Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **SoSe 2023**
©Dr. K. Rothe

Hörsaalübungsaufgaben und Lösungen zu

komplexe Funktionen

für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Aufgabe 1:

Gegeben sind die komplexen Zahlen $z_1 := \dfrac{(1+2i)^2}{2-i}$ und $z_2 := \dfrac{1+i\sqrt{3}}{2}$.

a) Man ermittle Real- und Imaginärteil von z_1 und die Polardarstellungen von z_1 und z_2.

b) Man bestimme z_2^6 .

c) Man gebe alle Lösungen der Gleichung $(w+z_2)^3 = 1$ in kartesischen Koordinaten an.

Aufgabe 2:

Man skizziere die folgenden Punktmengen in der komplexen Zahlenebene:

a) $\{w \in \mathbb{C} : \ |w+z_2|^3 = |8i|\}$, mit $z_2 := \sqrt{3} - i$,

b) $\{z \in \mathbb{C} : \ |\mathrm{Re}(z)| + |\mathrm{Im}(z)| \le \sqrt{2}\}$,

c) $\{z \in \mathbb{C} : \ 9\mathrm{Re}(z^2) + 13(\mathrm{Im}(z))^2 = 36\}$,

d) $\{z \in \mathbb{C} : \ 3\pi/2 < \arg(zi) < 2\pi \ , \ 0 < |z|\}$.

Aufgabe 3:

Man untersuche die Folge

$$z_0 = 1 + i \ , \quad z_{n+1} = \frac{i}{2}\,(2 - i + z_n)$$

auf Konvergenz und bestimme ggf. den Grenzwert.

Aufgabe 4:
Für eine komplexe Zahlenfolge $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zeige man die folgende Äquivalenz:

$$\lim_{n\to\infty} z_n = z^* \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} \mathrm{Re}(z_n) = \mathrm{Re}(z^*) \ \wedge \ \lim_{n\to\infty} \mathrm{Im}(z_n) = \mathrm{Im}(z^*) \ .$$

Aufgabe 5:
Man bestimme das Bild von $Q := \{z \in \mathbb{C} \mid 0 \le \mathrm{Re}(z) \le 1 \ , \ 0 \le \mathrm{Im}(z) \le 1\}$ unter der durch $f(z) = iz^2 + 2$ definierten Abbildung.

Aufgabe 6:

a) Gegeben seien $z_1 = 3 + \dfrac{\pi i}{4}$ und $z_2 = 1 - \dfrac{\pi i}{2}$. Man berechne

$$\exp(z_1)\ ,\ \exp(z_2) \ \text{ und } \ \exp(z_1 + z_2)$$

in kartesischen Koordinaten und bestätige an diesem Beispiel die Gültigkeit der Funktionalgleichung der e-Funktion in $\mathbb{C}$:

$$\exp(z_1) \cdot \exp(z_2) = \exp(z_1 + z_2)\ .$$

b) Für den Hauptwert des komplexen Logarithmus ln und $z_1 = -i$ und $z_2 = -2i$ berechne man

$$\ln(z_1)\ ,\ \ln(z_2) \ \text{ und } \ \ln(z_1 z_2),$$

falls dies möglich ist.

Aufgabe 7:
Die sin-Funktion wird im Komplexen definiert durch

$$\sin z = \frac{1}{2i}\left(e^{iz} - e^{-iz}\right)\ .$$

Man berechne Real- und Imaginärteil von $\sin z$ und bestimme alle Lösungen von $\sin z = 2$.

Aufgabe 8:
Gegeben sei die Joukowski-Funktion $w = f(z) := \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{z}{3} + \dfrac{3}{z}\right)$.

a) Man bestimme die Bilder

(i) des Kreises $|z| = 3$,

(ii) des Halbstrahls $\mathrm{Re}(z) = \mathrm{Im}(z) > 0$,

(iii) des Halbstrahls $\mathrm{Re}(z) = 0\ ,\ \mathrm{Im}(z) > 0$.

b) Man berechne die Umkehrfunktion $z = f^{-1}(w)$ für $|z| > 3$.

Aufgabe 9:
Für die Inversion $w = f(z) := \frac{1}{z}$ mit $z \neq 0$ bestimme man das Bild

a) der Geraden $\mathrm{Re}(z) = -1$,

b) des Strahls $\mathrm{Im}(z) > 0 \wedge \mathrm{Re}(z) = 0$,

c) des Kreises $|z| = 4$,

d) des Kreises $|z - 1| = 1$ und

e) des Kreises $|z - 1| = 3$.

Aufgabe 10:
Gegeben sei die Funktion $T : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit

$$T(z) = \frac{2(1+i)z}{z-1-i} .$$

a) Man überprüfe, ob es sich bei T um eine Möbiustransformation handelt.

b) Man berechne alle Fixpunkte von T in kartesischer und Polardarstellung.

c) Man bestimme das Bild der Winkelhalbierenden $\mathrm{Re}\, z = \mathrm{Im}\, z$.

d) Worauf wird die Halbebene oberhalb der Winkelhalbierenden abgebildet?

e) Man berechne die Umkehrabbildung von T.

Aufgabe 11:

a) Man gebe eine Möbius-Transformation T an, mit:

$$T(0) = 0 , \quad T(-2) = 4 \quad \text{und} \quad T(i-1) = 2 + 2i .$$

b) Liegen $z_0 = -1 - i, z_1 = 0, z_2 = -2$ und $z_3 = i - 1$ auf einem Kreis?

c) Man zeichne den Kreis $K : \ |z + 1| = 1$ und die Punkte $z_1 = 0$,
$z_2 = -2,\ z_3 = i - 1$, sowie $T(K)$ mit $T(z_i)$ für $i = 1, 2, 3$.

Aufgabe 12:
Gesucht ist eine Möbius-Transformation $w = T(z)$ mit $T(1+i) = -1+i$ und $T(i) = 0$, die die Kreisscheibe $|z-1-i| \leq 1$ auf die Halbebene $\mathrm{Im}(w) \geq \mathrm{Re}(w)$ abbildet.

Aufgabe 13:
Für $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit $f(z) = z^2$ berechne man

a) $A := \frac{1}{2}\left(f_x(z_0) - i f_y(z_0)\right)$ und

b) $B := \frac{1}{2}\left(f_x(z_0) + i f_y(z_0)\right)$.

Man vergleiche die Ergebnisse mit den Ableitungen von f nach den unabhängigen Variablen z und $\bar{z}$, also mit

$$\frac{\partial f}{\partial z}, \quad \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}.$$

Dabei sollen die bekannten Ableitungsregeln aus dem Reellen rein formal übertragen werden.

Aufgabe 14:

a) Man überprüfe, ob

(i) $f(z) = z \cdot \mathrm{Im}(z)$ holomorph ist,

(ii) $g(z) = 2z + 2\bar{z} + 4i \cdot \mathrm{Im}(z) - 3i$ holomorph ist,

(iii) $u(x,y) = x^3 - 3xy^2 - 6xy - 3x^2$ harmonisch ist.

b) Man zeige, dass

$$u(x,y) = 4x^2 - 4y^2 - 12x + 9$$

harmonisch ist und konstruiere eine zu u konjugiert harmonische Funktion $v(x,y)$, d.h. eine Funktion v, für die die Funktion
$f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ mit $z = x + iy$ holomorph wird.

