) = 2xy$

$$u(x, y) = \frac{\ln \sqrt{x^2 + y^2} - \ln 2}{\ln 3 - \ln 2} + \frac{18x}{5(x^2 + y^2)} - \frac{2x}{5} + \frac{xy}{8} - \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2}.$$

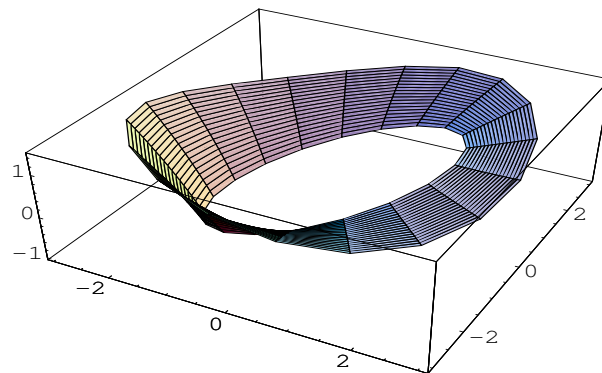


Bild 15 Lösung $u(r, \varphi)$

Lösung 16:

a) Für die Koordinaten

$$\xi = x \cos \varphi + y \sin \varphi \quad \text{und} \quad \eta = -x \sin \varphi + y \cos \varphi$$

erhält man:

$$\xi_x = \cos \varphi, \quad \eta_x = -\sin \varphi, \quad \xi_y = \sin \varphi, \quad \eta_y = \cos \varphi.$$

Nach der Kettenregel gilt daher

$$\begin{aligned} u_x &= u_\xi \xi_x + u_\eta \eta_x = u_\xi \cos \varphi - u_\eta \sin \varphi \\ u_{xx} &= (u_{\xi\xi} \cos \varphi - u_{\xi\eta} \sin \varphi) \cos \varphi - (u_{\eta\xi} \cos \varphi - u_{\eta\eta} \sin \varphi) \sin \varphi \\ &= u_{\xi\xi} \cos^2 \varphi - 2u_{\xi\eta} \sin \varphi \cos \varphi + u_{\eta\eta} \sin^2 \varphi \\ u_y &= u_\xi \xi_y + u_\eta \eta_y = u_\xi \sin \varphi + u_\eta \cos \varphi \\ u_{yy} &= (u_{\xi\xi} \sin \varphi + u_{\xi\eta} \cos \varphi) \sin \varphi + (u_{\eta\xi} \sin \varphi + u_{\eta\eta} \cos \varphi) \cos \varphi \\ &= u_{\xi\xi} \sin^2 \varphi + 2u_{\xi\eta} \sin \varphi \cos \varphi + u_{\eta\eta} \cos^2 \varphi \\ &\Rightarrow u_{xx} + u_{yy} = u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta}. \end{aligned}$$

b) Die Mittelwerteigenschaft für harmonische Funktionen u im $\mathbb{R}^2$ besagt, dass sich der Funktionswert von u im Mittelpunkt $\mathbf{x}_0$ eines Kreises vom Radius R berechnen lässt durch Integration längs des Kreisrandes

$$u(\mathbf{x}_0) = \frac{1}{2\pi R} \int_{\|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0\|=R} u(\mathbf{x}) \, ds.$$

Für den in der Aufgabenstellung vorliegenden Fall $\mathbf{x}_0 = (1, 1)$ und $R = 5$ berechnen wir das Kurvenintegral 1. Art durch Parametrisierung des Kreisrandes in Polarkoordinaten

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \mathbf{c}(\varphi) = \begin{pmatrix} 5 \cos \varphi + 1 \\ 5 \sin \varphi + 1 \end{pmatrix} \\ &\Rightarrow \|\dot{\mathbf{c}}(\varphi)\| = 5 \quad \Rightarrow \quad ds = 5d\varphi. \\ u(1, 1) &= \frac{1}{10\pi} \int_0^{2\pi} 5(5 \cos \varphi + 1)(5 \sin \varphi + 1) \, d\varphi \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} 25 \cos \varphi \sin \varphi + 5 \cos \varphi + 5 \sin \varphi + 1 \, d\varphi \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} 1 \, d\varphi = 1. \end{aligned}$$

Bemerkung:

$u(x, y) = xy$ erfüllt $u_{xx} + u_{yy} = 0$ und löst daher die Randwertaufgabe selbst. Es gilt also $u(1, 1) = 1 \cdot 1 = 1$.

Lösung 17:

Der Produktansatz $u(r, \varphi) = R(r) \cdot \Phi(\varphi)$ eingesetzt in die Differentialgleichung, ergibt die beiden gewöhnlichen Differentialgleichungen

$$r^2 R'' \Phi + r R' \Phi + R \Phi'' = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{r^2 R'' + r R'}{R} = -\frac{\Phi''}{\Phi} =: \lambda$$

Der Produktansatz $u(r, \varphi) = R(r) \cdot \Phi(\varphi)$ eingesetzt in die Randbedingungen

$$0 = u(r, 0) = R(r) \Phi(0), \quad 0 = u(r, \pi) = R(r) \Phi(\pi)$$

ergibt nur nichttriviale Lösungen u (R darf nicht die Nullfunktion sein) für

$$\Phi(0) = 0 = \Phi(\pi).$$

Damit erhält man für Φ nur für $\lambda > 0$ nichttriviale Lösungen:

$$\Phi(\varphi) = a \sin(\sqrt{\lambda} \varphi) + b \cos(\sqrt{\lambda} \varphi).$$

Insbesondere ergibt sich aus den Randbedingungen

$$0 = \Phi(0) = a \sin(\sqrt{\lambda} \cdot 0) + b \cos(\sqrt{\lambda} \cdot 0) = b,$$

$$0 = \Phi(\pi) = a \sin(\sqrt{\lambda} \cdot \pi).$$

Wegen $a \neq 0$, sonst wäre Φ die Nullfunktion, muss gelten

$$\sqrt{\lambda} \cdot \pi = k\pi \Rightarrow \sqrt{\lambda} = k \Rightarrow \lambda_k = k^2 \Rightarrow \Phi_k(\varphi) = a_k \sin(k\varphi), \quad k = 1, 2, \dots$$

Setzt man $\lambda_k = k^2$ in die Differentialgleichung für $R(r)$ ein, so erhält man dort die Lösungen

$$R_k(r) = c_k r^k + d_k r^{-k}.$$

Hier muss noch $d_k = 0$ gesetzt werden, da die Lösung sonst im Nullpunkt, der hier zum Definitionsbereich gehört, eine Singularität besäße.

Durch Superposition ergibt sich aus dem Produktansatz damit die Lösungsdarstellung

$$u(r, \varphi) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k r^k \sin(k\varphi).$$

Die noch nicht verwendeten Randbedingung ergibt

$$u(6, \varphi) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k 6^k \sin(k\varphi) = \left| \varphi - \frac{\pi}{2} \right| - \frac{\pi}{2}.$$

Die Randfunktion muss also in eine 2π -periodische ungerade sin-Reihe entwickelt werden. Man berechnet A_k aus den Fourier-Koeffizienten

$$\begin{aligned} c_k &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \left(\left| \varphi - \frac{\pi}{2} \right| - \frac{\pi}{2} \right) \sin(k\varphi) d\varphi \\ &= \frac{2}{\pi} \left(\int_0^{\pi/2} -\varphi \sin(k\varphi) d\varphi + \int_{\pi/2}^\pi (\varphi - \pi) \sin(k\varphi) d\varphi \right) \\ &= -\frac{4}{\pi k^2} \sin\left(\frac{k\pi}{2}\right) \end{aligned}$$

durch $A_k 6^k = c_k \Rightarrow A_k = c_k 6^{-k}$. Die Lösung des Ausgangsproblems lautet mit den obigen Fourkoeffizienten also:

$$u(r, \varphi) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \left(\frac{r}{6}\right)^k \sin(k\varphi).$$

Da u harmonisch und nicht konstant ist, werden Maximum und Minimum nur auf dem Rand angenommen, können also aus den Randbedingungen abgelesen werden.

Der Maximalwert ist damit gleich 0.

