

Hörsaalübungsaufgaben und Lösungen zu komplexe Funktionen für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Aufgabe 1:

Gegeben sind die komplexen Zahlen $z_1 := \frac{(1+2i)^2}{2-i}$ und $z_2 := \frac{1+i\sqrt{3}}{2}$.

- a) Man ermittle Real- und Imaginärteil von z_1 und die Polardarstellungen von z_1 und z_2 .
- b) Man bestimme z_2^6 .
- c) Man gebe alle Lösungen der Gleichung $(w + z_2)^3 = 1$ in kartesischen Koordinaten an.

Aufgabe 2:

Man skizziere die folgenden Punktmengen in der komplexen Zahlenebene:

- a) $\{w \in \mathbb{C} : |w + z_2|^3 = |8i|\}, \text{ mit } z_2 := \sqrt{3} - i,$
- b) $\{z \in \mathbb{C} : |\operatorname{Re}(z)| + |\operatorname{Im}(z)| \leq \sqrt{2}\},$
- c) $\{z \in \mathbb{C} : 9\operatorname{Re}(z^2) + 13(\operatorname{Im}(z))^2 = 36\},$
- d) $\{z \in \mathbb{C} : 3\pi/2 < \arg(zi) < 2\pi, 0 < |z|\}.$

Aufgabe 3:

- a) Man untersuche die Folge

$$z_0 = 1 + i, \quad z_{n+1} = \frac{i}{2} (2 - i + z_n)$$

auf Konvergenz und bestimme ggf. den Grenzwert.

- b) Für eine komplexe Zahlenfolge
- $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$
- zeige man die folgende Äquivalenz:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = z^* \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \operatorname{Re}(z_n) = \operatorname{Re}(z^*) \wedge \lim_{n \rightarrow \infty} \operatorname{Im}(z_n) = \operatorname{Im}(z^*) .$$

Aufgabe 4:

- a) Man bestimme das Bild von
- $Q := \{z \in \mathbb{C} \mid 0 \leq \operatorname{Re}(z) \leq 1, 0 \leq \operatorname{Im}(z) \leq 1\}$
- unter der durch
- $f(z) = iz^2 + 2$
- definierten Abbildung.

- b) Gegeben seien
- $z_1 = 3 + \frac{\pi i}{4}$
- und
- $z_2 = 1 - \frac{\pi i}{2}$
- . Man berechne

$$\exp(z_1), \exp(z_2) \quad \text{und} \quad \exp(z_1 + z_2)$$

in kartesischen Koordinaten und bestätige an diesem Beispiel die Gültigkeit der Funktionalgleichung der e -Funktion in $\mathbb{C}$:

$$\exp(z_1) \cdot \exp(z_2) = \exp(z_1 + z_2) .$$

Aufgabe 5:

- a) Für den Hauptwert des komplexen Logarithmus
- $\ln$
- und
- $z_1 = -i$
- und
- $z_2 = -2i$
- berechne man

$$\ln(z_1), \ln(z_2) \quad \text{und} \quad \ln(z_1 z_2),$$

falls dies möglich ist.

- b) Die
- $\sin$
- Funktion wird im Komplexen definiert durch

$$\sin z = \frac{1}{2i} (e^{iz} - e^{-iz}) .$$

Man berechne Real- und Imaginärteil von $\sin z$ und bestimme alle Lösungen von $\sin z = 2$.

Aufgabe 6:

Gegeben sei die Joukowski-Funktion $w = f(z) := \frac{1}{2} \left(\frac{z}{3} + \frac{3}{z} \right)$.

- a) Man bestimme die Bilder
 - (i) des Kreises $|z| = 3$,
 - (ii) des Halbstrahls $\operatorname{Re}(z) = \operatorname{Im}(z) > 0$,
 - (iii) des Halbstrahls $\operatorname{Re}(z) = 0$, $\operatorname{Im}(z) > 0$.
- b) Man berechne die Umkehrfunktion $z = f^{-1}(w)$ für $|z| > 3$.

Aufgabe 7:

Gegeben sei die Funktion $T : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ mit

$$T(z) = \frac{2(1+i)z}{z-1-i}.$$

- a) Man überprüfe, ob es sich bei T um eine Möbiustransformation handelt.
- b) Man berechne alle Fixpunkte von T in kartesischer und Polardarstellung.
- c) Man bestimme das Bild der Winkelhalbierenden $\operatorname{Re} z = \operatorname{Im} z$.
- d) Worauf wird die Halbebene oberhalb der Winkelhalbierenden abgebildet?
- e) Man berechne die Umkehrabbildung von T .

Aufgabe 8:

- a) Man gebe eine Möbius-Transformation T an, mit:

$$T(0) = 0, \quad T(-2) = 4 \quad \text{und} \quad T(i-1) = 2+2i.$$

- b) Liegen $z_0 = -1-i$, $z_1 = 0$, $z_2 = -2$ und $z_3 = i-1$ auf einem Kreis?
- c) Man zeichne den Kreis $K : |z+1| = 1$ und die Punkte $z_1 = 0$, $z_2 = -2$, $z_3 = i-1$, sowie $T(K)$ mit $T(z_i)$ für $i = 1, 2, 3$.

Aufgabe 9:

- a) Für die Kreise $K_1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - 3i| = 2\}$ und $K_2 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z + 3i| = 2\}$ berechne man die Punkte z_1 und z_2 , die symmetrisch zu beiden Kreisen liegen.
- b) Man gebe eine Möbius-Transformation T an, mit:
- $$T(i\sqrt{5}) = 0, \quad T(-i\sqrt{5}) = \infty \quad \text{und} \quad T(i) = 1.$$
- c) Zur imaginären Achse und den Kreisen K_1 und K_2 bestimme man die (verallgemeinerten) Bildkreise unter T , gegebenenfalls mit ihren Radien.

Aufgabe 10:

Für $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ mit $f(z) = z^2$ berechne man

- a) $A := \frac{1}{2}(f_x(z_0) - if_y(z_0))$ und
- b) $B := \frac{1}{2}(f_x(z_0) + if_y(z_0)).$

Man vergleiche die Ergebnisse mit den Ableitungen von $f(z, \bar{z}) = z^2$ nach den unabhängigen Variablen z und $\bar{z}$, also mit

$$\frac{\partial f}{\partial z}, \quad \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}.$$

Dabei sollen die bekannten Ableitungsregeln aus dem Reellen rein formal übertragen werden.

Aufgabe 11:

- a) Man überprüfe, ob
- (i) $f(z) = z \cdot \operatorname{Im}(z)$ holomorph ist,
 - (ii) $g(z) = 2z + 2\bar{z} + 4i \cdot \operatorname{Im}(z) - 3i$ holomorph ist,
 - (iii) $u(x, y) = x^3 - 3xy^2 - 6xy - 3x^2$ harmonisch ist.

- b) Man zeige, dass

$$u(x, y) = 4x^2 - 4y^2 - 12x + 9$$

harmonisch ist und konstruiere eine zu u konjugiert harmonische Funktion $v(x, y)$, d.h. eine Funktion v , für die die Funktion

$f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ mit $z = x + iy$ holomorph wird.

Aufgabe 12:

Gegeben seien die Kurven $c_1(t) = t$ für $t > 0$ und $c_2(t) = 4e^{it}$ für $-\pi < t < \pi$.

- a) Man skizziere die Kurven c_1 und c_2 in der z -Ebene und bestimme ihren Schnittpunkt mit Schnittwinkel.
- b) In welche Bildkurven der w -Ebene gehen c_1 und c_2 unter dem Hauptwert von $w = \sqrt{z}$ über? Man überprüfe, ob im Schnittpunkt der Bildkurven der Winkel und das lokale Längenverhältnis erhalten bleiben.

Aufgabe 13:

- a) Man skizziere die beiden Kreise $K_1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - 1| = 1\}$ und $K_2 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 3\}$ und berechne die beiden Punkte z_1 und z_2 , die symmetrisch zu beiden Kreisen liegen.
- b) Man bestimme alle konformen Funktionen

$$T(z) = \frac{az + b}{cz + d}$$

mit $T(z_1) = 0$ und $T(z_2) = \infty$.

- c) Man skizziere das Bild von K_1 und K_2 unter T , wenn noch $T(0) = 1$ gilt.

Aufgabe 14:

Gegeben sei das durch die beiden Kreise $K_1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - 1| = 1\}$ und $K_2 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 3\}$ berandete beschränkte Gebiet D .

Man berechne eine auf D harmonische Funktion, die auf K_1 den Wert 1 und auf K_2 den Wert 2 annimmt.

Hinweis: Man transformiere das Problem, wie in Aufgabe 13 angegeben, löse das konform verpflanzte Problem in Polarkoordinaten und transformiere zurück.

Aufgabe 15:

Man berechne

$$\text{a) } \int_0^1 (2 + 3it)^2 dt,$$

$$\text{b) } \int_{-1}^1 \frac{t^2 + 1}{1 + it} dt,$$

$$\text{c) } \int_{c_i} \operatorname{Im}(z) dz,$$

dabei ist c_1 der geradlinige Weg, von $z_1 = 1$ nach $z_2 = i$. c_2 verbindet auch z_1 und z_2 , läuft jedoch auf dem Einheitskreis in mathematisch positivem Sinn.

d) Für den Einheitskreis $c(t) = e^{it}$, $0 \leq t \leq 2\pi$ berechne man

$$\text{(i) } \oint_c \bar{z} dz,$$

$$\text{(ii) } \oint_c z^2 dz.$$

Aufgabe 16:

Man berechne direkt und mit Hilfe einer Stammfunktion

$$\text{a) } \int_c z^3 + 4 dz \text{ entlang des geradlinigen Weges von } 1 - i \text{ nach } 1 + i,$$

$$\text{b) } \int_c z e^z dz \text{ für } c(t) = i\pi t \text{ mit } -1 \leq t \leq 0,$$

$$\text{c) } \int_{c_k} \frac{1}{z} dz \text{ für die Kurven } c_1(t) = it \text{ und } c_2(t) = e^{it} \text{ mit } \pi/4 \leq t \leq 3\pi/4,$$

$$\text{d) } \int_1^i \ln z dz \text{ für } c(\varphi) = e^{i\varphi} \text{ (positiv orientiert).}$$

Aufgabe 17:

Man berechne mit Hilfe des Cauchyschen Integralsatzes bzw. der Cauchyschen Integralformel die folgenden Kurvenintegrale, falls diese erklärt sind. Alle auftretenden Kurven werden einmal positiv orientiert durchlaufen.

$$\text{a) } \oint_{|z|=1} \frac{1}{z^2 + 4} dz,$$

$$\text{b) } \oint_c \frac{1}{z + 2} dz, \quad c : |z + 1 - i| = 1,$$

$$\text{c) } \oint_{c_{1,2}} \frac{z^2 - 2z + 2}{z^3 - z^2 + 2} dz, \quad c_1 : |z| = 0.5, \quad c_2 : |z| = 1.5,$$

$$\text{d) } \oint_{|z+1-i|=1} \frac{1}{z^2 + 4z + 5} dz,$$

$$\text{e) } \oint_{c_{1,2}} \frac{z^3}{z^2 - iz + 6} dz, \quad c_1 : |z| = 2.5, \quad c_2 : |z - i| = 2.5,$$

$$\text{f) } \oint_c \frac{z^2 + 3z - 1}{z^2 + z - 2} dz, \quad c : |z - i| = 3.$$

Aufgabe 18:

Man berechne mit Hilfe der verallgemeinerten Cauchyschen Integralformel die folgenden Kurvenintegrale (alle auftretenden Kurven seien positiv orientiert):

$$\text{a) } \oint_{|z|=1} \frac{\cos z}{z^3} dz,$$

$$\text{b) } \oint_{|z|=1} \frac{1}{z^5 + 2z^4} dz,$$

$$\text{c) } \oint_c z^2 + \frac{e^z}{z^2} dz, \quad c : |z| = \pi,$$

$$\text{d) } \oint_c \frac{\ln z}{(z - 1 - i)^5} dz, \quad c : |z - 1 - 2i| = 2.$$

Aufgabe 19:

a) Man berechne die Taylorreihe von $F(z) = \int_1^z \frac{d\xi}{5-3\xi}$ zum Entwicklungspunkt $z_0 = 1$ und bestimme den Konvergenzradius.

b) Man bestimme die Konvergenzradien der Taylor-Reihen folgender Funktionen zu den angegebenen Entwicklungspunkten z_0 , ohne die Reihen selbst zu berechnen:

$$(i) \quad f(z) = \frac{3}{z^2 + 2z + 5}, \quad z_0 = i \text{ und } z_0 = 0,$$

$$(ii) \quad f(z) = \frac{2}{e^z - 1}, \quad z_0 = 2\pi(1+i),$$

$$(iii) \quad f(z) = \frac{z}{\ln(3-2z)}, \quad z_0 = 0 \text{ und } z_0 = \frac{11}{8}.$$

Aufgabe 20:

Man gebe **alle** Potenzreihenentwicklungen der Funktion

$$f(z) = \frac{5z}{z^2 + z - 6}$$

zum Entwicklungspunkt $z_0 = i$ an. Wo konvergieren die Reihen jeweils?

Aufgabe 21:

Man bestimme die Laurententwicklung der folgenden Funktionen und gebe jeweils den Koeffizienten a_{-1} der Reihe an:

$$a) \quad f(z) = \frac{e^z - 1 - z - z^2/2}{z^2} \quad \text{im Punkt } z_0 = 0,$$

$$b) \quad f(z) = \frac{\cos z}{z^5} \quad \text{im Punkt } z_0 = 0,$$

$$c) \quad f(z) = z \sin\left(\frac{1}{z+\pi}\right) \quad \text{im Punkt } z_0 = -\pi.$$

Aufgabe 22:

Für die folgenden Funktionen

$$a) \quad f(z) = \frac{1}{z^4 + z^2},$$

$$b) \quad f(z) = \sin \frac{1}{z},$$

c) $f(z) = \frac{z - \sin z}{z^2},$

d) $f(z) = \coth z$

bestimme man:

Lage und Art der (endlichen) Singularitäten, die zugehörigen Residuen und die ersten drei (nichtverschwindenden) Summanden der Laurentreihe um $z_0 = 0$, die für große z konvergiert.