Aufgabe 15:
Gegeben seien die Kurven $c_1(t) = t$ für $t > 0$ und $c_2(t) = 4e^{it}$ für $-\pi < t < \pi$.

a) Man skizziere die Kurven c_1 und c_2 in der z-Ebene und bestimme ihren Schnittpunkt mit Schnittwinkel.

b) In welche Bildkurven der w-Ebene gehen c_1 und c_2 unter dem Hauptwert von $w = \sqrt{z}$ über? Man überprüfe, ob im Schnittpunkt der Bildkurven der Winkel und das lokale Längenverhältnis erhalten bleiben.

Aufgabe 16:

a) Man skizziere die beiden Kreise $K_1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z-1| = 1\}$ und $K_2 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 3\}$ und berechne die beiden Punkte z_1 und z_2, die symmetrisch zu beiden Kreisen liegen.

b) Man bestimme alle konformen Funktionen

$$T(z) = \frac{az+b}{cz+d}$$

mit $T(z_1) = 0$ und $T(z_2) = \infty$.

c) Man skizziere das Bild von K_1 und K_2 unter T, wenn noch $T(0) = 1$ gilt.

Aufgabe 17:
Gegeben sei das durch die beiden Kreise $K_1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z-1| = 1\}$ und $K_2 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 3\}$ berandete beschränkte Gebiet D.

Man berechne eine auf D harmonische Funktion, die auf K_1 den Wert 1 und auf K_2 den Wert 2 annimmt.

Hinweis: Man transformiere das Problem, wie in Aufgabe 16 angegeben, löse das konform verpflanzte Problem in Polarkoordinaten und transformiere zurück.

Aufgabe 18:
Man berechne direkt und mit Hilfe einer Stammfunktion

a) $\displaystyle\int_c z^3 + 4\,dz$ entlang des geradlinigen Weges von $1-i$ nach $1+i$,

b) $\displaystyle\int_c ze^z\,dz$ für $c(t) = i\pi t$ mit $-1 \le t \le 0$,

c) $\displaystyle\int_{c_k} \frac{1}{z}\,dz$ für die Kurven $c_1(t) = it$ und $c_2(t) = e^{it}$ mit $\pi/4 \le t \le 3\pi/4$,

d) $\displaystyle\int_1^i \ln z\,dz$ für $c(\varphi) = e^{i\varphi}$ (positiv orientiert).

Aufgabe 19:
Man berechne ggf. mit Hilfe der Cauchyschen Integralformel die folgenden Kurvenintegrale (alle auftretenden Kurven seien positiv orientiert):

a) $\displaystyle\oint\limits_{c} \frac{1}{z+2}\,dz, \quad c:\ |z+1-i| \ =\ 1,$

b) $\displaystyle\oint\limits_{c_{1,2}} \frac{z^2-2z+2}{z^3-z^2+2}\,dz, \quad c_1:\ |z| \ =\ 0.5, \quad c_2:\ |z| \ =\ 1.5,$

c) $\displaystyle\oint\limits_{c_{1,2}} \frac{\cos z}{z^2-\pi^2}\,dz, \quad c_1:\ |z+2| \ =\ 2, \quad c_2:\ |z-1.5| \ =\ 2,$

d) $\displaystyle\oint\limits_{c} \frac{z^2+3z-1}{z^2+z-2}\,dz, \quad c:\ |z-i| \ =\ 3,$

e) $\displaystyle\oint\limits_{c} z^2+\frac{e^z}{z^2}\,dz, \quad c:\ |z| \ =\ \pi,$

f) $\displaystyle\oint\limits_{c} \frac{\ln z}{(z-1-i)^5}\,dz, \quad c:\ |z-1-2i| \ =\ 2.$

Aufgabe 20:

a) Man berechne die Taylorreihe von $F(z) = \displaystyle\int_1^z \frac{d\xi}{5-3\xi}$ zum Entwicklungspunkt $z_0 = 1$ und bestimme den Konvergenzradius.

b) Man bestimme die Konvergenzradien der Taylor-Reihen folgender Funktionen zu den angegebenen Entwicklungspunkten z_0, ohne die Reihen selbst zu berechnen:

(i) $f(z) = \dfrac{5z}{z^2-2z+2}\,, \quad z_0 = -1$ und $z_0 = -1-i\,,$

(ii) $f(z) = \dfrac{1}{\cosh z}\,, \quad z_0 = \dfrac{7i}{2}\,,$

(iii) $f(z) = \ln(3z+5)\,, \quad z_0 = 0$ und $z_0 = i\,.$

Aufgabe 21:
Man gebe alle Potenzreihenentwicklungen der Funktion

$$f(z) = \frac{2z}{z^2 - 1}$$

zum Entwicklungspunkt

$$\text{a)} \quad z_0 = 2 \quad \text{und} \quad \text{b)} \quad z_0 = -1$$

mit Konvergenzbereich an.

Aufgabe 22:
Man bestimme die Laurententwicklung der folgenden Funktionen und gebe jeweils den Koeffizienten a_{-1} der Reihe an:

a) $f(z) = \dfrac{e^z - 1 - z - z^2/2}{z^2}$ im Punkt $z_0 = 0$,

b) $f(z) = z \sin\left(\dfrac{1}{z+\pi}\right)$ im Punkt $z_0 = -\pi$,

c) $f(z) = \dfrac{\cos z}{z^5}$ im Punkt $z_0 = 0$.

Aufgabe 23:
Für die folgenden Funktionen

a) $f(z) = \dfrac{1}{z^4 + z^2}$,

b) $f(z) = \sin \dfrac{1}{z}$,

c) $f(z) = \dfrac{z - \sin z}{z^2}$,

d) $f(z) = \coth\ z$

bestimme man:

Lage und Art der (endlichen) Singularitäten, die zugehörigen Residuen und die ersten drei (nichtverschwindenden) Summanden der Laurentreihe um $z_0 = 0$, die für große z konvergiert.

Aufgabe 24:
Gegeben sei die Funktion

$$f(z) = \frac{25}{z^4 - z^2 - 2z + 2}\ .$$

a) Man bestimme mit Hilfe von Laurent-Reihenentwicklungen die Partialbruchzerlegung von f.

b) Man berechne mit Hilfe des Residuensatzes das Integral

$$\oint_c f(z)\,dz$$

für den Kreis $c:\ |z+2| = 2$.