Der Minimalwert wird im Punkt $(r, \varphi) = \left(6, \frac{\pi}{2}\right)$ angenommen

$$u_{\min} = u\left(6, \frac{\pi}{2}\right) = \left| \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} \right| - \frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{2}.$$

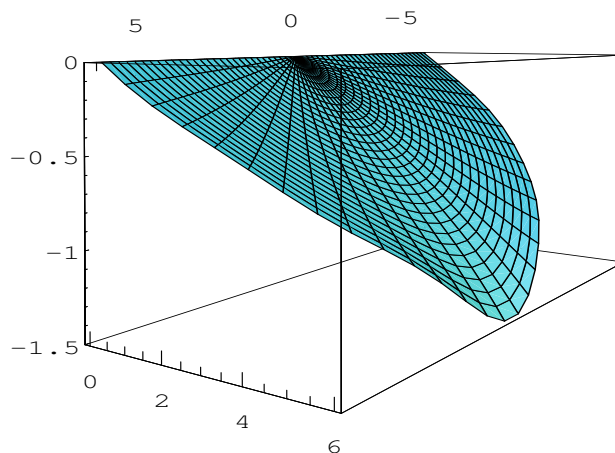


Bild 17 Lösung $u(r, \varphi)$

Lösung 18:

Der Produktansatz $u(x, t) = X(x)T(t)$ eingesetzt in die Differentialgleichung, ergibt

$$\frac{T'(t)}{T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} =: -\lambda = (\text{konst}).$$

Man erhält die beiden gewöhnlichen Differentialgleichungen

$$T' + \lambda T = 0 \quad \text{und} \quad X'' + \lambda X = 0.$$

Die Randbedingungen

$$0 = u(0, t) = X(0)T(t) \quad \text{und} \quad 0 = u(4, t) = X(4)T(t)$$

liefern $X(0) = 0 = X(4)$.

Die gewöhnliche Randeigenwertaufgabe in X besitzt nur für $\lambda > 0$ nichttriviale Lösungen:

$$X(x) = a \cos(\sqrt{\lambda}x) + b \sin(\sqrt{\lambda}x).$$

Einsetzen des Randwertes $X(0) = 0$ ergibt $a = 0$ und $X(4) = 0$ liefert die Eigenwerte

$$\lambda_k = \frac{k^2 \pi^2}{16}$$

mit $k \geq 1$ und zugehörigen Eigenfunktionen

$$X_k(x) = b_k \sin \frac{k\pi x}{4}.$$

Setzt man λ_k in die Differentialgleichung für T ein, so erhält man dort die Lösungen

$$T_k(t) = \exp\left(-\frac{k^2 \pi^2 t}{16}\right).$$

Aus dem Produktansatz und Superposition ergibt sich damit die Lösung

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin \frac{k\pi x}{4} \exp\left(-\frac{k^2 \pi^2 t}{16}\right).$$

Mit der noch nicht verwendeten Anfangsbedingung werden die fehlenden Koeffizienten b_k berechnet. Aus dem Bild in der Aufgabenstellung ergibt sich die Anfangsvorgabe

$$u_0(x) = \begin{cases} x & \text{für } 0 \leq x \leq 2, \\ 4 - x & \text{für } 2 \leq x \leq 4. \end{cases}$$

Berechnung der Fourier-Koeffizienten mit $T = 8$ und $\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{\pi}{4}$:

$$\begin{aligned}
b_k &= \frac{1}{2} \int_0^4 u_0(x) \sin\left(\frac{k\pi x}{4}\right) dx \\
&= \frac{1}{2} \int_0^2 x \sin\left(\frac{k\pi x}{4}\right) dx + \frac{1}{2} \int_2^4 (4-x) \sin\left(\frac{k\pi x}{4}\right) dx \\
&= -\frac{2x}{k\pi} \cos\frac{k\pi x}{4} \Big|_0^2 + \frac{2}{k\pi} \int_0^2 \cos\left(\frac{k\pi x}{4}\right) dx \\
&\quad - \frac{2(4-x)}{k\pi} \cos\frac{k\pi x}{4} \Big|_2^4 - \frac{2}{k\pi} \int_2^4 \cos\left(\frac{k\pi x}{4}\right) dx \\
&= \frac{8}{k^2\pi^2} \sin\frac{k\pi x}{4} \Big|_0^2 - \frac{8}{k^2\pi^2} \sin\frac{k\pi x}{4} \Big|_2^4 = \frac{16}{k^2\pi^2} \sin\frac{k\pi}{2}
\end{aligned}$$

Mathematica-Plotbefehl (ohne u_0)

```

Plot[{Sum[16 Sin[k*Pi/2]/(k^2 Pi^2) Sin[k*Pi*x/4], {k, 1, 1}],
      Sum[16 Sin[k*Pi/2]/(k^2 Pi^2) Sin[k*Pi*x/4], {k, 1, 3}],
      Sum[16 Sin[k*Pi/2]/(k^2 Pi^2) Sin[k*Pi*x/4], {k, 1, 5}],
      Sum[16 Sin[k*Pi/2]/(k^2 Pi^2) Sin[k*Pi*x/4], {k, 1, 7}],
      Sum[16 Sin[k*Pi/2]/(k^2 Pi^2) Sin[k*Pi*x/4], {k, 1, 9}]],
{x, 0, 4}, AxesLabel -> {"x", "u(x,0)"}, PlotRange -> {0, 2.2}]

```

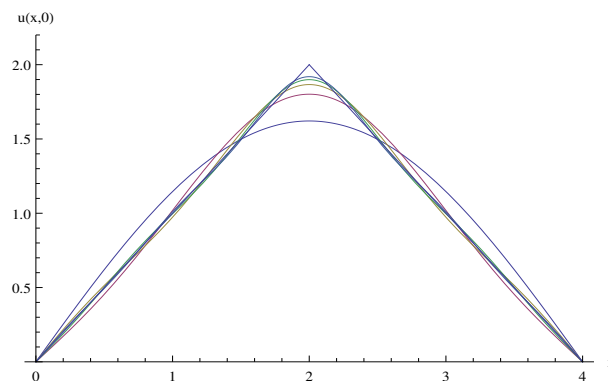


Bild 18 a) u_0 und Näherungslösungen $u_N(x,0) = \sum_{k=1}^N b_k \sin \frac{k\pi x}{4}$, $N = 1, 3, 5, 7, 9$

MATLAB-Plotbefehl

```

ezmesh('x','t','16*(sin(pi*x/4)*exp(-pi^2*t/16)
-sin(3*pi*x/4)*exp(-9*pi^2*t/16)/9

```


$$\begin{aligned}
 & +\sin(5\pi x/4)\exp(-25\pi^2 t/16)/25 \\
 & -\sin(7\pi x/4)\exp(-49\pi^2 t/16)/49 \\
 & +\sin(9\pi x/4)\exp(-81\pi^2 t/16)/81)/\pi^2', [0,1,0,4], 50)
 \end{aligned}$$

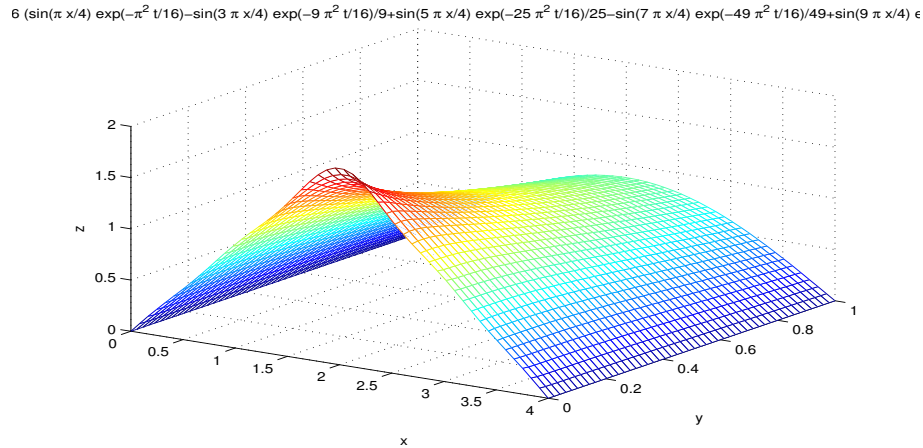


Bild 18 b) Näherungslösung $u_9(x, t) = \sum_{k=1}^9 b_k \sin \frac{k\pi x}{4} \exp\left(-\frac{k^2\pi^2}{16}t\right)$

Nach dem Maximumprinzip gilt $\max_{(x,t) \in [0,4] \times [0,T]} u(x, t) = \max_{x \in [0,4]} u_0(x) = 2$.