Aufgabe 23:

Gegeben sei die Funktion

$$f(z) = \frac{25}{z^4 - z^2 - 2z + 2}.$$

- a) Man bestimme mit Hilfe von Laurent-Reihenentwicklungen die Partialbruchzerlegung von f .
- b) Man berechne mit Hilfe des Residuensatzes das Integral

$$\oint_c f(z) dz$$

für den Kreis $c: |z + 2| = 2$.

Aufgabe 24:

Man berechne mit Hilfe des Residuenkalküls die Integrale

a) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2 - 4x + 6} dx,$

b) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{x^4 + 324} dx$ und

c) $\int_{-2}^{\infty} \frac{x - 1}{(x^2 + 3x - 4)\sqrt{x + 2}} dx,$

d) $\int_0^{2\pi} \frac{\sin \varphi}{4 + \cos \varphi} d\varphi.$

Lösung 1:

$$\begin{aligned}
\text{a) } z_1 &= \frac{(1+2i)^2}{2-i} = \frac{(-3+4i)(2+i)}{(2-i)(2+i)} = \frac{-10+5i}{5} = -2+i \\
&\Rightarrow \operatorname{Re}(z_1) = -2, \quad \operatorname{Im}(z_1) = 1 \\
|z_1| &= \sqrt{(-2)^2 + 1^2} = \sqrt{5}, \quad \arg(z_1) = \pi + \arctan\left(-\frac{1}{2}\right), \\
z_1 &= \sqrt{5}e^{i(\pi - \arctan(\frac{1}{2}))}, \\
z_2 &= \frac{1+i\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \operatorname{Re}(z_2) = \frac{1}{2}, \quad \operatorname{Im}(z_2) = \frac{\sqrt{3}}{2} \\
|z_2| &= 1, \quad \arg(z_2) = \arctan \sqrt{3} = \frac{\pi}{3}, \quad z_2 = e^{\pi i/3}
\end{aligned}$$

$$\text{b) } z_2^6 = (e^{\pi i/3})^6 = e^{6\pi i/3} = e^{2\pi i} = 1$$

$$\begin{aligned}
\text{c) } (w+z_2)^3 &= 1 = 1e^0 \\
&\Rightarrow w_k = 1^{1/3}e^{(0+2\pi k)i/3} - z_2, \quad k=0,1,2 \\
w_0 &= 1 - z_2 = 1 - \frac{1+i\sqrt{3}}{2} = \frac{1-i\sqrt{3}}{2}, \\
w_1 &= e^{2\pi i/3} - z_2 = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2} - \frac{1+i\sqrt{3}}{2} = -1, \\
w_2 &= e^{4\pi i/3} - z_2 = \frac{-1-i\sqrt{3}}{2} - \frac{1+i\sqrt{3}}{2} = -1 - i\sqrt{3}.
\end{aligned}$$

Die drei Lösungen w_k liegen auf einem Kreis um $z_2 = -\frac{1+i\sqrt{3}}{2}$ mit Radius $r = 1$.

Lösung 2:

$$\text{a) } |w+z_2|^3 = |8i| = 8 \Leftrightarrow |w+z_2| = 2$$

Alle w liegen auf einem Kreis um $-z_2 = i - \sqrt{3}$ mit Radius $r = 2$.

In kartesischen Koordinaten $w = u + iv$ erhält man die Darstellung:

$$\begin{aligned}
|w+z_2| &= |u+iv+\sqrt{3}-i| = |u+\sqrt{3}+i(v-1)| \\
&= \sqrt{(u+\sqrt{3})^2 + (v-1)^2} = 2
\end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow (u+\sqrt{3})^2 + (v-1)^2 = 2^2, \quad \text{Radius } r = 2, \quad \text{Mittelpunkt } (-\sqrt{3}, 1).$$

b) Mit der kartesischen Darstellung $z = x + iy$ erhält man:

$$|\operatorname{Re}(z)| + |\operatorname{Im}(z)| = |x| + |y| = \left\| \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right\|_1 \leq \sqrt{2}$$

Die Punktmenge ist ein Quadrat mit Kantenlänge 2 und den Eckpunkten

$(\sqrt{2}, 0), (0, \sqrt{2}), (-\sqrt{2}, 0)$ und $(0, -\sqrt{2})$ im $\mathbb{R}^2$ bzw.
 $\sqrt{2}, i\sqrt{2}, -\sqrt{2}$ und $-i\sqrt{2}$ in $\mathbb{C}$.

$$\begin{aligned} \text{c)} \quad 36 &= 9\operatorname{Re}(z^2) + 13\operatorname{Im}(z)^2 = 9\operatorname{Re}((x+iy)^2) + 13(\operatorname{Im}(x+iy))^2 \\ &= 9\operatorname{Re}(x^2 - y^2 + i2xy) + 13y^2 = 9(x^2 - y^2) + 13y^2 \\ &= 9x^2 + 4y^2 \end{aligned}$$

Die Punktmenge wird also durch folgende Ellipse beschrieben:

$$\left(\frac{x}{2}\right)^2 + \left(\frac{y}{3}\right)^2 = 1.$$

$$\text{d)} \quad \arg(zi) = \arg(re^{i\varphi}e^{i\pi/2}) = \arg(re^{i(\varphi+\pi/2)}) = \varphi + \pi/2 \Rightarrow \pi < \varphi < 3\pi/2$$

Damit ist die Punktmenge gegeben durch den 3. Quadranten ohne die berandenden Achsen.

Lösung 3:

a) Wenn z_n konvergiert, so gilt mit $z^* := \lim_{n \rightarrow \infty} z_n = \lim_{n \rightarrow \infty} z_{n+1}$:

$$z^* = \frac{i}{2}(2 - i + z^*) \Rightarrow z^* \left(1 - \frac{i}{2}\right) = \frac{(2-i)i}{2} \Rightarrow z^* = i.$$

z_n konvergiert, da

$$\begin{aligned} |z_{n+1} - i| &= \left| \frac{i}{2}(2 - i + z_n) - i \right| = \left| \frac{i}{2} \right| \left| 2 - i + z_n - \frac{i}{2} \right| = \frac{1}{2} |z_n - i| \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^2 |z_{n-1} - i| = \dots = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} |z_0 - i| = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b)} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} z_n = z^* &\Leftrightarrow 0 = \lim_{n \rightarrow \infty} |z_n - z^*| = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\operatorname{Re}(z_n - z^*)^2 + \operatorname{Im}(z_n - z^*)^2} \\ &\Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \operatorname{Re}(z_n - z^*) = 0 \wedge \lim_{n \rightarrow \infty} \operatorname{Im}(z_n - z^*) = 0 \\ &\Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \operatorname{Re}(z_n) = \operatorname{Re}(z^*) \wedge \lim_{n \rightarrow \infty} \operatorname{Im}(z_n) = \operatorname{Im}(z^*) \end{aligned}$$

Lösung 4:

a)

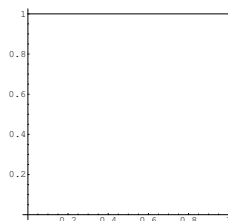


Bild 4.a.1) $Q := \{z \in \mathbb{C} \mid 0 \leq \operatorname{Re}(z) \leq 1, 0 \leq \operatorname{Im}(z) \leq 1\}$

Die Abbildung $f(z) = iz^2 + 2$ wird interpretiert als Hintereinanderausführung $f = f_3 \circ f_2 \circ f_1$ mit $f_1(z) = z^2$, $f_2(u) = iu$ und $f_3(v) = v + 2$.

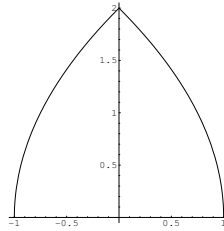


Bild 4.a.2) $f_1(Q)$

Mit der Funktion $f_1(z) = z^2$ werden die Ränder von Q folgendermaßen abgebildet:

- (i) $c_1(x) = x$ mit $x \in [0, 1]$: $f_1(c_1(x)) = x^2$,
damit wird das Intervall $[0, 1]$ in sich abgebildet.
- (ii) $c_2(y) = 1 + iy$ mit $y \in [0, 1] \Rightarrow f_1(c_2(y)) = (1 + iy)^2 = 1 - y^2 + i2y$
(nach unten geöffnete Parabel bzgl. der y -Achse)
- (iii) $c_3(x) = x + i$ mit $x \in [0, 1] \Rightarrow f_1(c_3(x)) = (x + i)^2 = x^2 - 1 + i2x$
(nach oben geöffnete Parabel bzgl. der y -Achse)
- (iv) $c_4(y) = iy$ mit $y \in [0, 1]$: $f_1(c_4(y)) = (iy)^2 = -y^2$,
damit ist das Bild von c_4 das Intervall $[-1, 0]$.

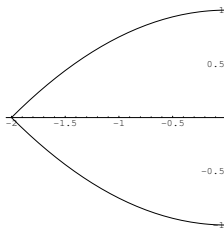


Bild 4.a.3) $f_2(f_1(Q))$

Die Funktion $f_2(u) = iu$ bewirkt eine Drehung um den Winkel $\varphi = \frac{\pi}{2}$

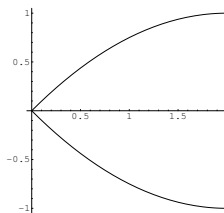


Bild 4.a.4) $f(Q) = f_3(f_2(f_1(Q)))$

Die Funktion $f_3(v) = v + 2$ bewirkt eine Verschiebung in Richtung der positiven x -Achse um den Wert 2.

$$\text{b) } \exp(z_1) = \exp\left(3 + \frac{\pi i}{4}\right) = e^3 \left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) = \frac{e^3 \sqrt{2}}{2} + i \frac{e^3 \sqrt{2}}{2}$$

$$\exp(z_2) = \exp\left(1 - \frac{\pi i}{2}\right) = e \left(\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) - i \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) = -ie$$

$$\begin{aligned} \exp(z_1 + z_2) &= \exp\left(4 - \frac{\pi i}{4}\right) = e^4 \left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) - i \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) \\ &= \frac{e^4 \sqrt{2}}{2} - i \frac{e^4 \sqrt{2}}{2} \end{aligned}$$

Damit erhält man

$$\exp(z_1) \exp(z_2) = \left(\frac{e^3 \sqrt{2}}{2} + i \frac{e^3 \sqrt{2}}{2}\right) (-ie) = \frac{e^4 \sqrt{2}}{2} - i \frac{e^4 \sqrt{2}}{2} = \exp(z_1 + z_2).$$

Lösung 5:

a) Der Hauptwert $\ln z$ des Logarithmus ist definiert für $-\pi < \arg z < \pi$ durch

$$\ln z = \ln |z| + i \arg z.$$

$$\ln(z_1) = \ln(-i) = \ln |-i| + i \arg(-i) = \ln 1 - i\pi/2 = -i\pi/2$$

$$\ln(z_2) = \ln(-2i) = \ln |-2i| + i \arg(-2i) = \ln 2 - i\pi/2$$

$$z_1 z_2 = -i(-2i) = -2 = 2e^{-\pi i}$$

Damit liegt $z_1 z_2$ nicht im Definitionsbereich des Hauptwertes und $\ln(z_1 z_2) = \ln(-2)$ kann nicht berechnet werden.

b) Mit $z = x + iy$ gilt:

$$\begin{aligned} \sin z &= \frac{1}{2i} (e^{iz} - e^{-iz}) = -\frac{i}{2} (e^{-y+ix} - e^{y-ix}) \\ &= \frac{1}{2} (-ie^{-y}(\cos x + i \sin x) + ie^y(\cos x - i \sin x)) \\ &= \frac{1}{2} (\sin x(e^y + e^{-y}) + i \cos x(-e^{-y} + e^y)) \\ &= \sin x \cosh y + i \cos x \sinh y \end{aligned}$$

$$2 = \sin z = \sin x \cosh y + i \cos x \sinh y \Rightarrow \cos x \sinh y = 0$$

$$\begin{aligned} 1. \text{ Fall: } \sinh y = 0 &\Rightarrow y = 0 \Rightarrow \sin x \cosh 0 = \sin x = 2 \\ &\text{besitzt keine Lösung.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2. \text{ Fall: } \cos x = 0 &\Rightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \\ &\Rightarrow \sin\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right) \cosh y = (-1)^k \cosh y = 2 \\ &\Rightarrow \cosh y = 2 \text{ und } k = 2n \Rightarrow y = \pm \operatorname{arcosh} 2 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow z_n = \frac{\pi}{2} + 2n\pi \pm i \operatorname{arcosh} 2, \quad n \in \mathbb{Z}$$

Lösung 6:

- a) (i) Mit der Polardarstellung $z = 3e^{i\varphi}$, $0 \leq \varphi < 2\pi$ auf dem Kreis $|z| = 3$ erhält man:

$$f(z) = \frac{1}{2} \left(\frac{3e^{i\varphi}}{3} + \frac{3}{3e^{i\varphi}} \right) = \frac{1}{2} (e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}) = \cos \varphi \in [-1, 1].$$

- (ii) Die Polardarstellung $z = re^{i\pi/4}$, $0 < r < \infty$ des Halbstrahls $\operatorname{Re}(z) = \operatorname{Im}(z) > 0$ ergibt:

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2} \left(\frac{re^{i\pi/4}}{3} + \frac{3}{re^{i\pi/4}} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{r}{3} (\cos \pi/4 + i \sin \pi/4) + \frac{3}{r} (\cos \pi/4 - i \sin \pi/4) \right) \\ &= \underbrace{\left(\frac{r}{6} + \frac{3}{2r} \right) \cos \pi/4}_{=u} + i \underbrace{\left(\frac{r}{6} - \frac{3}{2r} \right) \sin \pi/4}_{=v}. \end{aligned}$$

$u = \operatorname{Re}(f)$ und $v = \operatorname{Im}(f)$ erfüllen die Hyperbelgleichung

$$\frac{u^2}{\cos^2 \pi/4} - \frac{v^2}{\sin^2 \pi/4} = \left(\frac{r}{6} + \frac{3}{2r} \right)^2 - \left(\frac{r}{6} - \frac{3}{2r} \right)^2 = 1.$$

Mathematica Plot-Befehl

```
ParametricPlot[{Sqrt[2] Cosh[t]/2,
Sqrt[2] Sinh[t]/2}, {t, -2.1, 2.1},
AxesLabel -> {"Re", "Im"}, PlotRange -> {-3, 3}]
```

Mit

$$\cosh(t) = \left(\frac{r}{6} + \frac{3}{2r} \right), \quad \sinh(t) = \left(\frac{r}{6} - \frac{3}{2r} \right)$$

entspricht der Radius $r = 3$ dem Wert $t = 0$.