Aufgabe 25:
Man berechne mit Hilfe des Residuenkalküls die Integrale

a) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2 - 4x + 6}\,dx,$

b) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{x^4 + 324}\,dx$ und

c) $\displaystyle\int_{-2}^{\infty} \frac{x-1}{(x^2+3x-4)\sqrt{x+2}}\,dx\ ,$

d) $\displaystyle\int_{0}^{2\pi} \frac{\sin\varphi}{4+\cos\varphi}\,d\varphi\ .$

Lösung 1:

a) $z_1 = \dfrac{(1+2i)^2}{2-i} = \dfrac{(-3+4i)(2+i)}{(2-i)(2+i)} = \dfrac{-10+5i}{5} = -2+i$

$\Rightarrow \quad \mathrm{Re}(z_1) = -2, \quad \mathrm{Im}(z_1) = 1$

$|z_1| = \sqrt{(-2)^2+1^2} = \sqrt{5}, \quad \arg(z_1) = \pi + \arctan\left(-\dfrac{1}{2}\right),$

$z_1 = \sqrt{5}e^{i\left(\pi - \arctan\left(\frac{1}{2}\right)\right)},$

$z_2 = \dfrac{1+i\sqrt{3}}{2} \quad \Rightarrow \quad \mathrm{Re}(z_2) = \dfrac{1}{2}, \quad \mathrm{Im}(z_2) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$|z_2| = 1, \quad \arg(z_2) = \arctan\sqrt{3} = \dfrac{\pi}{3}, \quad z_2 = e^{\pi i/3}$

b) $z_2^6 = \left(e^{\pi i/3}\right)^6 = e^{6\pi i/3} = e^{2\pi i} = 1$

c) $(w+z_2)^3 = 1 = 1e^0$

$\Rightarrow \quad w_k = 1^{1/3}e^{(0+2\pi k)i/3} - z_2\,, \quad k = 0,1,2$

$w_0 = 1 - z_2 = 1 - \dfrac{1+i\sqrt{3}}{2} = \dfrac{1-i\sqrt{3}}{2},$

$w_1 = e^{2\pi i/3} - z_2 = \dfrac{-1+i\sqrt{3}}{2} - \dfrac{1+i\sqrt{3}}{2} = -1,$

$w_2 = e^{4\pi i/3} - z_2 = \dfrac{-1-i\sqrt{3}}{2} - \dfrac{1+i\sqrt{3}}{2} = -1-i\sqrt{3}.$

Lösung 2:

a) $|w+z_2|^3 = |8i| = 8 \quad \Leftrightarrow \quad |w+z_2| = 2$

Mit der kartesischen Darstellung $w = u+iv$ erhält man:

$$\begin{aligned} |w+z_2| &= |u+iv+\sqrt{3}-i| = |u+\sqrt{3}+i(v-1)| \\ &= \sqrt{(u+\sqrt{3})^2+(v-1)^2} = 2 \end{aligned}$$

$\Rightarrow \quad (u+\sqrt{3})^2+(v-1)^2 = 2^2$

Die Punktmenge ist ein Kreis mit Mittelpunkt $\left(-\sqrt{3},1\right)$ und Radius 2.

b) Mit der kartesischen Darstellung $z = x+iy$ erhält man:

$|\mathrm{Re}(z)| + |\mathrm{Im}(z)| = |x|+|y| = \left\|\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right\|_1 \leq \sqrt{2}$

Die Punktmenge ist ein Quadrat mit Kantenlänge 2 und den Eckpunkten $(\sqrt{2},0), (0,\sqrt{2}), (-\sqrt{2},0)$ und $(0,-\sqrt{2})$ im $\mathbb{R}^2$ bzw.
$\sqrt{2}, i\sqrt{2}, -\sqrt{2}$ und $-i\sqrt{2}$ in $\mathbb{C}$.

c)
$$\begin{aligned} 36 &= 9\mathrm{Re}(z^2) + 13\mathrm{Im}(z)^2 \;=\; 9\mathrm{Re}((x+iy)^2) + 13(\mathrm{Im}(x+iy))^2 \\ &= 9\mathrm{Re}(x^2 - y^2 + i2xy) + 13y^2 \;=\; 9(x^2 - y^2) + 13y^2 \\ &= 9x^2 + 4y^2 \end{aligned}$$

Die Punktmenge wird also durch folgende Ellipse beschrieben:

$$\left(\frac{x}{2}\right)^2 + \left(\frac{y}{3}\right)^2 = 1 \,.$$

d) $\arg(zi) = \arg(re^{i\varphi}e^{i\pi/2}) = \arg(re^{i(\varphi+\pi/2)}) = \varphi + \pi/2 \;\Rightarrow\; \pi < \varphi < 3\pi/2$

Damit ist die Punktmenge gegeben durch den 3. Quadranten ohne die berandenden Achsen.

Lösung 3:

Wenn z_n konvergiert, so gilt mit $z^* := \lim\limits_{n\to\infty} z_n = \lim\limits_{n\to\infty} z_{n+1}$:

$$z^* = \frac{i}{2}\,(2 - i + z^*) \quad\Rightarrow\quad z^*\left(1 - \frac{i}{2}\right) = \frac{(2-i)i}{2} \quad\Rightarrow\quad z^* = i.$$

z_n konvergiert, da

$$|z_{n+1} - i| = \left|\frac{i}{2}\,(2 - i + z_n) - i\right| = \left|\frac{i}{2}\right| \left|2 - i + z_n - \frac{i}{i/2}\right| = \frac{1}{2}\,|z_n - i|$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)^2 |z_{n-1} - i| = \ldots = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} |z_0 - i| = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

Lösung 4:

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} z_n = z^* \quad &\Leftrightarrow \quad 0 = \lim_{n\to\infty} |z_n - z^*| = \lim_{n\to\infty} \sqrt{\mathrm{Re}(z_n - z^*)^2 + \mathrm{Im}(z_n - z^*)^2} \\ &\Leftrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} \mathrm{Re}(z_n - z^*) = 0 \;\wedge\; \lim_{n\to\infty} \mathrm{Im}(z_n - z^*) = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} \mathrm{Re}(z_n) = \mathrm{Re}(z^*) \;\wedge\; \lim_{n\to\infty} \mathrm{Im}(z_n) = \mathrm{Im}(z^*) \end{aligned}$$

Lösung 5:

a)

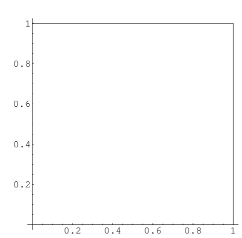


Bild 5.1 $Q := \{z \in \mathbb{C} \mid 0 \leq \mathrm{Re}(z) \leq 1\ ,\ 0 \leq \mathrm{Im}(z) \leq 1\}$

Die Abbildung $f(z) = iz^2 + 2$ wird interpretiert als Hintereinanderausführung $f = f_3 \circ f_2 \circ f_1$ mit $f_1(z) = z^2$, $f_2(u) = iu$ und $f_3(v) = v + 2$.

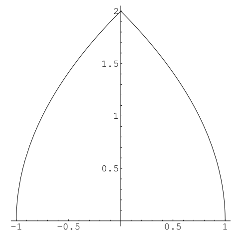


Bild 5.2 $f_1(Q)\}$

Mit der Funktion $f_1(z) = z^2$ werden die Ränder von Q folgendermaßen abgebildet:

(i) $c_1(x) = x$ mit $x \in [0, 1]$: $f_1(c_1(x)) = x^2$,
damit wird das Intervall $[0, 1]$ in sich abgebildet.

(ii) $c_2(y) = 1 + iy$ mit $y \in [0, 1] \Rightarrow \quad f_1(c_2(y)) = (1 + iy)^2 = 1 - y^2 + i2y$
(nach unten geöffnete Parabel bzgl. der y-Achse)

(iii) $c_3(x) = x + i$ mit $x \in [0, 1] \quad \Rightarrow \quad f_1(c_3(x)) = (x + i)^2 = x^2 - 1 + i2x$
(nach oben geöffnete Parabel bzgl. der y-Achse)

(iv) $c_4(y) = iy$ mit $y \in [0, 1]$: $f_1(c_4(y)) = (iy)^2 = -y^2$,
damit ist das Bild von c_4 das Intervall $[-1, 0]$.