Lösung 19:

a) Aus dem Bild in der Aufgabenstellung ergibt sich die Anfangsvorgabe

$$u_0(x) = \begin{cases} 3-x & \text{für } 0 \leq x \leq 3, \\ x-3 & \text{für } 3 < x \leq 6. \end{cases}$$

b) Das Problem mit den inhomogenen Randbedingungen

$u(0, t) = \varphi_0(t) = 3$ und $u(6, t) = \varphi_1(t) = 3$ wird durch

$$v(x, t) := u(x, t) - \left(\varphi_0(t) + \frac{x}{6}(\varphi_1(t) - \varphi_0(t))\right) = u(x, t) - 3.$$

in eines mit homogenen Randbedingungen transformiert.

Da sich die Differentialgleichung unter der Transformation, wegen $u_t = v_t$ und $u_{xx} = v_{xx}$, nicht ändert, lautet das transformierte Problem in v :

$$\begin{aligned}
 v_t &= 4v_{xx} && \text{für } 0 < x < 6, \quad 0 < t \\
 v(0, t) &= 0 && \text{für } 0 \leq t \\
 v(6, t) &= 0 \\
 v(x, 0) &= u_0(x) - 3 && \text{für } 0 \leq x \leq 6.
 \end{aligned}$$

c) Die Lösungsdarstellung lautet

$$v(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin \frac{k\pi x}{6} \exp \left(-\frac{k^2\pi^2}{9} t \right) .$$

Denn aus dem Produktansatz $u(x, t) = X(x)T(t)$ ergibt sich:

$$X'' + \lambda X = 0, \quad X(0) = 0, \quad X(6) = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_k = \frac{k^2\pi^2}{36}, \quad X_k(x) = b_k \sin \frac{k\pi x}{6}$$

$$T' + 4\lambda_k T = 0 \quad \Rightarrow \quad T_k(t) = \exp \left(-\frac{k^2\pi^2 t}{9} \right) .$$

Mit der Anfangsbedingung werden die fehlenden Koeffizienten b_k berechnet.

$$v(x, 0) = u_0(x) - 3 = \begin{cases} -x & \text{für } 0 \leq x \leq 3, \\ x - 6 & \text{für } 3 < x \leq 6. \end{cases}$$

$$\begin{aligned} b_k &= \frac{1}{3} \int_0^6 (u_0(x) - 3) \sin \left(\frac{k\pi x}{6} \right) dx \\ &= \frac{1}{3} \int_0^3 -x \sin \left(\frac{k\pi x}{6} \right) dx + \frac{1}{3} \int_3^6 (x - 6) \sin \left(\frac{k\pi x}{6} \right) dx \\ &= \frac{2x}{k\pi} \cos \frac{k\pi x}{6} \Big|_0^3 - \frac{2}{k\pi} \int_0^3 \cos \left(\frac{k\pi x}{6} \right) dx \\ &\quad - \frac{2(x - 6)}{k\pi} \cos \frac{k\pi x}{6} \Big|_3^6 + \frac{2}{k\pi} \int_3^6 \cos \left(\frac{k\pi x}{6} \right) dx \\ &= \frac{6}{k\pi} \cos \frac{k\pi}{2} - \frac{12}{k^2\pi^2} \sin \frac{k\pi}{2} - \frac{6}{k\pi} \cos \frac{k\pi}{2} - \frac{12}{k^2\pi^2} \sin \frac{k\pi}{2} \\ &= -\frac{24}{k^2\pi^2} \sin \frac{k\pi}{2} \end{aligned}$$

d) Das Ausgangsproblems wird dann gelöst durch:

$$u(x, t) = 3 - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{24}{k^2 \pi^2} \sin \frac{k\pi}{2} \sin \frac{k\pi x}{6} \exp \left(-\frac{k^2 \pi^2}{9} t \right)$$

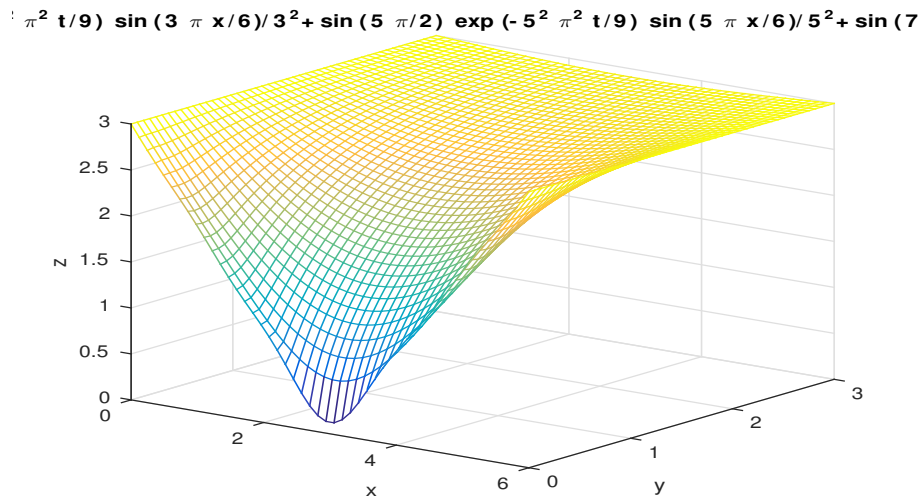


Bild 19 Näherung für $u(x, t)$ mit den ersten neun Summanden der obigen Reihe

MATLAB-Plotbefehl

```
ezmesh('x','t','3-24*(
sin(pi/2)*exp(-1^2*pi^2*t/9)*sin(pi*x/6)/1^2
+sin(3*pi/2)*exp(-3^2*pi^2*t/9)*sin(3*pi*x/6)/3^2
+sin(5*pi/2)*exp(-5^2*pi^2*t/9)*sin(5*pi*x/6)/5^2
+sin(7*pi/2)*exp(-7^2*pi^2*t/9)*sin(7*pi*x/6)/7^2
+sin(9*pi/2)*exp(-9^2*pi^2*t/9)*sin(9*pi*x/6)/9^2)/pi^2',[0,3,0,6])
```

e) Nach dem Maximumprinzip wird der Maximalwert von u auf dem Rand von G bzw. für $t = 0$ angenommen. Damit gilt

$$\max_{(x,t) \in G} u(x, t) = 3.$$

Lösung 20:

a) Für die Dimension $n = 1$ lautet die Fundamentallösung der Wärmeleitungsgleichung

$$\Phi(x, t) = \begin{cases} \frac{e^{-x^2/(4t)}}{\sqrt{4\pi t}} & \text{für } x \in \mathbb{R} \text{ und } t > 0, \\ 0 & \text{für } x \in \mathbb{R} \text{ und } t < 0. \end{cases}$$

Mit der Fundamentallösung kann die Lösung der Wärmeleitungsgleichung für $t > 0$ dargestellt werden durch

$$\begin{aligned}
 u(x, t) &= \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(x - y, t) \cdot u(y, 0) \, dy = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-(x-y)^2/(4t)}}{\sqrt{4\pi t}} \cdot e^{4y} \, dy \\
 &= \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(\frac{-(x-y)^2 + 16ty}{4t}\right) \, dy \\
 &= \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(\frac{-(y^2 - 2(x+8t)y + x^2)}{4t}\right) \, dy \\
 &= \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(\frac{-((y - (x+8t))^2 + x^2 - (x+8t)^2)}{4t}\right) \, dy \\
 &= e^{4x+16t} \cdot \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{(y - (x+8t))^2}{4t}\right) \, dy \\
 &= e^{4x+16t} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(y - (x+8t), t) \, dy = e^{4x+16t} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(p, t) \, dp \\
 &= e^{4x+16t}
 \end{aligned}$$

b) Der Produktansatz $u(x, t) = X(x)T(t)$ eingesetzt in die Differentialgleichung, ergibt

$$\frac{T'(t)}{T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} =: \mu = (\text{konst}).$$

Man erhält die beiden gewöhnlichen Differentialgleichungen

$$T' - \mu T = 0 \quad \Rightarrow \quad T(t) = Ce^{\mu t},$$

$$X'' - \mu X = 0 \quad \Rightarrow \quad X(x) = a_1 e^{\sqrt{\mu}x} + a_2 e^{-\sqrt{\mu}x}$$

und damit die Lösung aus dem Produktansatz

$$u(x, t) = Ce^{\mu t} (a_1 e^{\sqrt{\mu}x} + a_2 e^{-\sqrt{\mu}x}).$$

Einsetzen der Anfangsbedingung und Koeffizientenvergleich ergibt

$$e^{4x} = u(x, 0) = C (a_1 e^{\sqrt{\mu}x} + a_2 e^{-\sqrt{\mu}x}) \quad \Rightarrow \quad Ca_1 = 1, \sqrt{\mu} = 4, a_2 = 0.$$

Die Lösung aus dem Produktansatz lautet also

$$u(x, t) = e^{4x+16t}.$$

Lösung 21:

Der Produktansatz $u(x, y, t) = X(x)Y(y)T(t)$ eingesetzt in die Differentialgleichung $u_t = u_{xx} + u_{yy}$ ergibt

$$\frac{T'(t)}{T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} + \frac{Y''(y)}{Y(y)} =: -\lambda = (\text{konst}) .$$

Für T erhält man eine gewöhnliche Differentialgleichung:

$$T' + \lambda T = 0 \quad \Rightarrow \quad T(t) = K e^{-\lambda t} .$$

Nach weiterer Trennung ergeben sich gewöhnliche Differentialgleichungen in X und Y

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = -\frac{Y''(y)}{Y(y)} - \lambda = -\mu = (\text{konst}) .$$

Die Randbedingungen

$$\begin{aligned} 0 &= u(0, y, t) = X(0)Y(y)T(t) , \\ 0 &= u(\pi, y, t) = X(\pi)Y(y)T(t) , \\ 0 &= u(x, 0, t) = X(x)Y(0)T(t) , \\ 0 &= u(x, \pi, t) = X(x)Y(\pi)T(t) \end{aligned}$$

liefern $X(0) = 0 = X(\pi)$ und $Y(0) = 0 = Y(\pi)$.