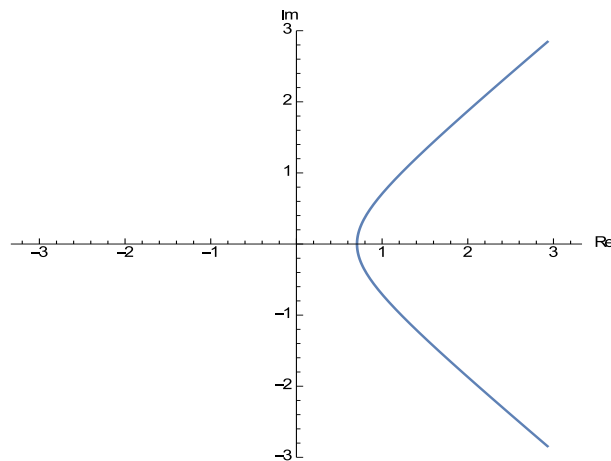


Bild 6 a)(ii): Hyperbel

- (iii) Aus der Polardarstellung $z = re^{i\pi/2} = ir$, $0 < r < \infty$ des Halbstrahls $\operatorname{Re}(z) = 0$, $\operatorname{Im}(z) > 0$ folgt:

$$f(z) = \frac{1}{2} \left(\frac{ir}{3} + \frac{3}{ir} \right) = i \underbrace{\left(\frac{r}{6} - \frac{3}{2r} \right)}_{=t} \quad \text{mit } t \in \mathbb{R}.$$

Die Polardarstellung führt im Bild also auf die imaginäre Achse.

- b) Die Umkehrfunktion von f ergibt sich durch Auflösen von $w = f(z)$ nach z :

$$\begin{aligned} w &= \frac{1}{2} \left(\frac{z}{3} + \frac{3}{z} \right) \Leftrightarrow 6wz = z^2 + 9 \\ \Leftrightarrow z^2 - 6wz + 9 &= (z - 3w)^2 - 9w^2 + 9 = 0 \\ \Leftrightarrow (z - 3w)^2 &= 9(w^2 - 1) \end{aligned}$$

Für $|z| > 3$ erhält man damit $z = f^{-1}(w) = 3w + 3\sqrt{w^2 - 1}$.

Für $w = re^{i\varphi}$ mit $-\pi < \varphi < \pi$ wird dabei $\sqrt{w}$ für die rechte z -Halbebene durch den Hauptwert und für die linke z -Halbebene durch den Nebenwert der Wurzel berechnet

$$\text{HW : } \sqrt{w} = \sqrt{r}e^{i\varphi/2}, \quad \text{NW : } \sqrt{w} = \sqrt{r}e^{i(\varphi/2+\pi)} = -\sqrt{r}e^{i\varphi/2}.$$

Lösung 7:

- a) Ein Vergleich mit der Standardform $T(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ ergibt

$$ad = 2(1+i)(-1-i) = -4i \neq 0 = 0 \cdot 1 = bc,$$

d.h. T ist eine Möbius Transformation.

- b) $z = \frac{2(1+i)z}{z-1-i} \stackrel{z \neq 1+i}{\Leftrightarrow} z(z-1-i) = 2(1+i)z \Leftrightarrow z(z-3(1+i)) = 0$

Man erhält also die beiden Fixpunkte $z_1 = 0$ und $z_2 = 3(1+i) = 3\sqrt{2}e^{i\pi/4}$.

- c) Die Punkte z_1, z_2 und $1+i$ liegen auf der Winkelhalbierenden, also einer Geraden. Daher liegen sie im Bild unter T auf einer Geraden oder einem Kreis. Da z_1 und z_2 Fixpunkte sind und $T(1+i) = \infty$ gilt, wird die Winkelhalbierende auf sich selbst abgebildet.
- d) Die oberhalb der Winkelhalbierenden liegende Ebene wird wegen Teil c), $T(i) = 2 - 2i$ und weil T stetig ist auf die unterhalb der Winkelhalbierenden liegende Ebene abgebildet.

e) Durch Auflösen von $w = \frac{2(1+i)z}{z-1-i}$ nach z erhält man die Umkehrabbildung:

$$w = \frac{2(1+i)z}{z-1-i} \stackrel{z \neq 1+i}{\Leftrightarrow} w(z-1-i) = 2(1+i)z$$

$$\Leftrightarrow z(w - 2(1+i)) = (1+i)w \stackrel{z \neq 2(1+i)}{\Leftrightarrow} z = T^{-1}(w) = \frac{(1+i)w}{w - 2(1+i)}$$

Lösung 8:

a) Einsetzen in die Dreipunkteformel und Auflösen nach w ergibt:

$$\begin{aligned} \frac{w-0}{w-4} : \frac{2+2i-0}{2+2i-4} &= \frac{z-0}{z+2} : \frac{i-1-0}{i-1+2} \Leftrightarrow \frac{w}{w-4} : \frac{i+1}{i-1} = \frac{z}{z+2} : \frac{i-1}{i+1} \\ \Rightarrow w(z+2) &= z(w-4) \underbrace{\frac{(i+1)^2}{(i-1)^2}}_{=-1} \Leftrightarrow wz + 2w = 4z - wz \Leftrightarrow w = \frac{2z}{z+1} =: T(z). \end{aligned}$$

b) Eine Probe ergibt, dass $z_0, \dots, z_3$ auf dem Kreis $|z+1|=1$ liegen.

Alternativ und ohne Kenntnis des Kreises kann man auch nachprüfen, dass das Doppelverhältnis reell ist:

$$\frac{z_0 - z_1}{z_0 - z_2} : \frac{z_3 - z_1}{z_3 - z_2} = \frac{-1-i}{-1-i+2} : \frac{i-1}{i-1+2} = \frac{(-1-i)(1+i)}{(1-i)(i-1)} = -1 \in \mathbb{R}$$

c) Die Punkte $z_1 = 0$, $z_2 = -2$ und $z_3 = i-1$ liegen auf dem Kreis K . Damit liegen die Punkte $T(z_1) = 0$, $T(z_2) = 4$ und $T(z_3) = 2+2i$ auf dem Bildkreis $T(K)$.

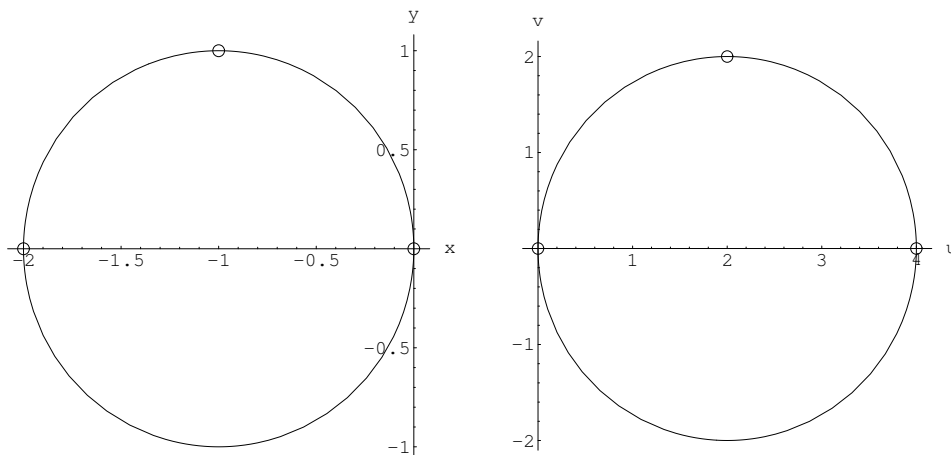


Bild 8: z_1, z_2, z_3 und K

w_1, w_2, w_3 und $T(K)$

Lösung 9:

a) Die Symmetrieebedingung zu K_1

$$(z_1 - 3i)(\bar{z}_2 + 3i) = 2^2 \Rightarrow \bar{z}_2 = \frac{4}{z_1 - 3i} - 3i$$

eingesetzt in die Symmetrieebedingung zu K_2 ergibt

$$2^2 = (z_1 + 3i)(\bar{z}_2 - 3i) = (z_1 + 3i) \left(\frac{4}{z_1 - 3i} - 3i - 3i \right) \Rightarrow$$

$$4(z_1 - 3i) = (z_1 + 3i)(4 - 6i(z_1 - 3i))$$

$$= 4z_1 + 12i - 6i(z_1 + 3i)(z_1 - 3i)$$

$$\Rightarrow -24i = -6i(z_1^2 + 9) \Rightarrow z_1 = \pm i\sqrt{5}$$

$$\Rightarrow \bar{z}_2 = \frac{4}{\pm i\sqrt{5} - 3i} - 3i = \pm i\sqrt{5} \Rightarrow z_2 = \bar{z}_1 = -z_1 = \mp i\sqrt{5}$$

b) Mit $T(z) = k \frac{z - i\sqrt{5}}{z + i\sqrt{5}}$ sind die Bedingungen $T(z_1) = 0$ und $T(z_2) = \infty$ erfüllt.

$$1 = T(i) = k \frac{i - i\sqrt{5}}{i + i\sqrt{5}} \Rightarrow k = \frac{1 + \sqrt{5}}{1 - \sqrt{5}} \Rightarrow T(z) = \frac{1 + \sqrt{5}}{1 - \sqrt{5}} \cdot \frac{z - i\sqrt{5}}{z + i\sqrt{5}}$$

c) Das Bild der imaginären Achse ($z = iy$) ist die reelle Achse, denn

$$T(iy) = \frac{1 + \sqrt{5}}{1 - \sqrt{5}} \cdot \frac{iy - i\sqrt{5}}{iy + i\sqrt{5}} \in \mathbb{R}.$$

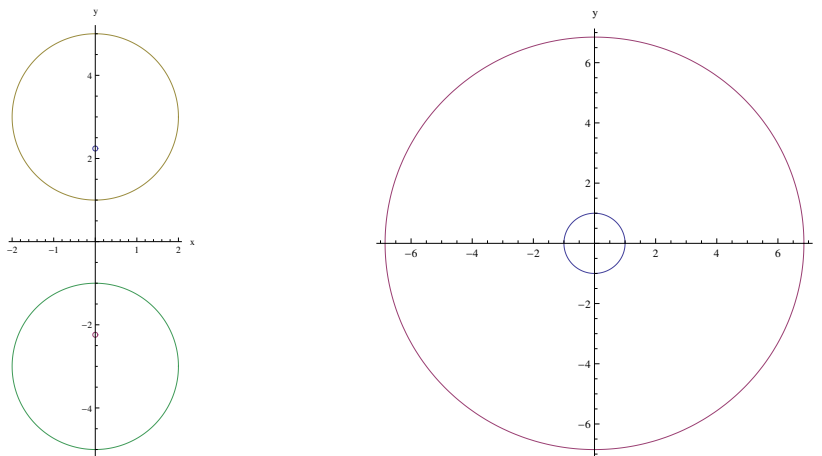


Bild 9: K_1 und K_2 mit z_1 und z_2

$T(K_1)$ und $T(K_2)$

Nach a) liegen z_1 und z_2 symmetrisch zu K_1 und K_2 und nicht auf K_1 und K_2 . Also sind auch $T(z_1) = 0$ und $T(z_2) = \infty$ symmetrisch zu den Bildkreisen $T(K_1)$ und $T(K_2)$. Damit müssen $T(K_1)$ und $T(K_2)$ Kreise um den Ursprung sein.

Radien $R_{1,2}$ von $K_{1,2}$:

$$i \in K_1 \Rightarrow R_1 = |T(i)| = 1$$

$$-i \in K_2 \Rightarrow R_2 = |T(-i)| = \left| \frac{1 + \sqrt{5}}{1 - \sqrt{5}} \cdot \frac{-i - i\sqrt{5}}{-i + i\sqrt{5}} \right| = \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{1 - \sqrt{5}} \right)^2 = k^2$$

Lösung 10:

f besitzt folgende Zerlegung in Real- und Imaginärteil

$$f(z_0) = z_0^2 = (x_0 + iy_0)^2 = x_0^2 - y_0^2 + i2x_0y_0 = f(x_0, y_0).$$

Man erhält

$$f_x(z_0) = f_x(x_0, y_0) = 2x_0 + i2y_0, \quad f_y(z_0) = f_y(x_0, y_0) = -2y_0 + i2x_0$$

$$\text{a) } A = \frac{1}{2} (f_x(z_0) - if_y(z_0)) = \frac{1}{2} (2x_0 + i2y_0 - i(-2y_0 + i2x_0)) = 2x_0 + i2y_0 = 2z_0$$

Durch rein formales Differenzieren wie im Reellen erhält man $\frac{\partial f}{\partial z}(z_0) = 2z_0$.

$$\text{b) } B = \frac{1}{2} (f_x(z_0) + if_y(z_0)) = \frac{1}{2} (2x_0 + i2y_0 + i(-2y_0 + i2x_0)) = 0$$

Durch rein formales Differenzieren wie im Reellen erhält man $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z_0) = 0$.