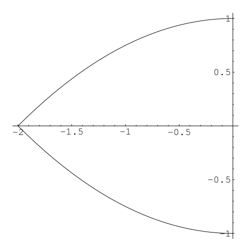


Bild 5.3 $f_2(f_1(Q))\}$

Die Funktion $f_2(u) = iu$ bewirkt eine Drehung um den Winkel $\varphi = \dfrac{\pi}{2}$

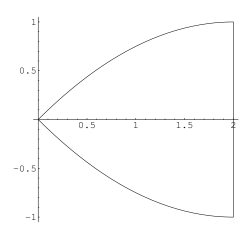


Bild 5.4 $f(Q) = f_3(f_2(f_1(Q)))\}$

Die Funktion $f_3(v) = v + 2$ bewirkt eine Verschiebung in Richtung der positiven x-Achse um den Wert 2.

Lösung 6:

a) $\exp(z_1) = \exp\left(3 + \frac{\pi i}{4}\right) = e^3\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) = \frac{e^3\sqrt{2}}{2} + i\frac{e^3\sqrt{2}}{2}$

$\exp(z_2) = \exp\left(1 - \frac{\pi i}{2}\right) = e\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) - i\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) = -ie$

$\exp(z_1 + z_2) = \exp\left(4 - \frac{\pi i}{4}\right) = e^4\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) - i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) = \frac{e^4\sqrt{2}}{2} - i\frac{e^4\sqrt{2}}{2}$

Damit erhält man

$$\exp(z_1)\exp(z_2) = \left(\frac{e^3\sqrt{2}}{2} + i\frac{e^3\sqrt{2}}{2}\right)(-ie) = \frac{e^4\sqrt{2}}{2} - i\frac{e^4\sqrt{2}}{2} = \exp(z_1 + z_2)\,.$$

b) Der Hauptwert $\ln z$ des Logarithmus ist definiert für $-\pi < \arg z < \pi$ durch

$$\ln z = \ln|z| + i\arg z\,.$$

$\ln(z_1) = \ln(-i) = \ln|-i| + i\arg(-i) = \ln 1 - i\pi/2 = -i\pi/2$

$\ln(z_2) = \ln(-2i) = \ln|-2i| + i\arg(-2i) = \ln 2 - i\pi/2$

$z_1z_2 = -i(-2i) = -2 = 2e^{-\pi i}$

Damit liegt z_1z_2 nicht im Definitionsbereich des Hauptwertes und $\ln(z_1z_2) = \ln(-2)$ kann nicht berechnet werden.

Lösung 7:

Mit $z = x + iy$ gilt:

$$\begin{aligned}
\sin z &= \frac{1}{2i}\left(e^{iz} - e^{-iz}\right) = -\frac{i}{2}\left(e^{-y+ix} - e^{y-ix}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(-ie^{-y}(\cos x + i\sin x) + ie^{y}(\cos x - i\sin x)\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\sin x(e^y + e^{-y}) + i\cos x(-e^{-y} + e^y)\right) \\
&= \sin x\cosh y + i\cos x\sinh y
\end{aligned}$$

$$2 = \sin z \; = \; \sin x \cosh y + i \cos x \sinh y \quad \Rightarrow \quad \cos x \sinh y = 0$$

1. Fall: $\sinh y = 0 \quad \Rightarrow \quad y = 0 \quad \Rightarrow \quad \sin x \cosh 0 = \sin x = 2$
besitzt keine Lösung.

2.Fall: $\cos x = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi\,, \quad k \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow \quad \sin\left(\dfrac{\pi}{2} + k\pi\right) \cosh y = (-1)^k \cosh y = 2$

$\Rightarrow \quad \cosh y = 2$ und $k = 2n \quad \Rightarrow \quad y = \pm \text{arcosh } 2$

$$\Rightarrow \quad z_n = \frac{\pi}{2} + 2n\pi \pm i\text{arcosh } 2\,, \quad n \in \mathbb{Z}$$

Lösung 8:

a) (i) Mit der Polardarstellung $z = 3e^{i\varphi}$, $0 \le \varphi < 2\pi$ auf dem Kreis $|z| = 3$ erhält man:

$$f(z) = \frac{1}{2}\left(\frac{3e^{i\varphi}}{3} + \frac{3}{3e^{i\varphi}}\right) = \frac{1}{2}(e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}) = \cos\varphi \in [-1, 1].$$

(ii) Die Polardarstellung $z = re^{i\pi/4}$, $0 < r < \infty$ des Halbstrahls $\text{Re}(z) = \text{Im}(z) > 0$ ergibt:

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2}\left(\frac{re^{i\pi/4}}{3} + \frac{3}{re^{i\pi/4}}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{r}{3}(\cos\pi/4 + i\sin\pi/4) + \frac{3}{r}(\cos\pi/4 - i\sin\pi/4)\right) \\ &= \underbrace{\left(\frac{r}{6} + \frac{3}{2r}\right)\cos\pi/4}_{=u} + i\underbrace{\left(\frac{r}{6} - \frac{3}{2r}\right)\sin\pi/4}_{=v}. \end{aligned}$$

$u = \text{Re}(f)$ und $v = \text{Im}(f)$ erfüllen die Hyperbelgleichung

$$\frac{u^2}{\cos^2\pi/4} - \frac{v^2}{\sin^2\pi/4} = \left(\frac{r}{6} + \frac{3}{2r}\right)^2 - \left(\frac{r}{6} - \frac{3}{2r}\right)^2 = 1\,.$$

Mathematica Plot-Befehl

```
ParametricPlot[{Sqrt[2] Cosh[t]/2,
Sqrt[2] Sinh[t]/2}, {t, -2.1, 2.1},
AxesLabel -> {"Re", "Im"}, PlotRange -> {-3, 3}]
```

Mit
$$\cosh(t) = \left(\frac{r}{6} + \frac{3}{2r}\right) \ , \quad \sinh(t) = \left(\frac{r}{6} - \frac{3}{2r}\right)$$
entspricht der Radius $r = 3$ dem Wert $t = 0$.

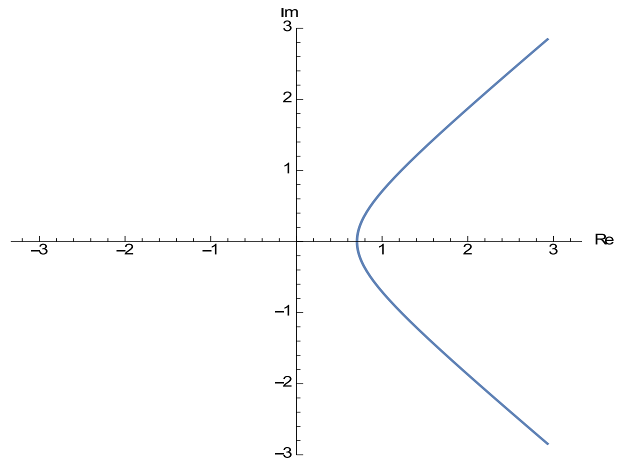


Bild 8 a)(ii): Hyperbel

(iii) Aus der Polardarstellung $z = re^{i\pi/2} = ir$, $0 < r < \infty$ des Halbstrahls $\mathrm{Re}(z) = 0$, $\mathrm{Im}(z) > 0$ folgt:

$$f(z) = \frac{1}{2}\left(\frac{ir}{3} + \frac{3}{ir}\right) = i\underbrace{\left(\frac{r}{6} - \frac{3}{2r}\right)}_{=t} \quad \text{mit} \quad t \in \mathbb{R}.$$

Die Polardarstellung führt im Bild also auf die imaginäre Achse.

b) Die Joukowski-Funktion ist nicht bijektiv, denn es gilt $f\left(\frac{9}{z}\right) = f\,(z)$.