Die gewöhnliche Randwertaufgabe in X

$$X''(x) + \mu X(x) = 0 \quad \text{mit} \quad X(0) = 0 = X(\pi)$$

besitzt nur nichttriviale Lösungen für $\mu > 0$

$$X(x) = a \cos(\sqrt{\mu}x) + b \sin(\sqrt{\mu}x) .$$

Einsetzen des Randwertes $X(0) = 0$ ergibt $a = 0$ und $X(\pi) = 0$ liefert $\mu_k = k^2$ mit $k \geq 1$ und $X_k(x) = b_k \sin(kx)$.

Die gewöhnliche Randwertaufgabe in Y

$$Y''(y) + (\lambda - \mu)Y(y) = 0 \quad \text{mit} \quad Y(0) = 0 = Y(\pi)$$

besitzt nur nichttriviale Lösungen für $\lambda - \mu > 0$

$$Y(y) = c \cos(\sqrt{\lambda - \mu}y) + d \sin(\sqrt{\lambda - \mu}y) .$$

Einsetzen des Randwertes $Y(0) = 0$ ergibt $c = 0$ und $Y(\pi) = 0$ liefert $\lambda_{k,j} - \mu_k = j^2$ mit $j \geq 1$ und $Y_j(y) = d_j \sin(jy)$.

Setzt man $\lambda_{k,j}$ in die Differentialgleichung für T ein, so erhält man dort die Lösungen

$$T_{k,j}(t) = K e^{-(k^2 + j^2)t} .$$

Aus dem Produktansatz und Superposition ergibt sich damit die Lösung

$$u(x, y, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} A_{k,j} e^{-(k^2+j^2)t} \sin(kx) \sin(jy) .$$

Mit der Anfangsvorgabe ergibt sich

$$5 \sin 3x \sin 4y - 8 \sin x \cos x \sin y \cos y = u(x, y, 0) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} A_{k,j} \sin(kx) \sin(jy) .$$

Wegen $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$ gilt

$$-8 \sin x \cos x \sin y \cos y = -2 \sin 2x \sin 2y$$

und man erhält mit einem Koeffizientenvergleich $A_{3,4} = 5$, $A_{2,2} = -2$ und $A_{k,j} = 0$ sonst, also die Lösung

$$u(x, y, t) = 5e^{-25t} \sin(3x) \sin(4y) - 2e^{-8t} \sin(2x) \sin(2y) .$$

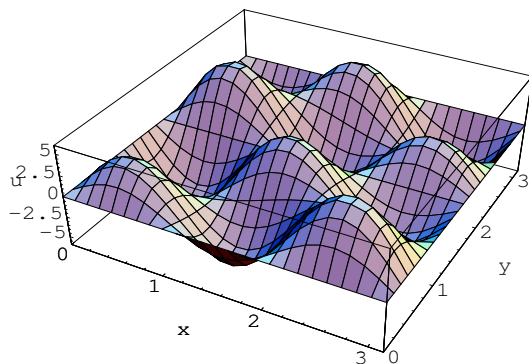


Bild 21 a) $u(x, y, 0)$

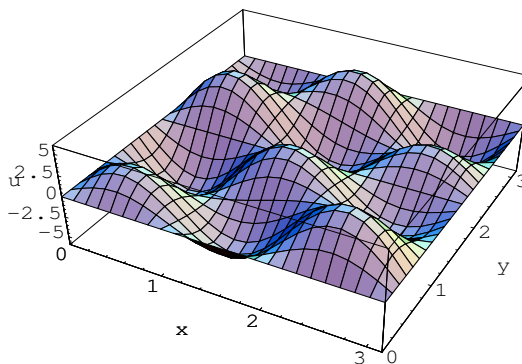


Bild 21 b) $u(x, y, 1/100)$

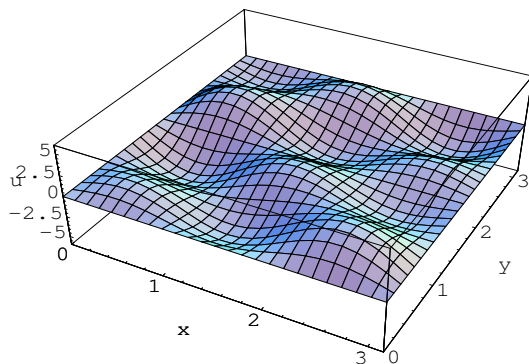


Bild 21 c) $u(x, y, 1/25)$

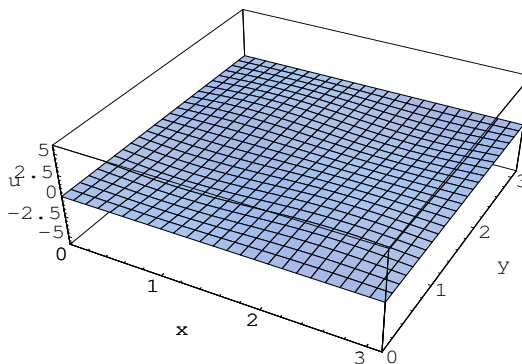


Bild 21 d) $u(x, y, 1/5)$

Wegen $\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-25t} = 0 = \lim_{t \rightarrow \infty} e^{-8t}$ gilt $\lim_{t \rightarrow \infty} u(x, y, t) = 0$.

Lösung 22:

- a) Der Produktansatz $u(x, t) = X(x) \cdot T(t)$ in Verbindung mit der Randbedingung $u(0, t) = 5 \sin(3t)$ ergibt $T(t) = \frac{5}{X(0)} \sin(3t)$. Setzt man dies in die Differentialgleichung ein, so erhält man

$$\begin{aligned} 0 &= 4u_{tt} + 4u_t + u - u_{xx} \\ &= -4 \frac{45X(x)}{X(0)} \sin(3t) + 4 \frac{15X(x)}{X(0)} \cos(3t) + \frac{5X(x)}{X(0)} \sin(3t) - \frac{5X''(x)}{X(0)} \sin(3t) \\ &= \underbrace{\left(-\frac{175X(x)}{X(0)} - \frac{5X''(x)}{X(0)} \right)}_{=0} \sin(3t) + \underbrace{\left(\frac{60X(x)}{X(0)} \right)}_{=0} \cos(3t). \end{aligned}$$

Einzige Lösung ist damit $X \equiv 0$. Dies führt auf $u \equiv 0$, der Produktansatz liefert hier also keine Lösung.

- b) Der Lösungsansatz $u(x, t) = 5e^{-ax} \sin(3t - bx)$ erfüllt die Randbedingungen und $a > 0$ sorgt für die Beschränktheit von u für $x \rightarrow \infty$. Eingesetzt in die Differentialgleichung ergibt sich

$$\begin{aligned} 0 &= 4u_{tt} + 4u_t + u - u_{xx} \\ &= 5e^{-ax} \left\{ \sin(3t - bx) \underbrace{((b^2 - a^2) - 35)}_{=0} + \cos(3t - bx) \underbrace{(12 - 2ab)}_{=0} \right\}. \end{aligned}$$

Das resultierende nichtlineare Gleichungssystem

$$ab = 6 \quad \wedge \quad b^2 - a^2 = 35.$$

$$\Rightarrow a = \frac{6}{b} \Rightarrow 35 = b^2 - a^2 = b^2 - \frac{36}{b^2}$$

$$\Rightarrow 0 = b^4 - 35b^2 - 36 = (b^2 + 1)(b^2 - 36)$$

besitzt die Lösungen $a = 1$, $b = 6$ und $a = -1$, $b = -6$.