Lösung 11:

$$\text{a) (i) } f(z) = z \cdot \operatorname{Im}(z) = (x + iy)y = \underbrace{xy}_{=u(x,y)} + i \underbrace{y^2}_{=v(x,y)}$$

Wegen $u_x = y \neq 2y = v_y$ sind die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen nicht erfüllt und f ist nicht holomorph.

(ii) Mit $z = x + iy$ ergibt sich:

$$\begin{aligned} g(z) &= 2z + 2\bar{z} + 4i\operatorname{Im}z - 3i \\ &= 2(x + iy) + 2(x - iy) + 4iy - 3i = 4x + i(4y - 3) \end{aligned}$$

Da $\operatorname{Re} g(z) = 4x =: u(x, y)$ und

$\operatorname{Im} g(z) = 4y - 3 =: v(x, y)$ stetig partiell differenzierbar sind und die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen erfüllen

$$u_x = 4 = v_y, \quad v_x = 0 = -u_y$$

ist g holomorph.

$$\begin{aligned} \text{(iii) } \Delta u(x, y) &= (x^3 - 3xy^2 - 6xy - 3x^2)_{xx} + (x^3 - 3xy^2 - 6xy - 3x^2)_{yy} \\ &= 6x - 6 - 6x = -6 \end{aligned}$$

Damit ist u nicht harmonisch.

$$b) \quad \Delta u = (4x^2 - 4y^2 - 12x + 9)_{xx} + (4x^2 - 4y^2 - 12x + 9)_{yy} = 8 - 8 = 0$$

Damit $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ holomorph in $\mathbb{C}$ ist, müssen die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen erfüllt sein:

$$v_y = u_x = 8x - 12 \quad \Rightarrow \quad v = 8xy - 12y + c(x)$$

$$v_x = 8y + c'(x) = -u_y = -(-8y)$$

$$\Rightarrow \quad c'(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad c(x) = c \in \mathbb{R}$$

Da $v(x, y) = 8xy - 12y + c$ (und auch u) stetig partiell differenzierbar ist, ist f holomorph in $\mathbb{C}$ und v eine (die) konjugiert harmonische Funktion zu u .

Bemerkung:

Für $f(z) = (2z - 3)^2$ und $c = 0$ ergibt sich $u(x, y) = \operatorname{Re} f$ und $v(x, y) = \operatorname{Im} f$.

Lösung 12:

Der Hauptwert der Wurzelfunktion für $z = re^{i\varphi}$ ist festgelegt durch

$$w = \sqrt{z} := \sqrt{r}e^{i\varphi/2} \quad \text{mit} \quad -\pi < \varphi < \pi.$$

a) $c_1(t) = t$ für $t > 0$: positive reelle Achse

$$c_2(t) = 4e^{it} \text{ für } -\pi < t < \pi:$$

Kreis vom Radius $r = 4$ ohne den Punkt $z = -4$.

Schnittpunkt z_s von c_1 und c_2 : $c_1(4) = 4 = z_s = c_2(0)$

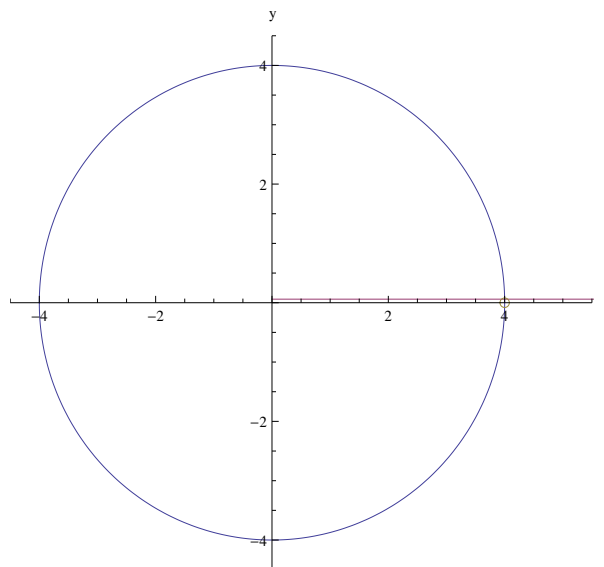


Bild 12 a): $c_1(t)$, $c_2(t)$ und Schnittpunkt $z_s = 4$ in der z -Ebene

Ableitungen der Kurven in den Schnittpunkten:

$$\dot{c}_1(t) = 1 \Rightarrow \dot{c}_1(4) = 1 = 1e^{i \cdot 0} \quad \text{und}$$

$$\dot{c}_2(t) = 4ie^{it} \Rightarrow \dot{c}_2(0) = 4i = 4e^{i\pi/2}$$

Schnittwinkel:

$$\begin{aligned} \gamma &= \angle(\dot{c}_2(0), \dot{c}_1(4)) = \arg \dot{c}_2(0) - \arg \dot{c}_1(4) \\ &= \arg(4i) - \arg 1 = \frac{\pi}{2} - 0 = \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

b) Für die Bildkurven erhält man:

$$d_1(t) := \sqrt{c_1(t)} = \sqrt{t} \quad \text{mit } t > 0: \quad \text{positive reelle Achse}$$

$$d_2(t) := \sqrt{c_2(t)} = 2e^{it/2} \quad \text{für } -\pi < t < \pi:$$

Halbkreis vom Radius $r = 2$ in der rechten Halbebene (ohne die Punkte $w = \pm 2i$).

$$\text{Schnittpunkt: } d_1(4) = 2 = d_2(0)$$

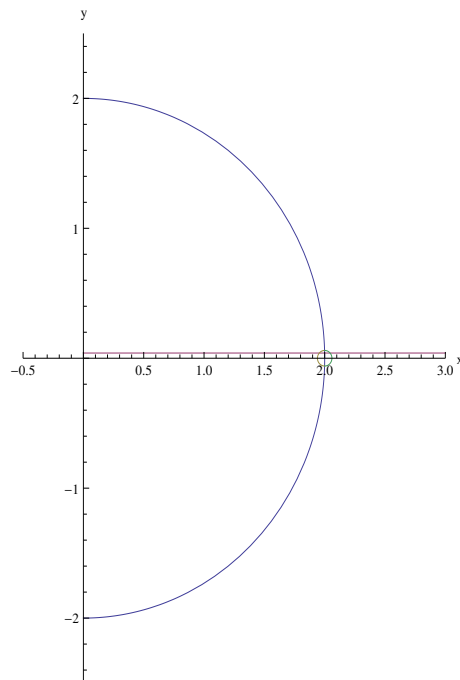


Bild 12 b): $d_1(t)$, $d_2(t)$ und Schnittpunkt $w_s = \sqrt{z_s} = 2$ in der w -Ebene

Ableitungen der Bildkurven in den Schnittpunkten:

$$\dot{d}_1(t) = \frac{1}{2\sqrt{t}} \Rightarrow \dot{d}_1(4) = \frac{1}{4} = \frac{1}{4}e^{i \cdot 0} \quad \text{und}$$

$$\dot{d}_2(t) = ie^{it/2} \Rightarrow \dot{d}_2(0) = i = e^{i\pi/2}$$

Schnittwinkel:

$$\begin{aligned}\tilde{\gamma} &= \angle(\dot{d}_2(0), \dot{d}_1(4)) = \arg \dot{d}_2(0) - \arg \dot{d}_1(4) \\ &= \arg(i) - \arg 1/4 = \frac{\pi}{2} - 0 = \frac{\pi}{2}\end{aligned}$$

$$\text{lokales Längenverhältnis: } \frac{|\dot{c}_2(0)|}{|\dot{c}_1(4)|} = \frac{|4i|}{|1|} = 4 = \frac{|i|}{|1/4|} = \frac{|\dot{d}_2(0)|}{|\dot{d}_1(4)|}$$

Bemerkung:

Der Streckungsfaktor $f'(c(t))$, der in

$$\dot{d}(t) = \frac{d}{dt}(f(c(t))) = f'(c(t))\dot{c}(t)$$

steckt, kürzt sich im Schnittpunkt heraus.

Der Schnittwinkel und das lokale Längenverhältnis bleiben erhalten, da die Kurven im Holomorphiegebiet von $\sqrt{z}$ verlaufen und dort $f'(z) = \frac{1}{2\sqrt{z}} \neq 0$ gilt.

Lösung 13:

a)

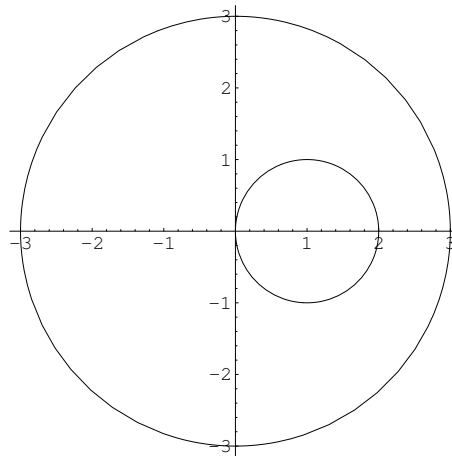


Bild 13 a): Kreise K_1 und K_2

Symmetrie zu $K_2 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 3\}$ und

$K_1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - 1| = 1\}$ liefert die Bedingungen

$$\begin{aligned}z_1 \bar{z}_2 &= 3^2 \Rightarrow \bar{z}_2 = \frac{9}{z_1} \\ (z_1 - 1)(\bar{z}_2 - 1) &= 1^2 \Rightarrow (z_1 - 1) \left(\frac{9}{z_1} - 1 \right) = 1 \\ \Rightarrow z_1^2 - 9z_1 + 9 &= 0 \\ \Rightarrow z_1 &= \frac{9 \pm 3\sqrt{5}}{2} \Rightarrow z_2 = \frac{9}{\bar{z}_1} = \frac{9 \mp 3\sqrt{5}}{2}\end{aligned}$$

- b) Mit $T(z) = k \cdot \frac{z - z_1}{z - z_2}$ und $k \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ gilt $w_1 = T(z_1) = 0$ und $w_2 = T(z_2) = \infty$.

T ist eine Möbius-Transformation wegen $k \neq 0$,
denn $ad - bc = k(z_1 - z_2) \neq 0$.

T ist holomorph für $z \in \mathbb{C} \setminus \{z_2\}$ und deshalb auch konform in diesem Gebiet, da
 $T'(z) = \frac{ad - bc}{(z - z_2)^2} \neq 0$ gilt.

- c) Da z_1 und z_2 symmetrisch zu K_1 und K_2 liegen, liegen auch $w_1 = 0$ und $w_2 = \infty$ symmetrisch zu den Bildkreisen $T(K_1)$ und $T(K_2)$. Da z_2 nicht auf $K_{1,2}$ liegt, liegt $w_2 = \infty$ nicht auf den Bildern. Damit müssen $T(K_1)$ und $T(K_2)$ Kreise um den Ursprung sein.

Da $z_3 = 0$ auf K_1 liegt, wird K_1 wegen $T(0) = 1$ auf den Einheitskreis abgebildet.

Aus $T(0) = 1 = k \cdot \frac{0 - z_1}{0 - z_2} = k \cdot \frac{z_1}{z_2}$ folgt $k = \frac{z_2}{z_1}$ und

$$T(z) = \frac{z_2(z - z_1)}{z_1(z - z_2)} = \frac{z_2 z - z_2 z_1}{z_1 z - z_1 z_2} = \frac{z_2 z - 9}{z_1 z - 9}$$

Der Radius R von $T(K_2)$ kann, da $z_4 = 3$ auf K_2 liegt, durch $R = |T(3)|$ bestimmt werden.

Konkret ergibt sich für $z_1 = \frac{9-3\sqrt{5}}{2} \approx 1.15$

$$R = \left| \frac{3 \cdot \frac{9+3\sqrt{5}}{2} - 9}{3 \cdot \frac{9-3\sqrt{5}}{2} - 9} \right| = \left| \frac{1 + \sqrt{5}}{1 - \sqrt{5}} \right| \approx 2.618$$

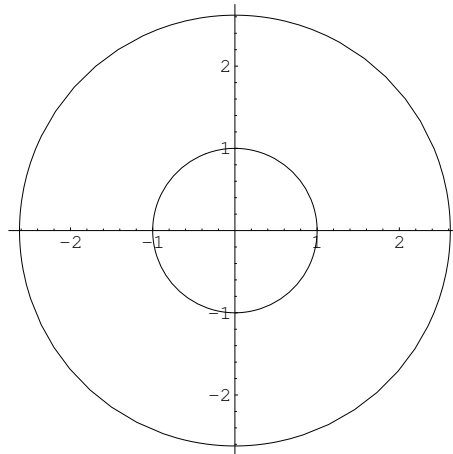


Bild 13 c): Kreise $T(K_1)$ und $T(K_2)$ mit $z_1 = \frac{9-3\sqrt{5}}{2} \approx 1.15$

Da z_1 im Inneren von K_1 liegt, wird das beschränkte zwischen den beiden Kreisen liegende Gebiet abgebildet auf den Kreisring

$$\{w \in \mathbb{C} \mid 1 < |w| < R = 2.618\}.$$

Im umgekehrten Fall, d.h. $z_1 = \frac{9+3\sqrt{5}}{2} \approx 7.85$, erhält man den Kreisring

$$\{w \in \mathbb{C} \mid R = 0.38 < |w| < 1\}.$$

Lösung 14:

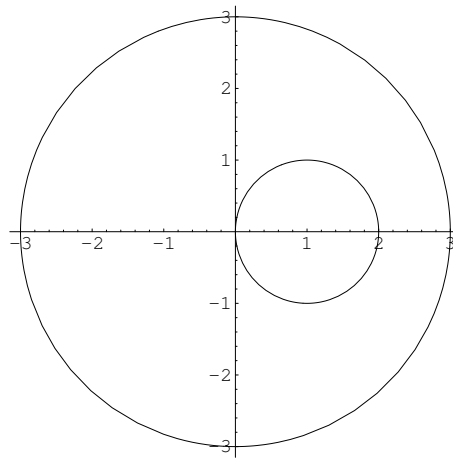


Bild 14 a): Gebiet D

Gesucht ist die reellwertige Funktion $u : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ für die mit $z = x + iy$ gilt

$$\begin{aligned} \Delta u(x, y) &= 0 & \text{für alle } (x, y)^T \in D \\ u(x, y) &= 2 & \text{für alle } (x, y)^T \in K_2 \\ u(x, y) &= 1 & \text{für alle } (x, y)^T \in K_1. \end{aligned}$$

Das Gebiet D wird jetzt durch die konforme Möbius-Transformation T aus Aufgabe 11 auf einen der Kreisringe, z.B. $T(D) = \{w \in \mathbb{C} \mid 1 < |w| < R = 2.618\}$ abgebildet.