Die Umkehrfunktion von f ergibt sich durch Auflösen von $w = f(z)$ nach z:

$$w = \frac{1}{2}\left(\frac{z}{3} + \frac{3}{z}\right) \Rightarrow 6wz = z^2 + 9$$

$$\Rightarrow z^2 - 6wz + 9 = (z - 3w)^2 - 9w^2 + 9 = 0 \Rightarrow (z - 3w)^2 = 9(w^2 - 1)$$

$$\Rightarrow z = f^{-1}(w) = 3(w + \sqrt{w^2 - 1})$$

Für $\sqrt{w^2 - 1}$ ist dabei der Zweig zu wählen, für den $|z| > 3$ gilt.

Lösung 9:

Die Umkehrabbildung der Inversion $w = f(z) = \dfrac{1}{z}$ lautet

$$z = f^{-1}(w) = \frac{1}{w}\ ,$$

wobei $z \neq 0$ und $w \neq 0$. Damit ergeben sich folgende Bilder

a) $-1 = \mathrm{Re}(z) = \dfrac{1}{2}(z+\bar{z}) = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{w}+\dfrac{1}{\bar{w}}\right) \quad \Leftrightarrow \quad 2w\bar{w}+w+\bar{w}=0$

$\Leftrightarrow\ \dfrac{1}{4} = w\bar{w}+\dfrac{1}{2}w+\dfrac{1}{2}\bar{w}+\dfrac{1}{4}\ \Leftrightarrow\ \left(w+\dfrac{1}{2}\right)\left(\bar{w}+\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{1}{4}$

$\Leftrightarrow\ \left|w+\dfrac{1}{2}\right| = \dfrac{1}{2}$

Bild von $\mathrm{Re}(z) = -1$ ist der Kreis um $w_0 = -\dfrac{1}{2}$ mit Radius $r = \dfrac{1}{2}$.

b) $\mathrm{Im}(z) > 0 \wedge \mathrm{Re}(z) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad z = iy$ und $y > 0$

$\Leftrightarrow \quad w = \dfrac{1}{z} = \dfrac{1}{iy} = -\dfrac{i}{y}$

Der Strahl wird auf den Strahl $\mathrm{Im}(z) < 0 \wedge \mathrm{Re}(z) = 0$ abgebildet und umgekehrt durchlaufen.

c) $4 = |z| = \left|\dfrac{1}{w}\right| \quad \Leftrightarrow \quad |w| = \dfrac{1}{4}\ .$

Der Ursprungskreis vom Radius 4 wird in den Ursprungskreis vom Radius $\dfrac{1}{4}$ abgebildet.

d) $|z-1| = 1 \quad \Leftrightarrow \quad 1 = z\bar{z}-z-\bar{z}+1 = \dfrac{1}{w}\dfrac{1}{\bar{w}}-\dfrac{1}{w}-\dfrac{1}{\bar{w}}+1$

$\Leftrightarrow \quad w+\bar{w} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{Re}(w) = \dfrac{1}{2}\ .$

Das Bild des Kreises ist die Gerade $\mathrm{Re}(w) = \dfrac{1}{2}$.

e) $|z-1| = 3 \quad \Leftrightarrow \quad 9 = z\bar{z}-z-\bar{z}+1 = \dfrac{1}{w}\dfrac{1}{\bar{w}}-\dfrac{1}{w}-\dfrac{1}{\bar{w}}+1$

$\Leftrightarrow\ w\bar{w}+\dfrac{1}{8}\bar{w}+\dfrac{1}{8}w+\dfrac{1}{64} = \dfrac{1}{64}+\dfrac{1}{8} = \dfrac{9}{64}\ \Leftrightarrow\ \left|w+\dfrac{1}{8}\right| = \dfrac{3}{8}\ .$

Das Bild des Kreises ist der Kreis um $w_0 = -\dfrac{1}{8}$ mit Radius $r = \dfrac{3}{8}$.

Lösung 10:

a) Ein Vergleich mit der Standardform $\quad T(z) = \dfrac{az+b}{cz+d} \quad$ ergibt

$$ad = 2(1+i)(-1-i) = -4i \neq 0 = 0 \cdot 1 = bc\,,$$

d.h. T ist eine Möbius Transformation.

b) $\quad z = \dfrac{2(1+i)z}{z-1-i} \overset{z\neq 1+i}{\Leftrightarrow} z(z-1-i) = 2(1+i)z \;\Leftrightarrow\; z(z-3(1+i)) = 0$

Man erhält also die beiden Fixpunkte $z_1 = 0$ und
$z_2 = 3(1+i) = 3\sqrt{2}e^{i\pi/4}$.

c) Die Punkte z_1, z_2 und $1+i$ liegen auf der Winkelhalbierenden, also einer Geraden. Daher liegen sie im Bild unter T auf einer Geraden oder einem Kreis. Da z_1 und z_2 Fixpunkte sind und $T(1+i) = \infty$ gilt, wird die Winkelhalbierende auf sich selbst abgebildet.

d) Die oberhalb der Winkelhalbierenden liegende Ebene wird wegen Teil c), $T(i) = 2 - 2i$ und weil T stetig ist auf die unterhalb der Winkelhalbierenden liegende Ebene abgebildet.

e) Durch Auflösen von $w = \dfrac{2(1+i)z}{z-1-i}$ nach z erhält man die Umkehrabbildung:

$$w = \frac{2(1+i)z}{z-1-i} \overset{z\neq 1+i}{\Leftrightarrow} w(z-1-i) = 2(1+i)z$$

$$\Leftrightarrow\; z(w-2(1+i)) = (1+i)w \overset{z\neq 2(1+i)}{\Leftrightarrow} z = T^{-1}(w) = \frac{(1+i)w}{w-2(1+i)}$$

Lösung 11:

a) Einsetzen in die Dreipunkteformel und Auflösen nach w ergibt:

$$\frac{w-0}{w-4} : \frac{2+2i-0}{2+2i-4} = \frac{z-0}{z+2} : \frac{i-1-0}{i-1+2} \;\Leftrightarrow\; \frac{w}{w-4} : \frac{i+1}{i-1} = \frac{z}{z+2} : \frac{i-1}{i+1}$$

$$\Rightarrow\quad w(z+2) = z(w-4)\underbrace{\frac{(i+1)^2}{(i-1)^2}}_{=-1} \;\Leftrightarrow\; wz + 2w = 4z - wz \;\Leftrightarrow\; w = \frac{2z}{z+1} =: T(z).$$

b) Eine Probe ergibt, dass $z_0, \ldots, z_3$ auf dem Kreis $|z+1| = 1$ liegen.