Letztere führen auf unbeschränktes u für $x \rightarrow \infty$ und werden daher ausgeschlossen.

Damit lautet die Lösung der Telegraphengleichung

$$u(x, t) = 5e^{-x} \sin(3t - 6x).$$

Lösung 23:

Ein Vergleich von $u_{tt} = c^2 u_{xx}$ mit $u_{tt} = 16u_{xx}$ ergibt $c = 4$.

- a) Abhängigkeitsbereich $(x_0, t_0) = (2, 1)$: $A = [x_0 - ct_0, x_0 + ct_0] = [-2, 6]$

b)

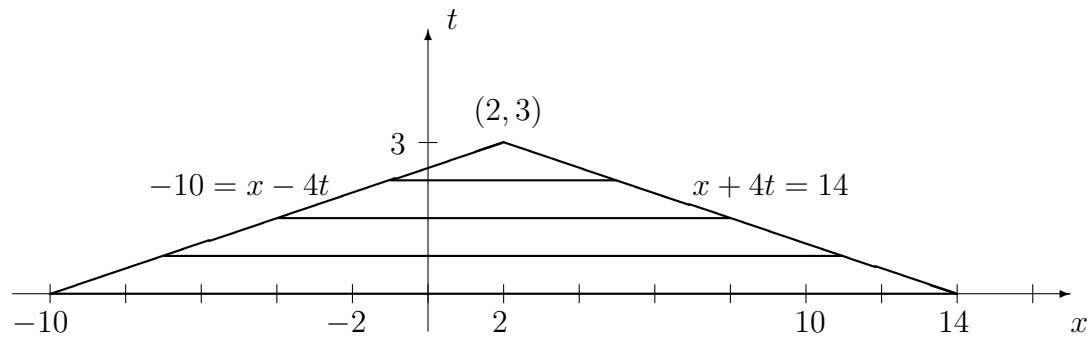


Bild 23 b) Bestimmungsbereich für $t \geq 0$

c) Mit der d' Alembertschen Lösungsformel erhält man

$$u(x, t) = \frac{1}{2 \cdot 4} \int_{x-4t}^{x+4t} \cos y \, dy = \frac{1}{8} (\sin(x + 4t) - \sin(x - 4t)) .$$

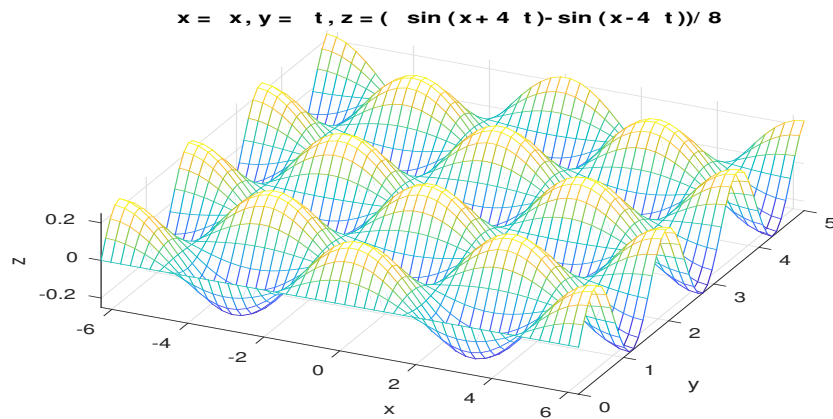


Bild 23 c) Lösung $u(x, y)$

Lösung 24:

Ein Vergleich von $u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0$ mit $u_{tt} - 4u_{xx} = 0$ ergibt $c = 2$.

a) Abhängigkeitsbereich für $(x_0, t_0) = (3, 1)$: $[x_0 - ct_0, x_0 + ct_0] = [1, 5]$

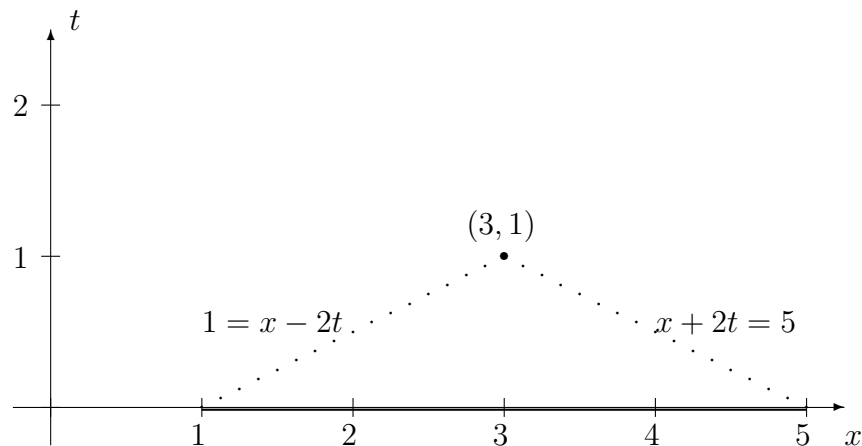


Bild 24 a) Abhängigkeitsbereich $[1, 5]$ für $(x_0, t_0) = (3, 1)$

b) Im Bestimmtheitsbereich gilt: $x - 2t, x + 2t \in [0, 6]$

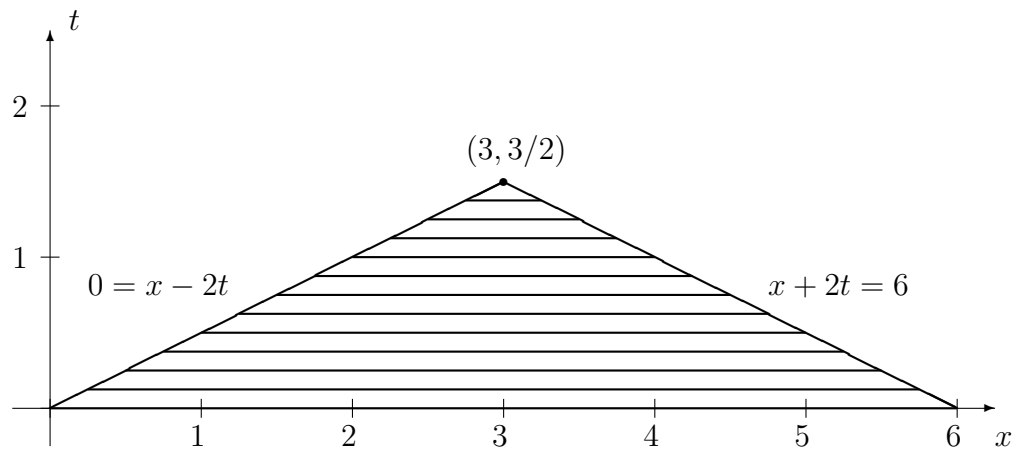


Bild 24 b) Bestimmtheitsbereich für $t \geq 0$

c) Die Reflexionsmethode setzt die Anfangsfunktionen ungerade fort, so dass man ein reines Anfangswertproblem mit ungeraden Anfangsfunktionen erhält, auf dass dann die d'Alembertsche Lösungsformel angewendet wird.

Die resultierende Lösungsformel lautet:

$$u(x, t) = \begin{cases} \frac{1}{2} (u_0(x + 2t) + u_0(x - 2t)) + \frac{1}{4} \int_{x-2t}^{x+2t} v_0(y) dy & , \quad 2t \leq x \\ \frac{1}{2} (u_0(x + 2t) - u_0(2t - x)) + \frac{1}{4} \int_{2t-x}^{x+2t} v_0(y) dy & , \quad x < 2t \end{cases}$$

(i) Bei der zu berechnenden Lösung handelt es sich um eine C^2 -Funktion, denn $u_0(x) = x^3 - x$ und $v_0(x) = 8x$ sind ungerade, also identisch mit ihren ungeraden Fortsetzungen.