Die konform verpflanzte Funktion lautet mit $T(z) = w = \xi + i\eta$

$$U(\xi, \eta) = U(w) := u(T^{-1}(w)) = u(z)$$

und erfüllt wegen des zweiten konformen Verpflanzungssatzes:

$\Delta u = \Delta U \cdot |T'(z)|^2$ und $T'(z) \neq 0$ das Randwertproblem

$$\begin{aligned} \Delta U(\xi, \eta) &= 0 & \text{für alle } (\xi, \eta)^T \in T(D) \\ U(\xi, \eta) &= 2 & \text{für alle } (\xi, \eta)^T \in T(K_2) \\ U(\xi, \eta) &= 1 & \text{für alle } (\xi, \eta)^T \in T(K_1). \end{aligned}$$

Dieses Problem im Kreisring $T(D)$ lässt sich besser in Polarkoordinaten lösen, deshalb wird erneut mit $\xi = r \cos \varphi$, $\eta = r \sin \varphi$,

$1 \leq r \leq R$, $0 \leq \varphi < 2\pi$ und $v(r, \varphi) := U(\xi(r, \varphi), \eta(r, \varphi))$ transformiert und das Problem lautet jetzt

$$\begin{aligned} v_{rr} + \frac{1}{r}v_r + \frac{1}{r^2}v_{\varphi\varphi} &= 0 \quad \text{für alle } 1 \leq r \leq R, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi \\ v(R, \varphi) &= 2, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi \\ v(1, \varphi) &= 1. \end{aligned}$$

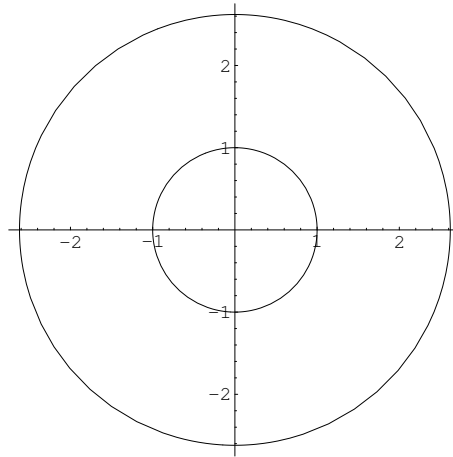


Bild 14 b): $T(D) = \{w \in \mathbb{C} \mid 1 < |w| < R = 2.618\}$ mit $z_1 = \frac{9-3\sqrt{5}}{2} \approx 1.15$

Auf Grund der Gebietssymmetrie und der Rotationssymmetrie der Randdaten liegt die Vermutung nahe, dass dieses Problem eine rotationssymmetrische Lösung besitzt, d.h. $v(r, \varphi) = v(r)$. Das Problem vereinfacht sich so zu einer Randwertaufgabe mit gewöhnlicher Differentialgleichung

$$\begin{aligned} v_{rr} + \frac{1}{r}v_r &= 0 \quad \text{für alle } 1 < r < R \\ v(R) &= 2, \\ v(1) &= 1, \end{aligned}$$

deren allgemeine Lösung lautet $v(r) = c_1 \ln r + c_2$.

Anpassen an die Randdaten liefert

$$1 = v(1) = c_1 \ln 1 + c_2 = c_2 \quad \text{und} \quad 2 = v(R) = c_1 \ln R + 1 \\ \Rightarrow c_1 = 1/\ln R.$$

Die gesuchte Lösung in Polarkoordinaten lautet somit

$$v(r, \varphi) = v(r) = \frac{\ln r}{\ln R} + 1.$$

Rücktransformation in die w -Ebene ergibt dort die Lösung

$$U(w) = \frac{\ln |w|}{\ln R} + 1.$$

Rücktransformation in die z -Ebene ergibt dort die Lösung

$$u(z) = \frac{\ln |T(z)|}{\ln R} + 1.$$

Mit (beachte $z_{1,2} \in \mathbb{R}$)

$$\begin{aligned} |T(z)| &= \left| \frac{z_2 z - 9}{z_1 z - 9} \right| = \left(\frac{z_2 z \bar{z}_2 \bar{z} - 9(z_2 z + \bar{z}_2 \bar{z}) + 81}{z_1 z \bar{z}_1 \bar{z} - 9(z_1 z + \bar{z}_1 \bar{z}) + 81} \right)^{1/2} \\ &= \left(\frac{z_2^2 z \bar{z} - 9z_2(z + \bar{z}) + 81}{z_1^2 z \bar{z} - 9z_1(z + \bar{z}) + 81} \right)^{1/2} \\ &= \left(\frac{z_2^2(x^2 + y^2) - 18z_2 x + 81}{z_1^2(x^2 + y^2) - 18z_1 x + 81} \right)^{1/2} \end{aligned}$$

ergibt sich in der (x, y) -Ebene die Lösungsdarstellung

$$u(x, y) = \frac{1}{2 \ln R} \ln \left(\frac{z_2^2(x^2 + y^2) - 18z_2 x + 81}{z_1^2(x^2 + y^2) - 18z_1 x + 81} \right) + 1.$$

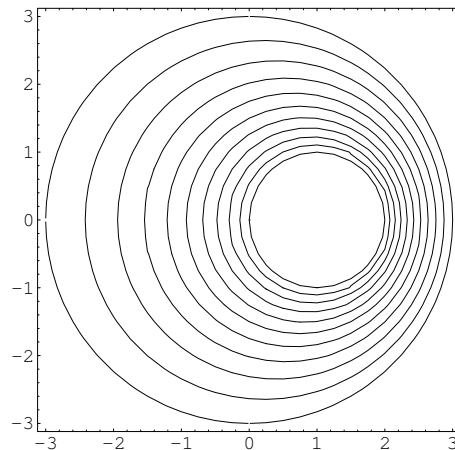


Bild 14 c): Höhenlinien der Lösung $u(x, y)$

Lösung 15:

$$\text{a) } \int_0^1 (2 + 3it)^2 dt = \int_0^1 4 - 9t^2 + 12it dt$$

$$= \int_0^1 4 - 9t^2 dt + i \int_0^1 12t dt = 4t - 3t^3 \Big|_0^1 + 6it^2 \Big|_0^1 = 1 + 6i$$

$$\text{b) } \int_{-1}^1 \frac{t^2 + 1}{1 + it} dt = \int_{-1}^1 \frac{(t^2 + 1)(1 - it)}{t^2 + 1} dt = \int_{-1}^1 1 dt - i \int_{-1}^1 t dt = t \Big|_{-1}^1 - i \frac{t^2}{2} \Big|_{-1}^1 = 2$$

c) $c_1(t) = 1 - t + it, \quad 0 \leq t \leq 1$

$$\int_{c_1} \operatorname{Im}(z) dz = \int_0^1 \operatorname{Im}(c_1(t)) \cdot \dot{c}_1(t) dt = \int_0^1 (-1 + i)t dt = -\frac{1}{2} + \frac{i}{2}$$

$c_2(t) = e^{it}, \quad 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$

$$\begin{aligned} \int_{c_2} \operatorname{Im}(z) dz &= \int_0^{\pi/2} \operatorname{Im}(c_2(t)) \cdot \dot{c}_2(t) dt = \int_0^{\pi/2} \sin t (-\sin t + i \cos t) dt \\ &= \frac{1}{2}(-t + \sin t \cos t + i \sin^2 t) \Big|_0^{\pi/2} = -\frac{\pi}{4} + \frac{i}{2} \end{aligned}$$

d) (i) $\oint_c \bar{z} dz = \int_0^{2\pi} e^{-it} i e^{it} dt = \int_0^{2\pi} i dt = 2\pi i$

(ii) $\oint_c z^2 dz = \int_0^{2\pi} e^{2it} i e^{it} dt = i \int_0^{2\pi} e^{3it} dt = i \int_0^{2\pi} \cos(3t) + i \sin(3t) dt = 0$

Lösung 16:

a) direkt:

Kurvenparametrisierung: $c(t) = 2it + 1 - i, \quad 0 \leq t \leq 1 \quad \Rightarrow \quad \dot{c}(t) = 2i$

$$\begin{aligned} \int_c z^3 + 4 dz &= \int_0^1 ((c(t))^3 + 4) \dot{c}(t) dt = \int_0^1 ((2it + 1 - i)^3 + 4) 2i dt \\ &= \int_0^1 (-8it^3 - 12(1 - i)t^2 + 12t - 2i - 2 + 4) 2i dt \\ &= \int_0^1 16t^3 - 24(1 + i)t^2 + 24it + 4 + 4i dt \\ &= (4t^4 - 8(1 + i)t^3 + 12it^2 + (4 + 4i)t) \Big|_0^1 \\ &= 4 - 8(1 + i) + 12i + (4 + 4i) = 8i \end{aligned}$$

Stammfunktion:

$$\begin{aligned}
\int_c z^3 + 4 \, dz &= \int_{1-i}^{1+i} z^3 + 4 \, dz = \left(\frac{z^4}{4} + 4z \right) \Big|_{1-i}^{1+i} \\
&= \left(\frac{(1+i)^4}{4} - \frac{(1-i)^4}{4} + 4(1+i - (1-i)) \right) = \frac{-4}{4} - \frac{-4}{4} + 8i = 8i
\end{aligned}$$

b) direkt: $c(t) = i\pi t$ mit $-1 \leq t \leq 0$

$$\begin{aligned}
\int_c z e^z \, dz &= \int_{-1}^0 \dot{c}(t) c(t) e^{c(t)} \, dt = \int_{-1}^0 i\pi i\pi t e^{i\pi t} \, dt = -\pi^2 \int_{-1}^0 t e^{i\pi t} \, dt \\
&= -\pi^2 \left(\frac{t e^{i\pi t}}{i\pi} \Big|_{-1}^0 - \frac{1}{i\pi} \int_{-1}^0 e^{i\pi t} \, dt \right) = -\pi^2 \left(\frac{t e^{i\pi t}}{i\pi} - \frac{e^{i\pi t}}{(i\pi)^2} \right) \Big|_{-1}^0 \\
&= e^{i\pi t} (i\pi t - 1) \Big|_{-1}^0 = -1 - e^{-i\pi} (-i\pi - 1) \\
&= -1 + (-i\pi - 1) = -2 - i\pi
\end{aligned}$$

Stammfunktion:

$$\begin{aligned}
\int_c z e^z \, dz &= \int_{-i\pi}^0 z e^z \, dz = e^z (z - 1) \Big|_{-i\pi}^0 = -1 - e^{-i\pi} (-i\pi - 1) \\
&= -1 + (-i\pi - 1) = -2 - i\pi
\end{aligned}$$

c) (i) $c_1(t) = it$ mit $\pi/4 \leq t \leq 3\pi/4$

direkt:

$$\int_{c_1} \frac{1}{z} \, dz = \int_{\pi/4}^{3\pi/4} \frac{i}{it} \, dt = \ln t \Big|_{\pi/4}^{3\pi/4} = \ln \frac{3\pi}{4} - \ln \frac{\pi}{4} = \ln 3$$

Stammfunktion:

$$\int_{c_1} \frac{1}{z} \, dz = \ln z \Big|_{\pi i/4}^{3\pi i/4} = \ln \left| \frac{3\pi i}{4} \right| + i\frac{\pi}{2} - \left(\ln \left| \frac{\pi i}{4} \right| + i\frac{\pi}{2} \right) = \ln \frac{3\pi}{4} - \ln \frac{\pi}{4} = \ln 3$$

(ii) $c_2(t) = e^{it}$ mit $\pi/4 \leq t \leq 3\pi/4$

direkt:

$$\int_{c_2} \frac{1}{z} \, dz = \int_{\pi/4}^{3\pi/4} \frac{ie^{it}}{e^{it}} \, dt = \int_{\pi/4}^{3\pi/4} i \, dt = it \Big|_{\pi/4}^{3\pi/4} = \frac{\pi i}{2}$$

Stammfunktion:

$$\int_{c_2} \frac{1}{z} \, dz = \ln z \Big|_{(1+i)/\sqrt{2}}^{(-1+i)/\sqrt{2}} = \ln \left| \frac{-1+i}{\sqrt{2}} \right| + i\frac{3\pi}{4} - \ln \left| \frac{1+i}{\sqrt{2}} \right| - i\frac{\pi}{4} = \frac{\pi i}{2}$$

d) direkt: $c(\varphi) = e^{i\varphi}$ mit $0 \leq \varphi \leq \pi/2$

$$\begin{aligned} \int_1^i \ln z \, dz &= \int_0^{\pi/2} \ln(e^{i\varphi}) i e^{i\varphi} \, d\varphi = i \int_0^{\pi/2} e^{i\varphi} (\ln |e^{i\varphi}| + i\varphi) \, d\varphi \\ &= - \int_0^{\pi/2} e^{i\varphi} \varphi \, d\varphi = \left(-\frac{\varphi}{i} e^{i\varphi} \right) \Big|_0^{\pi/2} + \frac{1}{i} \int_0^{\pi/2} e^{i\varphi} \, d\varphi \\ &= -\frac{\pi}{2} - e^{i\varphi} \Big|_0^{\pi/2} = -\frac{\pi}{2} - i + 1 \end{aligned}$$

Stammfunktion: In der geschlitzten Ebene $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-^0$ ist $\ln z$ holomorph.

$$\begin{aligned} \int_1^i 1 \cdot \ln z \, dz &= z \ln z \Big|_1^i - \int_1^i z \cdot \frac{1}{z} \, dz = (z (\ln |z| + i \arg z) - z) \Big|_1^i \\ &= i \left(\ln |i| + i \frac{\pi}{2} \right) - (i - 1) = -\frac{\pi}{2} - i + 1 \end{aligned}$$

Lösung 17:

a)

$$0 = z^2 + 4 = (z + 2i)(z - 2i)$$

Die Singularitäten $z_{1,2} = \pm 2i$ liegen nicht im Kreis $|z| = 1$.