Alternativ und ohne Kenntnis des Kreises kann man auch nachprüfen, dass das Doppelverhältnis reell ist:

$$\frac{z_0-z_1}{z_0-z_2} : \frac{z_3-z_1}{z_3-z_2} = \frac{-1-i}{-1-i+2} : \frac{i-1}{i-1+2} = \frac{(-1-i)(1+i)}{(1-i)(i-1)} = -1 \in \mathbb{R}$$

c) Die Punkte $z_1 = 0$, $z_2 = -2$ und $z_3 = i - 1$ liegen auf dem Kreis K. Damit liegen die Punkte $T(z_1) = 0, T(z_2) = 4$ und $T(z_3) = 2 + 2i$ auf dem Bildkreis $T(K)$.

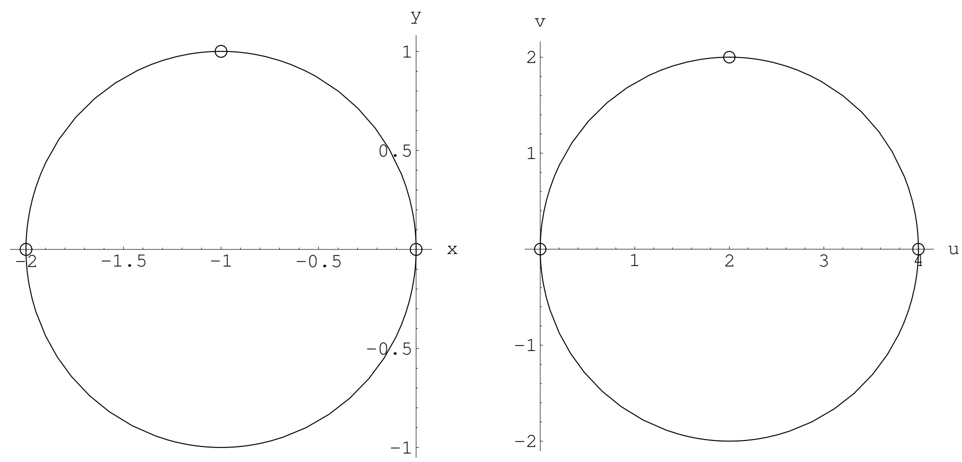


Bild 11: z_1, z_2, z_3 und K w_1, w_2, w_3 und $T(K)$

Lösung 12:

Die Lösungsidee besteht darin, dass der die Kreisscheibe berandende Kreis

$$K := \{z \in \mathbb{C} \mid |z - 1 - i| = 1\}$$

durch T auf die Winkelhalbierende $\mathrm{Im}(w) = \mathrm{Re}(w)$ abgebildet wird.

$z_2 = i$ liegt auf dem Kreis K.

Da $T(i) = w_2 = 0$ gilt, ist der Bildkreis $T(K)$ ein Kreis durch den Nullpunkt.

Der Mittelpunkt $z_1 = 1 + i$ von K wird auf $w_1 = -1 + i$ abgebildet. Der bezüglich K zu z_1 symmetrische Punkt $z_3 = \infty$ wird auf den zur Winkelhalbierenden symmetrischen Punkt $w_3 = 1 - i$ abgebildet.

Damit wird der Kreis $|z - 1 - i| = 1$ auf die Winkelhalbierende abgebildet.

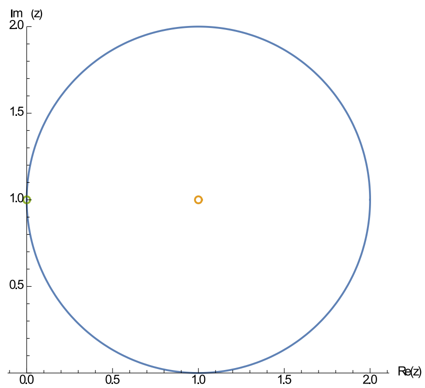
Die Möbius-Transformation $w = T(z)$ ergibt sich dann aus der Dreipunkteformel

$$\frac{z - z_1}{z - z_2} : \frac{z_3 - z_1}{z_3 - z_2} = \frac{w - w_1}{w - w_2} : \frac{w_3 - w_1}{w_3 - w_2}.$$

Man erhält

$$\frac{z - (1+i)}{z - i} : \left.\frac{z_3 - (1+i)}{z_3 - i}\right|_{z_3 \to \infty} = \frac{w - (-1+i)}{w - 0} : \frac{1 - i - (-1+i)}{1 - i - 0}$$

$$\Rightarrow \frac{z - 1 - i}{z - i} = \frac{w + 1 - i}{2w} \Rightarrow w = T(z) = \frac{(1-i)(z-i)}{z - 2 - i}$$



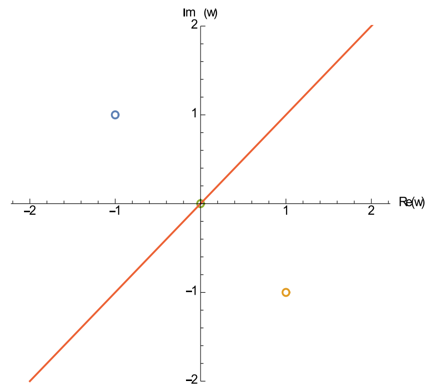


Bild 12 a): K mit z_1 und z_2 **Bild 12 b):** $T(K)$ mit w_1, w_2 und w_3

Da $z_1 = 1 + i$ auf $w_1 = -1 + i$ oberhalb der Winkelhalbierenden abgebildet wird, ist aus Stetigkeitsgründen das Bild der Kreisscheibe $|z - 1 - i| \leq 1$ die Halbebene oberhalb der Winkelhalbierenden.

Lösung 13:

f besitzt folgende Zerlegung in Real- und Imaginärteil

$$f(z_0) = z_0^2 = (x_0 + iy_0)^2 = x_0^2 - y_0^2 + i2x_0y_0 = f(x_0, y_0)\,.$$

Man erhält

$$f_x(z_0) = f_x(x_0, y_0) = 2x_0 + i2y_0\,, \quad f_y(z_0) = f_y(x_0, y_0) = -2y_0 + i2x_0$$

a) $A = \frac{1}{2}\left(f_x(z_0) - if_y(z_0)\right) = \frac{1}{2}\left(2x_0 + i2y_0 - i(-2y_0 + i2x_0)\right) = 2x_0 + i2y_0 = 2z_0$

Durch rein formales Differenzieren wie im Reellen erhält man $\dfrac{\partial f}{\partial z}(z_0) = 2z_0\,.$

b) $B = \frac{1}{2}\left(f_x(z_0) + if_y(z_0)\right) = \frac{1}{2}\left(2x_0 + i2y_0 + i(-2y_0 + i2x_0)\right) = 0$

Durch rein formales Differenzieren wie im Reellen erhält man $\dfrac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z_0) = 0\,.$

Lösung 14:

a) (i) $f(z) = z \cdot \mathrm{Im}(z) = (x + iy)y = \underbrace{xy}_{=u(x,y)} + i\underbrace{y^2}_{=v(x,y)}$

Wegen $u_x = y \neq 2y = v_y$ sind die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen nicht erfüllt und f ist nicht holomorph.

(ii) Mit $z = x + iy$ ergibt sich:

$$\begin{aligned} g(z) &= 2z + 2\bar{z} + 4i\mathrm{Im}z - 3i \\ &= 2(x+iy) + 2(x-iy) + 4iy - 3i \;=\; 4x + i(4y-3) \end{aligned}$$

Da Re $g(z) = 4x =: u(x,y)$ und
Im $g(z) = 4y - 3 =: v(x,y)$ stetig partiell differenzierbar sind und die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen erfüllen

$$u_x = 4 = v_y\,, \quad v_x = 0 = -u_y$$

ist g holomorph.