Die Lösung des Anfangsrandwertproblem ist also die Einschränkung des (ungerade fortgesetzten) Anfangsproblems auf den '1. Quadranten'.

$$\begin{aligned}
 u(x, t) &= \begin{cases} \frac{1}{2} ((x+2t)^3 - (x+2t) + (x-2t)^3 - (x-2t)) \\ + \frac{1}{4} \int_{x-2t}^{x+2t} 8y \, dy, & 2t \leq x \\ \frac{1}{2} ((x+2t)^3 - (x+2t) - ((2t-x)^3 - (2t-x)) \\ + \frac{1}{4} \int_{2t-x}^{x+2t} 8y \, dy, & x < 2t \end{cases} \\
 u(x, t) &= \begin{cases} \frac{1}{2} ((x+2t)^3 + (x-2t)^3 - 2x) + y^2|_{x-2t}^{x+2t}, & 2t \leq x \\ \frac{1}{2} ((x+2t)^3 + (x-2t)^3 - 2x) + y^2|_{2t-x}^{x+2t}, & x < 2t \end{cases} \\
 &= \frac{1}{2} ((x+2t)^3 + (x-2t)^3 - 2x) + (x+2t)^2 - (x-2t)^2
 \end{aligned}$$

(ii)

$$\begin{aligned}
 u(x, t) &= \begin{cases} \frac{1}{2} (1 - \cos(x+2t) + 1 - \cos(x-2t)) & , \quad 2t \leq x \\ \frac{1}{2} (1 - \cos(x+2t) - (1 - \cos(2t-x))) & , \quad x < 2t \end{cases} \\
 &= \begin{cases} 1 - \frac{1}{2} (\cos(x+2t) + \cos(x-2t)) & , \quad 2t \leq x \\ -\frac{1}{2} (\cos(x+2t) - \cos(x-2t)) & , \quad x < 2t \end{cases}
 \end{aligned}$$

Die Lösung u ist in den Dreiecken $0 < 2t < x$ und $0 < x < 2t$ jeweils C^2 -Funktion und auf der Diagonalen $x = 2t$ stetig.

Die ersten partiellen Ableitungen sind für $x = 2t$ stetig:

$$\begin{aligned}
 u_x(x, t) &= \begin{cases} \frac{1}{2} (\sin(x+2t) + \sin(x-2t)) & , \quad 2t < x \\ \frac{1}{2} (\sin(x+2t) - \sin(x-2t)) & , \quad x < 2t, \end{cases} \\
 u_t(x, t) &= \begin{cases} \sin(x+2t) - \sin(x-2t) & , \quad 2t < x \\ \sin(x+2t) + \sin(x-2t) & , \quad x < 2t. \end{cases}
 \end{aligned}$$

u_{xx} ist auf $x = 2t$ unstetig:

$$u_{xx}(x, t) = \begin{cases} \frac{1}{2}(\cos(x + 2t) + \cos(x - 2t)) & , \quad 2t < x \\ \frac{1}{2}(\cos(x + 2t) - \cos(x - 2t)) & , \quad x < 2t. \end{cases}$$

Der Grund liegt darin, dass $u_0(x) = 1 - \cos x$, $x \geq 0$ ungerade fortgesetzt nur C^1 und nicht C^2 -Funktion (in $x = 0$) ist.

Lösung 25:

a) Der Produktansatz $u(x, t) = X(x) \cdot T(t)$ eingesetzt in die Differentialgleichung ergibt

$$\frac{T''(t)}{T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} =: -\lambda.$$

Man erhält die beiden gewöhnlichen Differentialgleichungen

$$T'' + \lambda T = 0 \quad \text{und} \quad X'' + \lambda X = 0.$$

Der Produktansatz $u(x, t) = X(x) \cdot T(t)$ eingesetzt in die Randbedingungen ergibt

$$0 = u(0, t) = X(0)T(t) \Rightarrow X(0) = 0$$

und

$$0 = u(1, t) = X(1)T(t) \Rightarrow X(1) = 0.$$

Die gewöhnliche Randeigenwertaufgabe für X besitzt somit die Eigenwerte

$$\lambda_k = k^2 \pi^2 \quad \text{mit} \quad k \in \mathbb{N},$$

und die zugehörigen Eigenlösungen sind gegeben durch

$$X_k(x) = a_k \sin(k\pi x), \quad a_k \in \mathbb{R}.$$

Setzt man λ_k in die Differentialgleichung für T ein, so erhält man dort die Lösungen

$$T_k(t) = \tilde{c}_k \cos(k\pi t) + \tilde{d}_k \sin(k\pi t).$$

Aus dem Produktansatz und Superposition ergibt sich damit die Lösung

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} (c_k \cos(k\pi t) + d_k \sin(k\pi t)) \sin(k\pi x).$$

Mit den noch nicht verwendeten Anfangsbedingungen werden die fehlenden Koeffizienten c_k und d_k bestimmt:

$$u(x, 0) = u_0(x) = 0 = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \sin(k\pi x) \quad \Rightarrow \quad c_k = 0,$$

$$u_t(x, 0) = v_0(x) = x^2(x - 1) = \sum_{k=1}^{\infty} \underbrace{d_k k \pi}_{=b_k} \sin(k\pi x)$$

mit

$$\begin{aligned} b_k &= 2 \int_0^1 x^2(x - 1) \sin(k\pi x) dx \\ &= -\frac{2x^2(x - 1) \cos(k\pi x)}{k\pi} \Big|_0^1 + 2 \int_0^1 \frac{(3x^2 - 2x) \cos(k\pi x)}{k\pi} dx \\ b_k &= \frac{2(3x^2 - 2x) \sin(k\pi x)}{(k\pi)^2} \Big|_0^1 - 2 \int_0^1 \frac{(6x - 2) \sin(k\pi x)}{(k\pi)^2} dx \\ &= \frac{2(6x - 2) \cos(k\pi x)}{(k\pi)^3} \Big|_0^1 - 2 \int_0^1 \frac{6 \cos(k\pi x)}{(k\pi)^3} dx \\ &= \frac{8 \cos(k\pi) + 4}{(k\pi)^3} = \frac{4(2(-1)^k + 1)}{(k\pi)^3}. \end{aligned}$$

Man erhält also $d_k = \frac{b_k}{k\pi}$.

b)

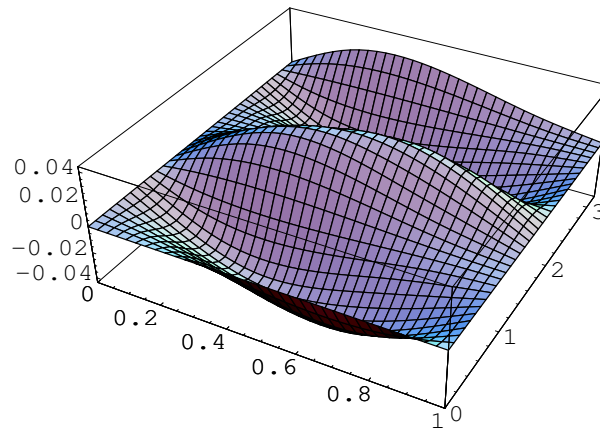


Bild 25 Lösung $u(x, t)$, $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq t \leq 3.2$

Lösung 26:

a) Die Anfangsrandwertaufgabe besitzt die Randbedingungen

$$\varphi_0(t) := u(0, t) = 0, \quad \varphi_1(t) := u(2, t) = 1.$$

Setze

$$\tilde{u}(x, t) = \varphi_0(t) + \frac{x}{2} (\varphi_1(t) - \varphi_0(t)) = \frac{x}{2}$$

und transformiere durch

$$v(x, t) := u(x, t) - \tilde{u}(x, t) = u(x, t) - x/2.$$

Die transformierte Anfangsrandwertaufgabe in v besitzt dann homogene Randbedingungen.

$$\begin{aligned} v_{tt} &= v_{xx}, & \text{für } 0 < x < 2 \text{ und } t > 0, \\ v(0, t) &= 0, & \text{für } t \geq 0, \\ v(2, t) &= 0, \\ v(x, 0) &= x(x-2)/4, & \text{für } 0 \leq x \leq 2, \\ v_t(x, 0) &= 0. \end{aligned}$$

- b) Die Lösungsdarstellung aus dem Produktansatz mit Superposition, die die Differentialgleichung und die Randbedingungen erfüllt, lautet:

$$v(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos\left(\frac{k\pi t}{2}\right) + b_k \sin\left(\frac{k\pi t}{2}\right) \right) \sin\left(\frac{k\pi x}{2}\right)$$

Aus den Anfangsbedingungen ergeben sich a_k und b_k

$$0 = v_t(x, 0) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k\pi b_k}{2} \sin\left(\frac{k\pi x}{2}\right) \Rightarrow b_k = 0$$

$$\frac{x(x-2)}{4} = v(x, 0) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin\left(\frac{k\pi x}{2}\right)$$

als Fourier-Koeffizienten einer ungeraden Fourierreihe mit der Periode $T = 4$ durch