Cauchyscher Integralsatz:

$$\oint_{|z|=1} \frac{1}{z^2 + 4} \, dz = 0$$

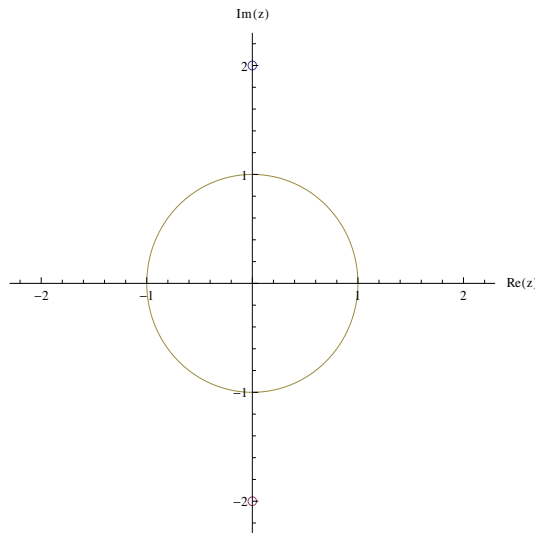


Bild 17 a): Kurve $c : |z| = 1$

b)

Isolierte Singularität bei $z_0 = -2$
wird nicht von $c : |z + 1 - i| = 1$
umschlossen

$$\oint_{|z+1-i|=1} \frac{1}{z+2} dz = 0$$

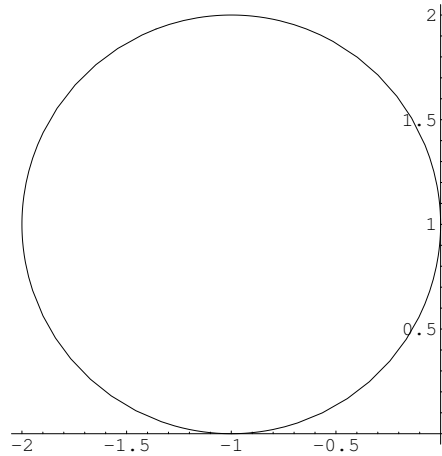


Bild 17 b): Kurve $c : |z + 1 - i| = 1$

$$c) \frac{z^2 - 2z + 2}{z^3 - z^2 + 2} = \frac{(z - 1 - i)(z - 1 + i)}{(z + 1)(z - 1 - i)(z - 1 + i)} = \frac{1}{z + 1}$$

Isolierte aber hebbare Singularitäten bei $z_1 = 1 + i$, $z_2 = 1 - i$:

Isolierte und nicht hebbare Singularität bei $z_0 = -1$:

$$z_0 \text{ wird von } c_1 : |z| = 0.5 \text{ nicht umschlossen: } \oint_{c_1} \frac{1}{z+1} dz = 0$$

$$z_0 \text{ wird von } c_2 : |z| = 1.5 \text{ umschlossen: } \oint_{c_2} \frac{1}{z+1} dz = 2\pi i$$

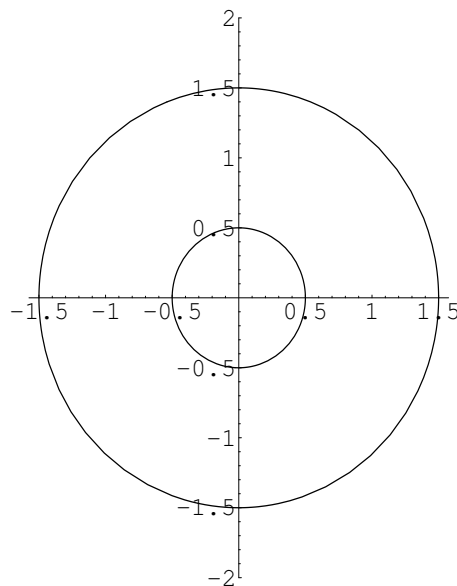


Bild 17 c): Kurven $c_1 : |z| = 0.5$ und $c_2 : |z| = 1.5$

d)

$$\begin{aligned}
 0 &= z^2 + 4z + 5 \\
 &= (z + 2 + i)(z + 2 - i) \\
 \Rightarrow z_{1,2} &= -2 \pm i
 \end{aligned}$$

Die Singularität $z_1 = -2 + i$ liegt auf dem Kreis $|z + 1 - i| = 1$.

Damit ist das Integral nicht erklärt.

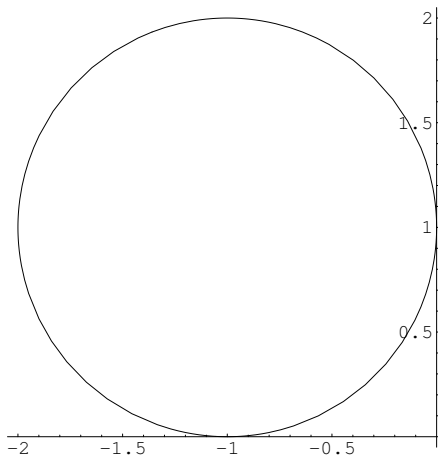


Bild 17 d): Kurve $c : |z + 1 - i| = 1$

$$e) \frac{z^3}{z^2 - iz + 6} = z^3 \cdot \frac{1}{z - 3i} \cdot \frac{1}{z + 2i},$$

Singularitäten bei $z_0 = 3i$ und $z_1 = -2i$:

$c_1 : |z| = 2.5$ umschließt nur die Singularität $z_1 = -2i$

$$f(z) = z^3 \cdot \frac{1}{z - 3i} \Rightarrow f(-2i) = \frac{(-2i)^3}{-2i - 3i} = \frac{8i}{-5i} = -\frac{8}{5}$$

$$\oint_{c_1} \frac{f(z)}{z + 2i} dz = 2\pi i f(-2i) = -\frac{16\pi i}{5}$$

$c_2 : |z - i| = 2.5$ umschließt nur die Singularität $z_1 = 3i$

$$f(z) = z^3 \cdot \frac{1}{z + 2i} \Rightarrow f(3i) = \frac{(3i)^3}{3i + 2i} = \frac{-27i}{5i} = -\frac{27}{5}$$

$$\oint_{c_2} \frac{f(z)}{z + 2i} dz = 2\pi i f(3i) = -\frac{54\pi i}{5}$$

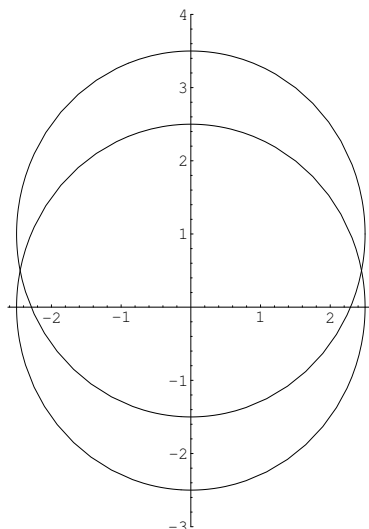


Bild 17 e): Kurven $c_1 : |z| = 2.5$ und $c_2 : |z - i| = 2.5$

f) $c: |z - i| = 3$ umschließt zunächst beide Singularität $z_0 = -2$ und $z_1 = 1$

Partialbruchzerlegung:
$$\frac{z^2 + 3z - 1}{z^2 + z - 2} = 1 + \frac{1}{z - 1} + \frac{1}{z + 2},$$

$$\oint_c \frac{z^2 + 3z - 1}{z^2 + z - 2} dz = \oint_c dz + \oint_c \frac{1}{z - 1} dz + \oint_c \frac{1}{z + 2} dz = 0 + 2\pi i + 2\pi i = 4\pi i$$

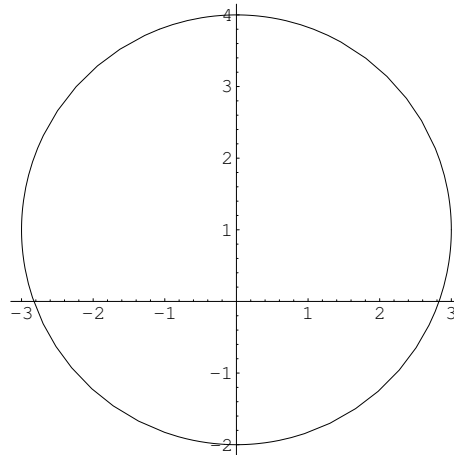


Bild 17 f): Kurve $c: |z - i| = 3$

Lösung 18:

a)

Die Singularität $z_1 = 0$ liegt im Kreis $|z| = 1$.

verallgemeinerte Cauchysche Integralformel:

$$\begin{aligned} \oint_{|z|=1} \frac{\cos z}{z^3} &= 2\pi i \frac{(\cos z)''}{2!} \Big|_{z=0} \\ &= -\pi i \cos 0 = -\pi i \end{aligned}$$

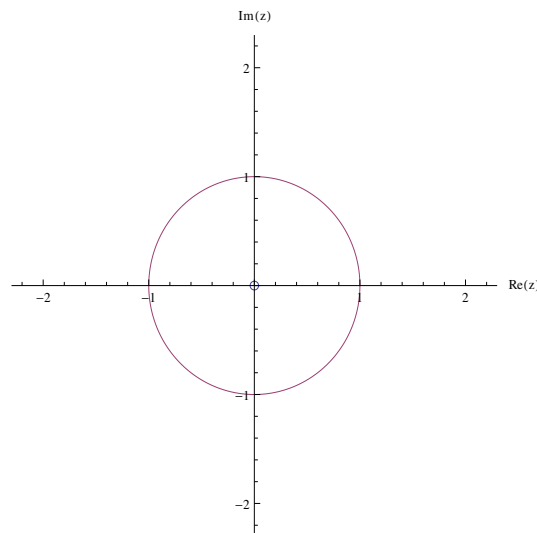


Bild 18 a): Kurve $c: |z| = 1$

b)

$$\frac{1}{z^5 + 2z^4} = \frac{1}{z^4} \cdot \frac{1}{z + 2}$$

Die Singularität $z_1 = 0$ liegt im Kreis $|z| = 1$ und die Singularität $z_2 = -2$ nicht.

verallgemeinerte Cauchysche Integralformel:

$$\begin{aligned} \oint_{|z|=1} \frac{1}{z^5 + 2z^4} &= \frac{2\pi i}{3!} \left(\frac{1}{z+2} \right)''' \Big|_{z=0} \\ &= \frac{2\pi i(-1)(-2)(-3)}{3!} \cdot \frac{1}{(z+2)^4} \Big|_{z=0} \\ &= -\frac{\pi i}{8} \end{aligned}$$

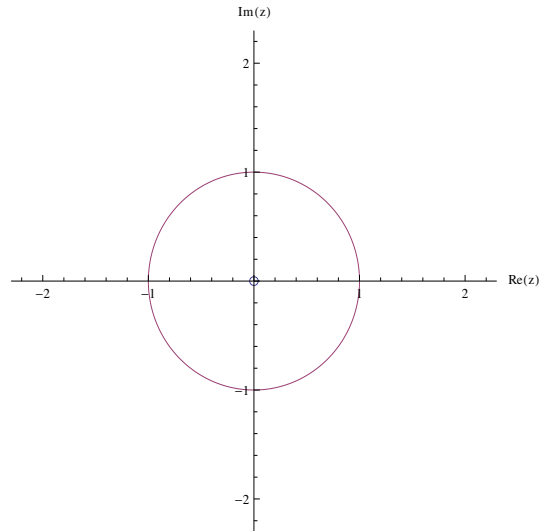


Bild 18 b): Kurve $c: |z| = 1$

- c) Isolierte Singularität bei $z_0 = 0$
liegt in $c: |z| = \pi$

$$\begin{aligned} \oint_{|z|=\pi} z^2 + \frac{e^z}{z^2} dz &= \oint_{|z|=\pi} z^2 dz + \oint_{|z|=\pi} \frac{e^z}{z^2} dz \\ &= 0 + 2\pi i \frac{(e^z)'}{1!} \Big|_{z=0} = 2\pi i \end{aligned}$$

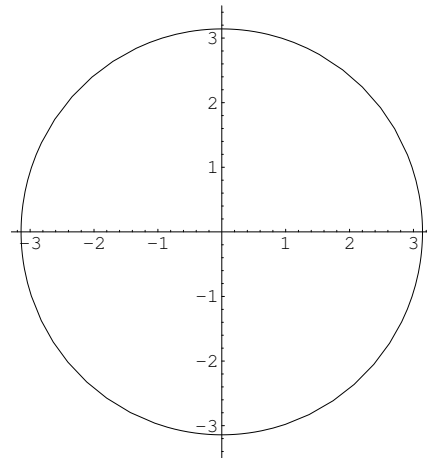


Bild 18 c): Kurve $c: |z| = \pi$

d) Einzige Singularität bei $z_0 = 1 + i$,

$\ln z$ ist holomorph im von der Kurve
 $c: |z - 1 - 2i| = 2$
 umschlossenen Gebiet.