(iii)
$$\begin{aligned} \Delta u(x,y) &= (x^3 - 3xy^2 - 6xy - 3x^2)_{xx} + (x^3 - 3xy^2 - 6xy - 3x^2)_{yy} \\ &= 6x - 6 - 6x = -6 \end{aligned}$$

Damit ist u nicht harmonisch.

b) $\Delta u \;=\; (4x^2 - 4y^2 - 12x + 9)_{xx} + (4x^2 - 4y^2 - 12x + 9)_{yy} = 8 - 8 = 0$

Damit $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ holomorph in $\mathbb{C}$ ist, müssen die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen erfüllt sein:

$$v_y = u_x = 8x - 12 \quad \Rightarrow \quad v = 8xy - 12y + c(x)$$

$$v_x = 8y + c'(x) = -u_y = -(-8y)$$

$$\Rightarrow \quad c'(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad c(x) = c \in \mathbb{R}$$

Da $v(x,y) = 8xy - 12y + c$ (und auch u) stetig partiell differenzierbar ist, ist f holomorph in $\mathbb{C}$ und v eine (die) konjugiert harmonische Funktion zu u.

Bemerkung:

Für $f(z) = (2z-3)^2$ und $c = 0$ ergibt sich $u(x,y) = \mathrm{Re}f$ und $v(x,y) = \mathrm{Im}f$.

Lösung 15:

Der Hauptwert der Wurzelfunktion für $z = re^{i\varphi}$ ist festgelegt durch

$$w = \sqrt{z} := \sqrt{r}e^{i\varphi/2} \quad \text{mit} \quad -\pi < \varphi < \pi.$$

a) $c_1(t) = t$ für $t > 0$: positive reelle Achse

$c_2(t) = 4e^{it}$ für $-\pi < t < \pi$:

Kreis vom Radius $r = 4$ ohne den Punkt $z = -4$.

Schnittpunkt z_s von c_1 und c_2: $c_1(4) = 4 = z_s = c_2\,(0)$

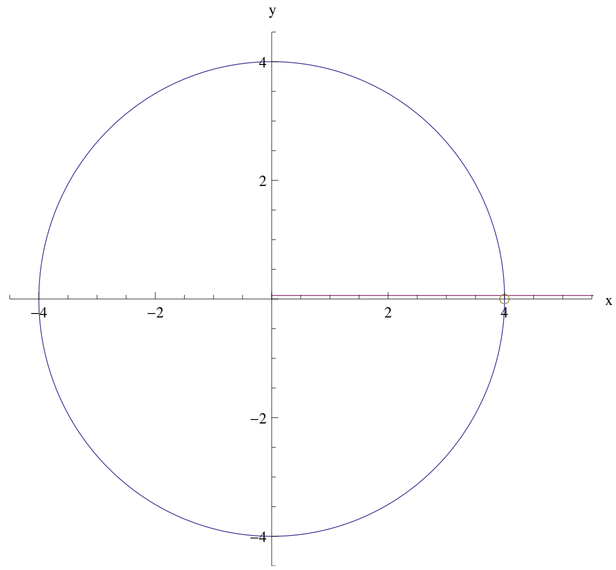


Bild 15 a): $c_1(t)$, $c_2(t)$ und Schnittpunkt $z_s = 4$ in der z-Ebene

Ableitungen der Kurven in den Schnittpunkten:

$\dot{c}_1(t) = 1 \ \Rightarrow\ \dot{c}_1(4) = 1 = 1e^{i\cdot 0}$ und

$\dot{c}_2(t) = 4ie^{it} \ \Rightarrow\ \dot{c}_2\,(0) = 4i = 4e^{i\pi/2}$

Schnittwinkel:

$$\gamma = \angle\left(\dot{c}_2\,(0)\,, \dot{c}_1(4)\right) = \arg \dot{c}_2\,(0) - \arg \dot{c}_1(4)$$
$$= \arg(4i) - \arg 1 = \frac{\pi}{2} - 0 = \frac{\pi}{2}$$

b) Für die Bildkurven erhält man:

$d_1(t) := \sqrt{c_1(t)} = \sqrt{t}$ mit $t > 0$: positive reelle Achse

$d_2(t) := \sqrt{c_2(t)} = 2e^{it/2}$ für $-\pi < t < \pi$:

Halbkreis vom Radius $r = 2$ in der rechten Halbebene (ohne die Punkte $w = \pm 2i$).

Schnittpunkt: $d_1(4) = 2 = d_2\,(0)$

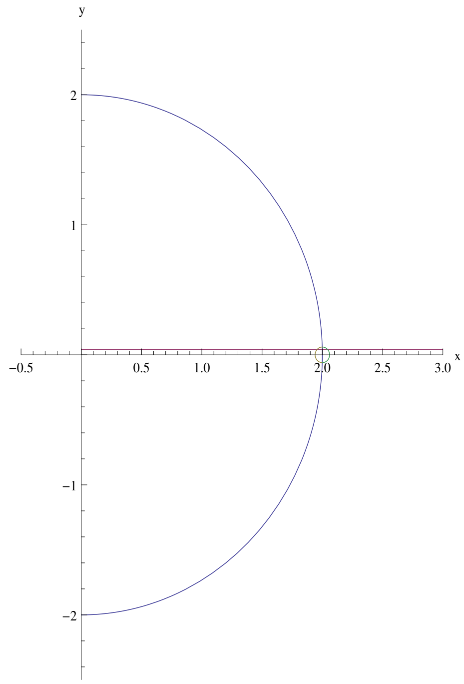


Bild 15 b): $d_1(t)$, $d_2(t)$ und Schnittpunkt $w_s = \sqrt{z_s} = 2$ in der w-Ebene

Ableitungen der Bildkurven in den Schnittpunkten:

$\dot{d}_1(t) = \dfrac{1}{2\sqrt{t}} \Rightarrow \dot{d}_1(4) = \dfrac{1}{4} = \dfrac{1}{4}e^{i\cdot 0}$ und

$\dot{d}_2(t) = ie^{it/2} \Rightarrow \dot{d}_2\,(0) = i = e^{i\pi/2}$

Schnittwinkel:

$\tilde{\gamma} = \angle\left(\dot{d}_2\,(0)\,, \dot{d}_1(4)\right) = \arg \dot{d}_2\,(0) - \arg \dot{d}_1(4)$

$= \arg(i) - \arg 1/4 = \dfrac{\pi}{2} - 0 = \dfrac{\pi}{2}$

lokales Längenverhältnis: $\dfrac{|\dot{c}_2\,(0)\,|}{|\dot{c}_1(4)|} = \dfrac{|4i|}{|1|} = 4 = \dfrac{|i|}{|1/4|} = \dfrac{|\dot{d}_2\,(0)\,|}{|\dot{d}_1(4)|}$

Bemerkung:

Der Streckungsfaktor $f'(c(t))$, der in

$$\dot{d}(t) = \frac{d}{dt}\,(f(c(t))) = f'(c(t))\dot{c}(t)$$

steckt, kürzt sich im Schnittpunkt heraus.

Der Schnittwinkel und das lokale Längenverhältnis bleiben erhalten, da die Kurven im Holomorphiegebiet von $\sqrt{z}$ verlaufen und dort $f'(z) = \dfrac{1}{2\sqrt{z}} \neq 0$ gilt.