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{4}{4} \int_0^2 \frac{x(x-2)}{4} \sin\left(\frac{k\pi x}{2}\right) dx \\ &= -\frac{x(x-2)}{4} \cdot \frac{2}{k\pi} \cos\left(\frac{k\pi x}{2}\right) \Big|_0^2 + \frac{2}{k\pi} \int_0^2 \frac{x-1}{2} \cos\left(\frac{k\pi x}{2}\right) dx \\ &= \frac{2(x-1)}{(k\pi)^2} \sin\left(\frac{k\pi x}{2}\right) \Big|_0^2 - \frac{2}{(k\pi)^2} \int_0^2 \sin\left(\frac{k\pi x}{2}\right) dx \\ &= \frac{4}{(k\pi)^3} \cos\left(\frac{k\pi x}{2}\right) \Big|_0^2 = \frac{4((-1)^k - 1)}{(k\pi)^3} \end{aligned}$$

c)

$$u(x, t) = \frac{x}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4((-1)^k - 1)}{(k\pi)^3} \cos\left(\frac{k\pi t}{2}\right) \sin\left(\frac{k\pi x}{2}\right)$$

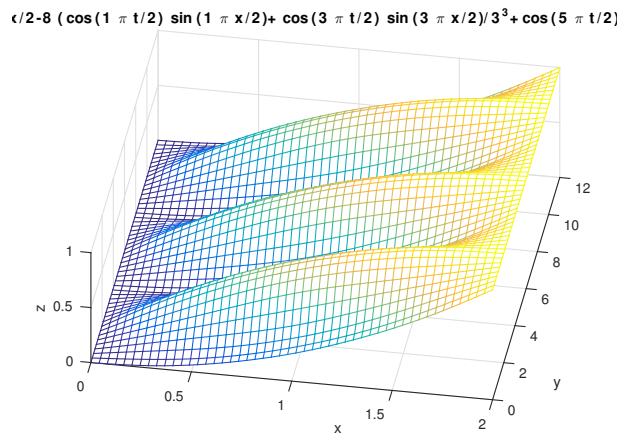


Bild 26 Lösung $u(x, t)$, $0 \leq x \leq 2$, $0 \leq t \leq 12$

Lösung 27:

Die Lösung des Problems erfolgt in drei Schritten:

1. Schritt

Das Problem mit den inhomogenen Randbedingungen

$u(0, t) = \varphi_0(t) := e^{-t}$ und $u(1, t) = \varphi_1(t) := -e^{-t}$ wird durch

$$v(x, t) := u(x, t) - (\varphi_0(t) + x(\varphi_1(t) - \varphi_0(t))) = u(x, t) - \underbrace{e^{-t}(1 - 2x)}_{=u^*(x, t)}$$

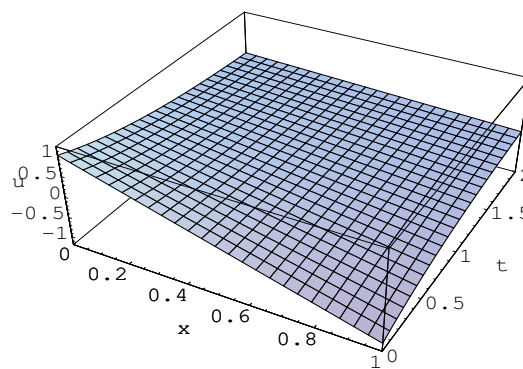


Bild 27 a) $u^*(x, t) = e^{-t}(1 - 2x)$

in eines mit homogenen Randbedingungen transformiert.

$$u_t = v_t + (2x - 1)e^{-t}, \quad u_{xx} = v_{xx}, \quad u_0(x) = u(x, 0) = v(x, 0) + 1 - 2x$$

Das transformierte Problem in v lautet dann

$$\begin{aligned} v_t &= v_{xx} + 3\pi^2 \sin 3\pi x \quad \text{für } 0 < x < 1, \quad 0 < t, \\ v(x, 0) &= v_0(x) := \begin{cases} -2x & , \quad 0 \leq x \leq 1/2 \\ 2x - 2 & , \quad 1/2 \leq x \leq 1 \end{cases}, \\ v(0, t) &= 0, \quad v(1, t) = 0 \quad \text{für } 0 \geq t. \end{aligned}$$

2. Schritt

Man löst das Problem mit homogener Differentialgleichung und inhomogener Anfangsbedingung

$$\begin{aligned} v_t &= v_{xx} \quad \text{für } 0 < x < 1, \quad 0 < t, \\ v(x, 0) &= v_0(x) := \begin{cases} -2x & , \quad 0 \leq x \leq 1/2 \\ 2x - 2 & , \quad 1/2 \leq x \leq 1 \end{cases}, \\ v(0, t) &= 0, \quad v(1, t) = 0 \quad \text{für } 0 \geq t. \end{aligned}$$

Die Lösung ist gegeben durch: $v^*(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k e^{-k^2 \pi^2 t} \sin(k\pi x)$

mit den Fourier-Koeffizienten

$$\begin{aligned} b_k &= 2 \int_0^1 v_0(x) \sin(k\pi x) dx \\ &= 2 \left\{ \int_0^{1/2} -2x \sin(k\pi x) dx + \int_{1/2}^1 (2x - 2) \sin(k\pi x) dx \right\} \\ &= -\frac{8}{k^2 \pi^2} \cdot \sin\left(\frac{k\pi}{2}\right). \end{aligned}$$

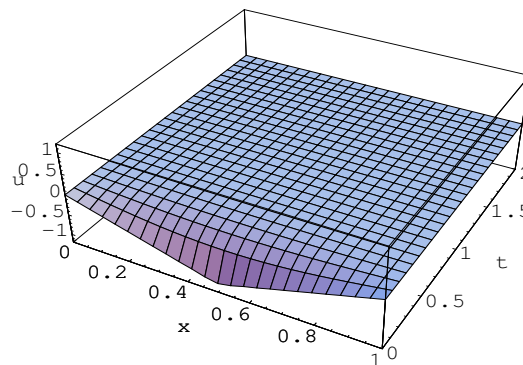


Bild 27 b)
$$v^*(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} -\frac{8}{k^2 \pi^2} \cdot \sin\left(\frac{k\pi}{2}\right) e^{-k^2 \pi^2 t} \sin(k\pi x)$$

3. Schritt

Man löst das Problem mit inhomogener Differentialgleichung und homogener Anfangsbedingung

$$\begin{aligned} v_t &= v_{xx} + 3\pi^2 \sin 3\pi x, & \text{für } 0 < x < 1, \quad 0 < t, \\ v(x, 0) &= 0, & \text{für } 0 \leq x \leq 1 \\ v(0, t) &= 0 = v(1, t), & \text{für } 0 \geq t. \end{aligned}$$

Für die Lösung wird nach der Fourier-Methode folgender Ansatz gemacht:

$$v^{**}(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k(t) \sin(k\pi x).$$

Die homogene Anfangsbedingung wird nach einem Koeffizientenvergleich durch die Forderung $a_k(0) = 0$ erfüllt.

Die rechte Seite wird ebenfalls in eine sin-Reihe entwickelt

$$3\pi^2 \sin 3\pi x = \sum_{k=1}^{\infty} c_k(t) \sin(k\pi x).$$

Hier ergibt ein Koeffizientenvergleich $c_3(t) = 3\pi^2$ und $c_k(t) \equiv 0$ sonst.

Eingesetzt in die Differentialgleichung ergibt sich

$$\sum_{k=1}^{\infty} (\dot{a}_k(t) + k^2\pi^2 a_k(t) - c_k(t)) \sin(k\pi x) = 0.$$

Die Koeffizienten $a_k(t)$ der Lösung v^{**} sind daher aus den folgenden gewöhnlichen Anfangswertaufgaben zu berechnen

$$\dot{a}_k(t) + k^2\pi^2 a_k(t) = c_k(t) \quad \text{mit} \quad a_k(0) = 0.$$

Für $k = 3$ liegt eine lineare inhomogene Differentialgleichung vor

$$\dot{a}_3(t) + 9\pi^2 a_3(t) = 3\pi^2 \quad \text{mit} \quad a_3(0) = 0$$

mit der allgemeinen Lösung

$$a_3(t) = 1/3 + d_3 e^{-9\pi^2 t}.$$

Berücksichtigt man die Anfangsvorgabe, so ergibt sich

$$a_3(t) = \frac{1}{3} \left(1 - e^{-9\pi^2 t} \right).$$

Für $k \neq 3$ lautet die allgemeine Lösung der linearen homogenen Differentialgleichung

$$a_k(t) = d_k e^{-k^2\pi^2 t}.$$

Mit den Anfangsbedingungen $a_k(0) = 0$ folgt $d_k = 0$ und damit $a_k(t) = 0$.