$$\begin{aligned} \ln^{(iv)} z &= -\frac{6}{z^4} \Rightarrow \ln^{(iv)}(1+i) \\ &= -\frac{6}{(1+i)^4} = -\frac{6}{(\sqrt{2}e^{i\pi/4})^4} = \frac{3}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \oint_c \frac{\ln z}{(z-1-i)^5} dz \\ = \frac{2\pi i \ln^{(iv)}(1+i)}{4!} = \frac{\pi i}{8} \end{aligned}$$

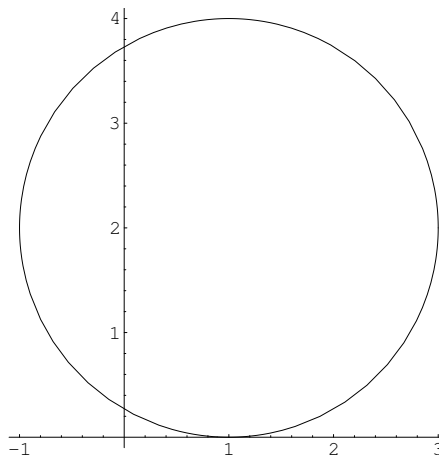


Bild 18 d): Kurve $c: |z - 1 - 2i| = 2$

Lösung 19:

a) Der Integrand f wird unter Berücksichtigung des Entwicklungspunktes $z_0 = 1$ so umgeformt, dass die Summenformel für die geometrische Reihe angewendet werden kann.

$$\begin{aligned} f(\xi) &= \frac{1}{5-3\xi} = \frac{1}{5-3(\xi-1)-3} = \frac{1}{2-3(\xi-1)} \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1-\frac{3(\xi-1)}{2}} = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{3(\xi-1)}{2} \right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{2^{n+1}} (\xi-1)^n \end{aligned}$$

Diese Reihe konvergiert für $|3(\xi-1)/2| < 1$ gleichmäßig, darf also in der Kreisscheibe $|\xi-1| < 2/3 =: R$ gliedweise integriert werden:

$$\begin{aligned} F(z) &= \int_1^z \frac{d\xi}{5-3\xi} = \int_1^z \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{2^{n+1}} (\xi-1)^n d\xi \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{2^{n+1}} \int_1^z (\xi-1)^n d\xi = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{(n+1)2^{n+1}} (z-1)^{n+1}. \end{aligned}$$

$$(i) \quad f(z) = \frac{3}{z^2 + 2z + 5} = \frac{3}{(z - (-1 + 2i))(z - (-1 - 2i))}$$

Die Singularitäten liegen bei $z_1 = -1 + 2i$ und $z_2 = -1 - 2i$. Damit ergibt sich der Konvergenzradius der Taylorreihe zum Entwicklungspunkt z_0 durch

$$r = \min\{|z_1 - z_0|, |z_2 - z_0|\}.$$

$$z_0 = i:$$

$$r_1 = \min\{|-1 + 2i - i|, |-1 - 2i - i|\} = \min\{\sqrt{2}, \sqrt{10}\} = \sqrt{2}$$

$$z_0 = 0: \quad r_2 = \min\{|-1 + 2i|, |-1 - 2i|\} = \sqrt{5}$$

(ii) Die Singularitäten von $f(z) = \frac{2}{e^z - 1}$ ergeben sich aus

$$0 = e^z - 1 \Leftrightarrow 1 = e^x \cos y + ie^x \sin y$$

$$\Rightarrow e^x \sin y = 0 \Rightarrow y = k\pi$$

$$\Rightarrow e^x \cos(k\pi) = e^x (-1)^k = 1$$

$$\Rightarrow x = 0 \text{ und } k = 2n \text{ mit } n \in \mathbb{Z}.$$

Die Singularitäten liegen also bei $\tilde{z}_n = 2n\pi i$.

Der Konvergenzradius für $z_0 = 2\pi(1+i)$ ergibt sich durch:

$$r = \min_n \{|\tilde{z}_n - z_0|\} = \min_n \{|2n\pi i - 2\pi - 2\pi i|\} = |-2\pi| = 2\pi$$

(iii) Für die Funktion $f(z) = \frac{z}{\ln(3-2z)}$ bestehen folgende Definitionslücken:

1. Fall:

Der Hauptwert des Logarithmus von $\ln(3-2z)$ ist nur in der geschlitzten Ebene definiert, d.h. ausgenommen sind reelle Zahlen x mit $3-2x \leq 0 \Leftrightarrow \frac{3}{2} \leq x$.

2. Fall:

Nennernullstellen müssen ausgenommen werden:

$$0 = \ln(3-2z) = \ln|3-2z| + i \arg(3-2z) \Rightarrow$$

$\arg(3-2z) = 0$, also ist z reell und $|3-2z| = 1$ ergibt wegen des 1. Falles nur noch $z = 1$.

Der Konvergenzradius ist gegeben durch den kleinsten Abstand des Entwicklungspunktes z_0 zur nächsten Definitionslücke.

Für $z_0 = \frac{11}{8}$ ergibt sich

$$r_1 = \min \left\{ \left| \frac{3}{2} - \frac{11}{8} \right|, \left| 1 - \frac{11}{8} \right| \right\} = \min \left\{ \frac{1}{8}, \frac{3}{8} \right\} = \frac{1}{8}.$$

Für $z_0 = 0$ ergibt sich $r_2 = \min \left\{ \left| \frac{3}{2} - 0 \right|, |1 - 0| \right\} = 1$.

Lösung 20:

Aufgrund der Lage des Entwicklungspunktes bei $z_0 = i$ und der beiden Singularitäten $z_1 = 2$ und $z_2 = -3$ kann man ablesen, dass eine Taylor-Reihenentwicklung in der Kreisscheibe $|z-i| < \sqrt{5}$ vorliegen wird, eine Laurent-Reihenentwicklung im Kreisring $\sqrt{5} < |z-i| < \sqrt{10}$ und eine davon verschiedene Laurent-Reihenentwicklung im Außenraum $\sqrt{10} < |z-i|$.

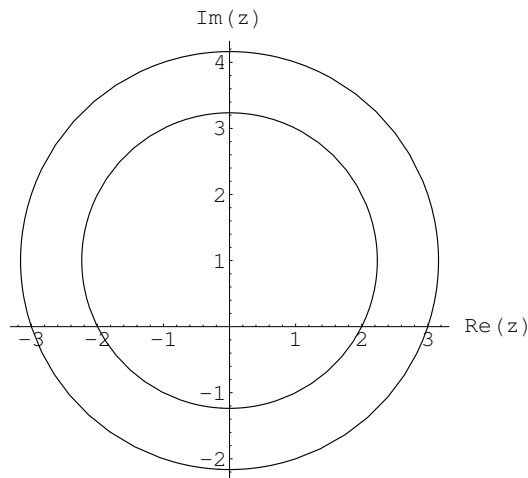


Bild 20): Konvergenzbereiche der Laurent-Reihenentwicklungen um $z_0 = i$

Mit Hilfe der Summenformel der geometrischen Reihe im entsprechenden Konvergenzbereich können die Partialbrüche durch Reihenentwicklungen dargestellt werden:

$$\begin{aligned}
 |z - i| < \sqrt{5} & : \frac{2}{z - 2} = \frac{2}{-2 + i + (z - i)} = \frac{2}{-2 + i} \cdot \frac{1}{1 - (z - i)/(2 - i)} \\
 & = \frac{2}{-2 + i} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z - i)^n}{(2 - i)^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{-2}{(2 - i)^{n+1}} (z - i)^n \\
 |z - i| > \sqrt{5} & : \frac{2}{z - 2} = \frac{2}{-2 + i + (z - i)} = \frac{2}{z - i} \cdot \frac{1}{1 - (2 - i)/(z - i)} \\
 & = \frac{2}{z - i} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2 - i)^n}{(z - i)^n} = \sum_{n=-\infty}^{-1} \frac{2}{(2 - i)^{n+1}} (z - i)^n
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 |z - i| < \sqrt{10} & : \frac{3}{z + 3} = \frac{3}{3 + i + (z - i)} = \frac{3}{3 + i} \cdot \frac{1}{1 + (z - i)/(3 + i)} \\
 & = \frac{3}{3 + i} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(3 + i)^n} (z - i)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{-3}{(-3 - i)^{n+1}} (z - i)^n \\
 |z - i| > \sqrt{10} & : \frac{3}{z + 3} = \frac{3}{3 + i + (z - i)} = \frac{3}{z - i} \cdot \frac{1}{1 + (3 + i)/(z - i)} \\
 & = \frac{3}{z - i} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (3 + i)^n}{(z - i)^n} = \sum_{n=-\infty}^{-1} \frac{3}{(-3 - i)^{n+1}} (z - i)^n
 \end{aligned}$$

Taylor-Reihe mit Konvergenz in der Kreisscheibe $|z - i| < \sqrt{5}$:

$$f(z) = \frac{3}{z+3} + \frac{2}{z-2} = \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{-2}{(2-i)^{n+1}} + \frac{-3}{(-3-i)^{n+1}} \right) (z-i)^n}_{\text{Nebenteil}} .$$

Laurent-Reihe mit Konvergenz im Kreisring $\sqrt{5} < |z - i| < \sqrt{10}$:

$$f(z) = \frac{3}{z+3} + \frac{2}{z-2} = \underbrace{\sum_{n=-\infty}^{-1} \frac{2}{(2-i)^{n+1}} (z-i)^n}_{\text{Hauptteil}} + \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{-3}{(-3-i)^{n+1}} (z-i)^n}_{\text{Nebenteil}} .$$

Laurent-Reihe mit Konvergenz im Außenring $\sqrt{10} < |z - i|$:

$$f(z) = \frac{3}{z+3} + \frac{2}{z-2} = \underbrace{\sum_{n=-\infty}^{-1} \left(\frac{2}{(2-i)^{n+1}} + \frac{3}{(-3-i)^{n+1}} \right) (z-i)^n}_{\text{Hauptteil}} .$$

Lösung 21:

a) Einzige Singularität von f ist der Entwicklungspunkt $z_0 = 0$. Für $|z| > 0$ gilt:

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{e^z - 1 - z - z^2/2}{z^2} = \frac{1}{z^2} \left(\frac{z^3}{3!} + \frac{z^4}{4!} + \frac{z^5}{5!} + \dots \right) \\ &= \frac{z}{3!} + \frac{z^2}{4!} + \frac{z^3}{5!} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{(n+2)!} \Rightarrow a_{-1} = 0 \end{aligned}$$

b) Einzige Singularität von f ist der Entwicklungspunkt $z_0 = 0$. Für $|z| > 0$ gilt:

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{\cos z}{z^5} = \frac{1}{z^5} \left(1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} \pm \dots \right) \\ &= \left(\frac{1}{z^5} - \frac{1}{2!} \cdot \frac{1}{z^3} + \frac{1}{4!} \cdot \frac{1}{z} - \frac{z}{6!} \pm \dots \right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n-5} \Rightarrow a_{-1} = \frac{1}{4!} \end{aligned}$$

c) Einzige Singularität von f ist der Entwicklungspunkt $z_0 = -\pi$. Für $|z + \pi| > 0$ gilt:

$$\begin{aligned}
 f(z) &= z \sin\left(\frac{1}{z + \pi}\right) \\
 &= (z + \pi - \pi) \left(\frac{1}{z + \pi} - \frac{1}{3!} \cdot \frac{1}{(z + \pi)^3} + \frac{1}{5!} \cdot \frac{1}{(z + \pi)^5} \mp \dots \right) \\
 &= \left(1 - \frac{1}{3!} \cdot \frac{1}{(z + \pi)^2} + \frac{1}{5!} \cdot \frac{1}{(z + \pi)^4} \mp \dots \right) \\
 &\quad + \left(-\frac{\pi}{z + \pi} + \frac{\pi}{3!} \cdot \frac{1}{(z + \pi)^3} \mp \dots \right) \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \left(\frac{1}{z + \pi} \right)^{2n} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\pi(-1)^{n+1}}{(2n+1)!} \left(\frac{1}{z + \pi} \right)^{2n+1} \\
 &\Rightarrow a_{-1} = -\pi
 \end{aligned}$$

Lösung 22:

a) Die Singularitäten von

$$f(z) = \frac{1}{z^4 + z^2} = \frac{1}{z^2(z^2 + 1)} = \frac{1}{z^2} - \frac{1}{z^2 + 1}$$

sind gegeben durch die Nennernullstellen, die keine Zählernullstellen sind:

$z_1 = i$ und $z_2 = -i$ sind Pole 1. Ordnung und $z_3 = 0$ ist Pol 2. Ordnung.

$$\text{Res}(f; z_1) = \left. \frac{1}{(z^4 + z^2)'} \right|_{z=i} = \left. \frac{1}{4z^3 + 2z} \right|_{z=i} = \frac{1}{4i^3 + 2i} = \frac{i}{2}$$

$$\text{Res}(f; z_2) = (z + i) \cdot \left. \frac{1}{z^4 + z^2} \right|_{z=-i} = \left. \frac{1}{z^2(z - i)} \right|_{z=-i} = \frac{1}{(-i)^2(-2i)} = -\frac{i}{2}$$

$$\text{Res}(f; z_3) = \frac{1}{1!} \left(z^2 \left(\frac{1}{z^4 + z^2} \right) \right)' \Big|_{z=0} = \left(\frac{1}{z^2 + 1} \right)' \Big|_{z=0} = -\frac{2z}{(z^2 + 1)^2} \Big|_{z=0} = 0$$

Die Laurent-Entwicklung im Außengebiet $|z| > 1$ ergibt sich durch:

$$f(z) = \frac{1}{z^4 + z^2} = \frac{1}{z^4} \cdot \frac{1}{1 + 1/z^2} = \frac{1}{z^4} \left(1 - \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z^4} \dots \right) = \frac{1}{z^4} - \frac{1}{z^6} + \frac{1}{z^8} \dots$$

$$\text{b) } f(z) = \sin \frac{1}{z} = \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}}_{=: a_n} \frac{1}{z^{2n+1}} = \frac{1}{z} - \frac{1}{3!z^3} + \frac{1}{5!z^5} + \dots$$

Die einzige Singularität $z_0 = 0$ ist wesentlich mit

$\text{Res}(f; z_0) = a_{-1} = 1$.

$$c) \quad f(z) = \frac{z - \sin z}{z^2} = \frac{1}{z^2} \left(\frac{z^3}{3!} - \frac{z^5}{5!} + \frac{z^7}{7!} + \dots \right) = \frac{z}{3!} - \frac{z^3}{5!} + \frac{z^5}{7!} + \dots$$

Die einzige Singularität $z_0 = 0$ ist hebbar mit

$$\text{Res}(f; z_0) = a_{-1} = 0.$$

d) Die Singularitäten von $f(z) = \coth z = \frac{\cosh z}{\sinh z}$ ergeben sich aus:

$$\begin{aligned} 0 &= \sinh z = \frac{1}{2} (e^z - e^{-z}) = \frac{1}{2} (e^{x+iy} - e^{-x-iy}) \\ &= \frac{1}{2} (e^x (\cos y + i \sin y) - e^{-x} (\cos y - i \sin y)) \\ &= \cos y \sinh x + i \sin y \cosh x. \end{aligned}$$

Die Lösungen sind gegeben durch $y = k\pi, k \in \mathbb{Z}$ und $x = 0$. Die Nennernullstellen $z_k = ik\pi$ sind einfach und auch keine Zählernullstellen, denn

$$(\sinh z)'|_{z=ik\pi} = \cosh ik\pi = \cos k\pi \neq 0.$$

Also sind z_k Pole 1. Ordnung und man erhält

$$\text{Res}(f; z_k) = \left(\frac{\cosh z}{(\sinh z)'} \right) \Big|_{z=z_k} = \left(\frac{\cosh z}{\cosh z} \right) \Big|_{z=z_k} = 1.$$

Es gibt kein Außengebiet ohne Singularitäten.

Lösung 23:

a) Aus der Faktorisierung

$$z^4 - z^2 - 2z + 2 = (z + 1 - i)(z + 1 + i)(z - 1)^2$$

ergeben sich die Nennernullstellen, die keine Zählernullstellen sind

$$z_0 = -1 + i, \quad z_1 = -1 - i, \quad z_2 = 1.$$

Damit sind z_0 und z_1 Pole 1. Ordnung und z_2 ist Pol 2. Ordnung.

Der Hauptteil der Laurententwicklung in z_k , $k = 0, 1$ besitzt damit die Form

$$h(z, z_k) = \frac{a_{-1,k}}{z - z_k}, \quad \text{wobei} \quad a_{-1,k} = \text{Res}(f(z); z_k)$$

gilt. Für $z_0 = -1 + i$ ergibt sich

$$\begin{aligned} \text{Res}(f(z); -1 + i) &= \frac{25}{(z + 1 + i)(z - 1)^2} \Big|_{z=-1+i} \\ &= \frac{25}{(-1 + i + 1 + i)(-1 + i - 1)^2} \\ &= \frac{25}{2i(3 - 4i)} = \frac{25(3 + 4i)}{2i \cdot 25} = \frac{4 - 3i}{2} \end{aligned}$$

Zum gleichen Ergebnis führt die Taylor-Reihenentwicklung des holomorphen Anteils von f um $z_0 = -1 + i$:

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{z+1-i} \cdot \underbrace{\frac{25}{(z+1+i)(z-1)^2}}_{= g_1(z), (\text{holom.})} \\ &= \frac{1}{z+1-i} (g_1(-1+i) + g_1'(-1+i)(z+1-i) + \dots) \end{aligned}$$

mit $g_1(-1+i) = \text{Res}(f(z); -1+i) = \frac{4-3i}{2}$. Insgesamt erhält man also

$$\begin{aligned} f(z) &= \underbrace{\frac{4-3i}{2(z+1-i)}}_{= h(z, -1+i)} + \underbrace{g_1'(-1+i) + \dots}_{\text{Nebenteil}} \end{aligned}$$

Für $z_1 = -1 - i$ ergibt sich entsprechend

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{z+1+i} \cdot \underbrace{\frac{25}{(z+1-i)(z-1)^2}}_{= g_2(z), (\text{holom.})} \\ &= \frac{1}{z+1+i} (g_2(-1-i) + g_2'(-1-i)(z+1+i) + \dots) \end{aligned}$$

mit $g_2(-1-i) = \text{Res}(f(z); -1-i) = \frac{4+3i}{2}$. Insgesamt erhält man also

$$\begin{aligned} f(z) &= \underbrace{\frac{4+3i}{2(z+1+i)}}_{= h(z, -1-i)} + \underbrace{g_2'(-1-i) + \dots}_{\text{Nebenteil}} \end{aligned}$$

Für den Pol 2. Ordnung $z_2 = 1$ erhält man den Hauptteil der Laurent-Reihe um z_2 über die Taylor-Reihenentwicklung des holomorphen Anteils g_3 von f :

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{(z-1)^2} \cdot \frac{25}{(z+1-i)(z+1+i)} = \frac{1}{(z-1)^2} \cdot \underbrace{\frac{25}{z^2+2z+2}}_{= g_3(z)} \\ &= \frac{1}{(z-1)^2} \left(g_3(1) + g_3'(1)(z-1) + \frac{1}{2} g_3''(1)(z-1)^2 + \dots \right) \end{aligned}$$

Nach kurzer Rechnung erhält man

$$\begin{aligned} g_3(1) &= 5, \quad g_3'(1) = -4 = \text{Res}(f(z); 1) \\ \Rightarrow f(z) &= \underbrace{\frac{5}{(z-1)^2} - \frac{4}{z-1}}_{= h(z, 1)} + \underbrace{g_3''(1)/2 + \dots}_{\text{Nebenteil}} \end{aligned}$$

Die komplexe Partialbruchzerlegung lautet deshalb:

$$f(z) = h(z, -1+i) + h(z, -1-i) + h(z, 1) \\ = \frac{4-3i}{2(z+1-i)} + \frac{4+3i}{2(z+1+i)} + \frac{5}{(z-1)^2} - \frac{4}{z-1}.$$

Als reelle Partialbruchzerlegung ergibt sich:

$$f(z) = \frac{4z+7}{z^2+2z+2} + \frac{5}{(z-1)^2} - \frac{4}{z-1}.$$

b) Von den Singularitäten von f

$$z_0 = -1+i, \quad z_1 = -1-i, \quad z_2 = 1.$$

liegen nur z_0 und z_1 innerhalb von c .

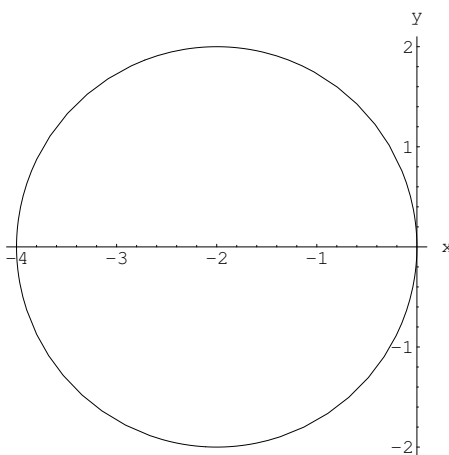


Bild 23: Kreis $c : |z+2| = 2$

Damit ergibt sich nach dem Residuensatz

$$\oint_c f(z) dz = 2\pi i (\text{Res}(f; -1+i) + \text{Res}(f; -1-i)) \\ = 2\pi i \left(\frac{4-3i}{2} + \frac{4+3i}{2} \right) = 8\pi i.$$

Lösung 24:

a) Die Singularitäten der Funktion $f(z) = \frac{1}{z^2 - 4z + 6}$ liegen bei $z_1 = 2 + i\sqrt{2}$ und $z_2 = 2 - i\sqrt{2}$, sind Pole 1. Ordnung, und man erhält:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2 - 4x + 6} dx = 2\pi i \text{Res}(f; z_1) = 2\pi i \frac{1}{z - 2 + i\sqrt{2}} \Big|_{z=z_1} \\ = 2\pi i \frac{1}{2i\sqrt{2}} = \frac{\pi}{\sqrt{2}}.$$

b) Beachtet man, dass $g(x) = \frac{\sin x}{x^4 + 324}$ eine ungerade Funktion ist, so ergibt sich

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{x^4 + 324} dx &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{x^4 + 324} dx + i \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x^4 + 324} dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{\frac{e^{ix}}{x^4 + 324}}_{=f(x)} dx = 2\pi i \sum_{\operatorname{Im} z_k > 0} \operatorname{Res}(f(z); z_k). \end{aligned}$$

Die Singularitäten der Funktion $f(z)$ ergeben sich aus $z^4 + 324 = 0$ und lauten daher

$$z_0 = 3 + 3i, \quad z_1 = -3 + 3i, \quad z_2 = -3 - 3i, \quad z_3 = 3 - 3i.$$

Es sind Pole 1. Ordnung, wovon nur $z_{0,1}$ in der oberen Halbebene liegen mit den Residuen

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}(f; z_0) &= \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0) f(z) = \frac{e^{iz_0}}{(z_0 - z_1)(z_0 - z_2)(z_0 - z_3)} \\ &= \frac{e^{i(3+3i)}}{6(6+6i)6i} = -\frac{e^{-3+3i}}{216(1-i)} = -\frac{e^{-3}}{432} \cdot e^{3i}(1+i) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}(f; z_1) &= \lim_{z \rightarrow z_1} (z - z_1) f(z) = \frac{e^{iz_1}}{(z_1 - z_0)(z_1 - z_2)(z_1 - z_3)} \\ &= \frac{e^{i(-3+3i)}}{-6 \cdot 6i(-6+6i)} = \frac{e^{-3-3i}}{216(1+i)} = \frac{e^{-3}}{432} \cdot e^{-3i}(1-i) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{x^4 + 324} dx &= 2\pi i (\operatorname{Res}(f; z_0) + \operatorname{Res}(f; z_1)) \\ &= 2\pi i \left(-\frac{e^{-3}}{432} \cdot e^{3i}(1+i) + \frac{e^{-3}}{432} \cdot e^{-3i}(1-i) \right) \\ &= \frac{e^{-3}\pi i}{216} (-(e^{3i} - e^{-3i}) - i(e^{3i} + e^{-3i})) \\ &= \frac{e^{-3}\pi i}{216} (-2i(\sin 3 + \cos 3)) = \frac{e^{-3}\pi}{108} (\sin 3 + \cos 3). \end{aligned}$$

c) Die hebbare Singularität bei $x = 1$ wird gekürzt und dann wird durch $y = x + 2$ substituiert:

$$\int_{-2}^{\infty} \frac{x-1}{(x^2+3x-4)\sqrt{x+2}} dx = \int_{-2}^{\infty} \frac{1}{(x+4)\sqrt{x+2}} dx = \int_0^{\infty} \frac{1}{(y+2)\sqrt{y}} dy.$$

Nun besitzt der Integrand die Standardform $\frac{r(y)}{y^\alpha} = \frac{1}{(y+2)\sqrt{y}}$ mit $r(y) = \frac{1}{y+2}$ und $\alpha = 1/2$. $r(z)$ besitzt nur die Singularität $z_1 = -2$ und man erhält:

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{(y+2)\sqrt{y}} dy = \frac{2\pi i}{1 - e^{-\pi i}} \operatorname{Res}\left(\frac{1}{(z+2)\sqrt{z}}; z_1\right) = \frac{2\pi i}{1 - e^{-\pi i}} \cdot \frac{1}{\sqrt{-2}} = \frac{\pi}{\sqrt{2}}.$$

d) Mit $z = e^{i\varphi}$ substituiere man

$$\cos \varphi = \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right) \quad \text{bzw.} \quad \sin \varphi = \frac{1}{2i} \left(z - \frac{1}{z} \right).$$

Die Substitution erfordert noch die Berechnung von:

$$\frac{dz}{d\varphi} = ie^{i\varphi} = iz \Rightarrow d\varphi = \frac{dz}{iz}$$

$$\int_0^{2\pi} \frac{\sin \varphi}{4 + \cos \varphi} d\varphi = \int_{|z|=1} \frac{\frac{1}{2i} \left(z - \frac{1}{z} \right)}{4 + \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right)} \cdot \frac{dz}{iz} = - \int_{|z|=1} \underbrace{\frac{z^2 - 1}{z(z^2 + 8z + 1)}}_{=f(z)} dz$$

Die Singularitäten von f ergeben sich aus $0 = z(z^2 + 8z + 1)$. Man erhält

$$z_0 = 0, \quad z_1 = -4 + \sqrt{15}, \quad z_2 = -4 - \sqrt{15}.$$

Nur von den im Einheitskreis liegenden $z_{0,1}$ werden die Residuen benötigt.

$$\text{Res}(f; z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0) f(z) = \frac{z_0^2 - 1}{z_0^2 + 8z_0 + 1} = -1$$

$$\begin{aligned} \text{Res}(f; z_1) &= \lim_{z \rightarrow z_1} (z - z_1) f(z) = \frac{z_1^2 - 1}{(z_1 - z_0)(z_1 - z_2)} \\ &= \frac{16 - 8\sqrt{15} + 15 - 1}{(-4 + \sqrt{15})2\sqrt{15}} = \frac{15 - 4\sqrt{15}}{\sqrt{15}(-4 + \sqrt{15})} = 1 \end{aligned}$$

Aus dem Residuensatz erhält man damit

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \frac{\sin \varphi}{4 + \cos \varphi} d\varphi &= -2\pi i (\text{Res}(f; z_0) + \text{Res}(f; z_1)) \\ &= -2\pi i (-1 + 1) = 0. \end{aligned}$$

Das Ergebnis überrascht nicht, da $\frac{\sin \varphi}{4 + \cos \varphi}$ eine 2π -periodische ungerade Funktion ist.