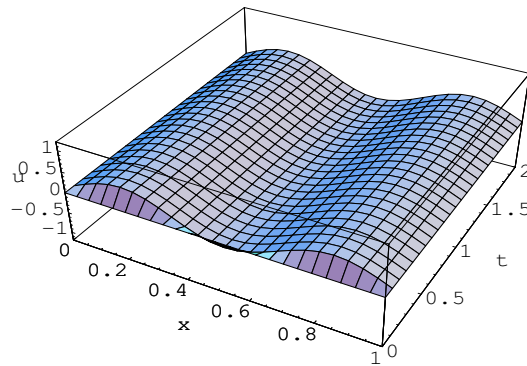


Bild 27 c) $v^{**}(x, t) = \frac{1}{3} \left(1 - e^{-9\pi^2 t}\right) \sin(3\pi x)$

Die Lösung des Ausgangsproblems erhält man nun durch

$$u(x, t) = u^*(x, t) + v^*(x, t) + v^{**}(x, t).$$

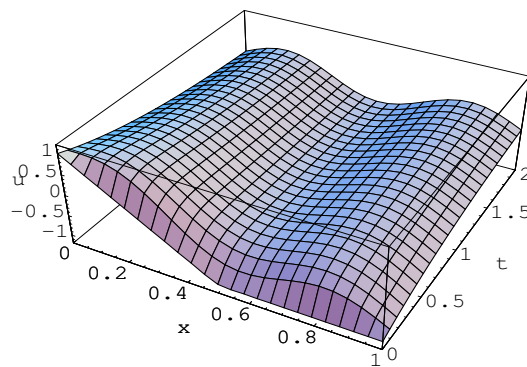


Bild 27 d) $u(x, t) = u^*(x, t) + v^*(x, t) + v^{**}(x, t)$

Lösung 28:

Die Lösung des Problems erfolgt in drei Schritten:

1. Schritt

Das Problem mit den inhomogenen Randbedingungen

$$u(0, t) = \varphi_0(t) := \sin t \quad \text{und} \quad u(\ell, t) = \varphi_1(t) := \cos t$$

wird durch $v(x, t) := u(x, t) - \varphi_0(t) - \frac{x}{\ell}(\varphi_1(t) - \varphi_0(t))$

$$\Rightarrow u(x, t) = v(x, t) - \frac{x - \ell}{\ell} \sin t + \frac{x}{\ell} \cos t$$

in eines mit homogenen Randbedingungen transformiert. Das transformierte Problem in v

lautet dann

$$\begin{aligned}
 v_{tt} &= c^2 v_{xx} + t \sin\left(\frac{2\pi x}{\ell}\right), \quad 0 < x < \ell, \quad 0 < t, \\
 v(x, 0) &= u(x, 0) - \varphi_0(0) - \frac{x}{\ell}(\varphi_1(0) - \varphi_0(0)) = \frac{x}{\ell} - \frac{x}{\ell} = 0, \quad 0 \leq x \leq \ell \\
 v_t(x, 0) &= u_t(x, 0) - \varphi'_0(0) - \frac{x}{\ell}(\varphi'_1(0) - \varphi'_0(0)) = 1 - \frac{x}{\ell} - 1 + \frac{x}{\ell} = 0 \\
 v(0, t) &= 0 = v(\ell, t), \quad \text{für } 0 \leq t.
 \end{aligned}$$

2. Schritt

Man löst das Problem mit homogener Differentialgleichung und Anfangsbedingungen

$$\begin{aligned}
 v_{tt} &= c^2 v_{xx}, \quad \text{für } 0 < x < \ell, \quad 0 < t, \\
 v(x, 0) &= 0 = v_t(x, 0), \quad \text{für } 0 \leq x \leq \ell \\
 v(0, t) &= 0 = v(\ell, t), \quad \text{für } 0 \leq t.
 \end{aligned}$$

Das Problem wird gelöst durch $v^* \equiv 0$. Rein rechnerisch ergibt sich die Lösung aus der über einen Produktansatz gewonnenen Lösungsdarstellung, die schon die Randbedingungen erfüllt:

$$v^*(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(A_k \cos\left(\frac{ck\pi t}{\ell}\right) + B_k \sin\left(\frac{ck\pi t}{\ell}\right) \right) \sin\left(\frac{k\pi x}{\ell}\right)$$

unter Ausnutzung der Anfangsbedingungen mit anschließendem Koeffizientenvergleich.

3. Schritt

Man löst das Problem mit inhomogener Differentialgleichung und homogenen Anfangsbedingungen

$$\begin{aligned}
 v_{tt} &= c^2 v_{xx} + t \sin\left(\frac{2\pi x}{\ell}\right), \quad \text{für } 0 < x < \ell, \quad 0 < t, \\
 v(x, 0) &= 0 = v_t(x, 0), \quad \text{für } 0 \leq x \leq \ell \\
 v(0, t) &= 0 = v(\ell, t), \quad \text{für } 0 \leq t.
 \end{aligned}$$

Nach der Fourierschen Methode wird für die Lösung in Anlehnung an den 2.Schritt folgender Ansatz gemacht:

$$v^{**}(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} v_k(t) \sin\left(\frac{k\pi x}{\ell}\right).$$

Die homogenen Anfangsbedingungen führen auf $v_k(0) = 0$, $\dot{v}_k(0) = 0$.

Die Inhomogenität der Differentialgleichung wird ebenfalls in eine sin-Reihe entwickelt

$$t \sin\left(\frac{2\pi x}{\ell}\right) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(t) \sin\left(\frac{k\pi x}{\ell}\right) \Rightarrow f_2(t) = t, f_k(t) = 0 \text{ sonst}.$$

Eingesetzt in die Differentialgleichung ergibt sich

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\ddot{v}_k(t) + \left(\frac{ck\pi}{\ell}\right)^2 v_k(t) - f_k(t) \right) \sin\left(\frac{k\pi x}{\ell}\right) = 0.$$

Die Koeffizienten $v_k(t)$ der Lösung v^{**} ergeben sich daher aus den folgenden gewöhnlichen Anfangswertaufgaben

$$\ddot{v}_k(t) + \left(\frac{ck\pi}{\ell}\right)^2 v_k(t) - f_k(t) = 0 \quad \text{mit} \quad v_k(0) = 0 = \dot{v}_k(0).$$

Für $k \neq 2$ ist $v_k \equiv 0$.

Für $k = 2$ erhält man die allgemeine Lösung

$$v_2(t) = A_2 \cos\left(\frac{2c\pi t}{\ell}\right) + B_2 \sin\left(\frac{2c\pi t}{\ell}\right) + \frac{\ell^2 t}{4c^2\pi^2}.$$

Berücksichtigt man die Anfangsvorgaben, so ergibt sich

$$v_2(t) = \frac{\ell^2}{4c^2\pi^2} \left(t - \frac{\ell}{2c\pi} \sin\left(\frac{2c\pi t}{\ell}\right) \right).$$

Die Lösung des Ausgangsproblems erhält man nun durch

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \varphi_0(t) + \frac{x}{\ell}(\varphi_1(t) - \varphi_0(t)) + v^*(x, t) + v^{**}(x, t) \\ &= \frac{x}{\ell} \cos t - \frac{x - \ell}{\ell} \sin t + \frac{\ell^2}{4c^2\pi^2} \left(t - \frac{\ell}{2c\pi} \sin\left(\frac{2c\pi t}{\ell}\right) \right) \sin\left(\frac{2\pi x}{\ell}\right). \end{aligned}$$

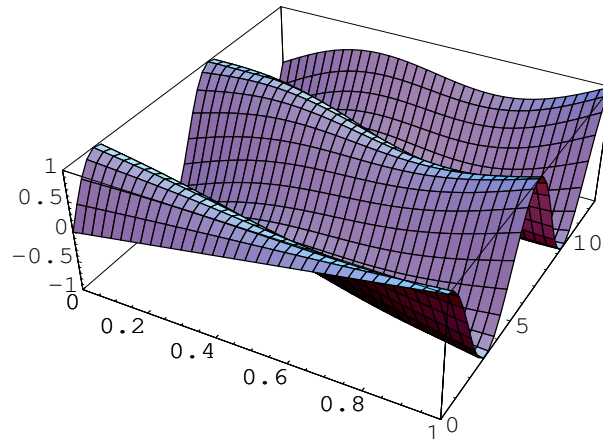


Bild 28 Lösung $u(x, t)$ für $\ell = 1$ und $c = 1$