Lösung 16:

a)

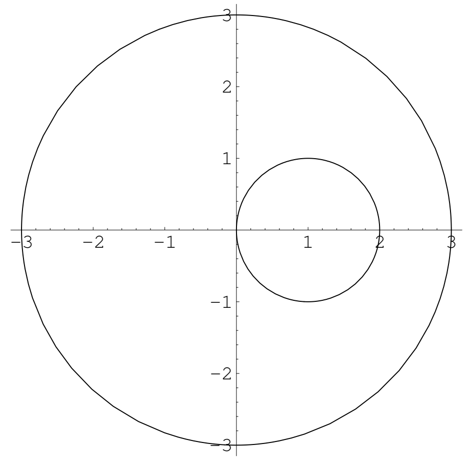


Bild 16 a): Kreise K_1 und K_2

Symmetrie zu $K_2 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 3\}$ und
$K_1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z-1| = 1\}$ liefert die Bedingungen

$$\begin{aligned}
z_1\bar{z}_2 &= 3^2 \Rightarrow \bar{z}_2 = \frac{9}{z_1} \\
(z_1-1)(\bar{z}_2-1) &= 1^2 \Rightarrow (z_1-1)\left(\frac{9}{z_1}-1\right) = 1 \\
\Rightarrow z_1^2 - 9z_1 + 9 &= 0 \\
\Rightarrow z_1 &= \frac{9 \pm 3\sqrt{5}}{2} \Rightarrow z_2 = \frac{9}{\bar{z}_1} = \frac{9 \mp 3\sqrt{5}}{2}
\end{aligned}$$

b) Mit $T(z) = k \cdot \dfrac{z-z_1}{z-z_2}$ und $k \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$ gilt $w_1 = T(z_1) = 0$ und $w_2 = T(z_2) = \infty$.
T ist eine Möbius-Transformation wegen $k \neq 0$,
denn $ad - bc = k(z_1 - z_2) \neq 0$.

T ist holomorph für $z \in \mathbb{C}\backslash\{z_2\}$ und deshalb auch konform in diesem Gebiet, da $T'(z) = \dfrac{ad-bc}{(z-z_2)^2} \neq 0$ gilt.

c) Da z_1 und z_2 symmetrisch zu K_1 und K_2 liegen, liegen auch $w_1 = 0$ und $w_2 = \infty$ symmetrisch zu den Bildkreisen $T(K_1)$ und $T(K_2)$. Da z_2 nicht auf $K_{1,2}$ liegt, liegt $w_2 = \infty$ nicht auf den Bilder. Damit müssen $T(K_1)$ und $T(K_2)$ Kreise um den Ursprung sein.

Da $z_3 = 0$ auf K_1 liegt, wird K_1 wegen $T(0) = 1$ auf den Einheitskreis abgebildet.

Aus $T(0) = 1 = k \cdot \dfrac{0-z_1}{0-z_2} = k \cdot \dfrac{z_1}{z_2}$ folgt $k = \dfrac{z_2}{z_1}$ und

$$T(z) = \frac{z_2(z-z_1)}{z_1(z-z_2)} = \frac{z_2 z - z_2 z_1}{z_1 z - z_1 z_2} = \frac{z_2 z - 9}{z_1 z - 9}$$

Der Radius R von $T(K_2)$ kann, da $z_4 = 3$ auf K_2 liegt, durch $R = |T(3)|$ bestimmt werden.

Konkret ergibt sich für $z_1 = \frac{9-3\sqrt{5}}{2} \approx 1.15$

$$R = \left| \frac{3 \cdot \frac{9+3\sqrt{5}}{2} - 9}{3 \cdot \frac{9-3\sqrt{5}}{2} - 9} \right| = \left| \frac{1+\sqrt{5}}{1-\sqrt{5}} \right| \approx 2.618$$

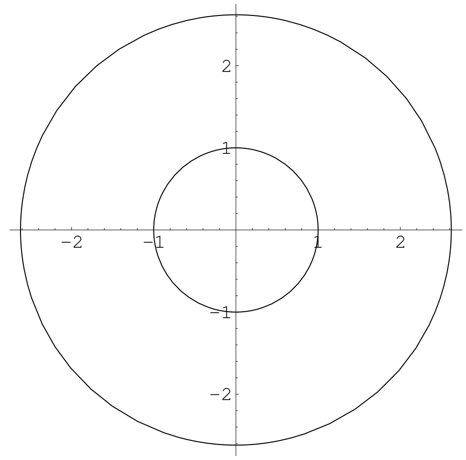


Bild 16 c): Kreise $T(K_1)$ und $T(K_2)$ mit $z_1 = \frac{9-3\sqrt{5}}{2} \approx 1.15$

Da z_1 im Inneren von K_1 liegt, wird das beschränkte zwischen den beiden Kreisen liegende Gebiet abgebildet auf den Kreisring

$$\{w \in \mathbb{C} \mid 1 < |w| < R = 2.618\}.$$

Im umgekehrten Fall, d.h. $z_1 = \frac{9+3\sqrt{5}}{2} \approx 7.85$, erhält man den Kreisring

$$\{w \in \mathbb{C} \mid R = 0.38 < |w| < 1\}.$$

Lösung 17:

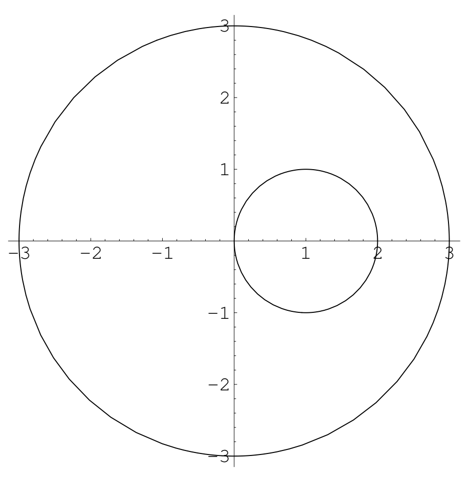


Bild 17 a): Gebiet D

Gesucht ist die reellwertige Funktion $u : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ für die mit $z = x + iy$ gilt

$$\begin{aligned} \Delta u(x,y) &= 0 \quad \text{für alle} \quad (x,y)^T \in D \\ u(x,y) &= 2 \quad \text{für alle} \quad (x,y)^T \in K_2 \\ u(x,y) &= 1 \quad \text{für alle} \quad (x,y)^T \in K_1 \,. \end{aligned}$$

Das Gebiet D wird jetzt durch die konforme Möbius-Transformation T aus Aufgabe 16 auf einen der Kreisringe, z.B. $T(D) = \{w \in \mathbb{C} \mid 1 < |w| < R = 2.618\}$ abgebildet.

Die konform verpflanzte Funktion lautet mit $T(z) = w = \xi + i\eta$

$$U(\xi,\eta) = U(w) := u(T^{-1}(w)) = u(z)$$

und erfüllt wegen des zweiten konformen Verpflanzungssatzes:

$\Delta u = \Delta U \cdot |T'(z)|^2$ und $T'(z) \neq 0$ das Randwertproblem

$$\begin{aligned} \Delta U(\xi,\eta) &= 0 \quad \text{für alle} \quad (\xi,\eta)^T \in T(D) \\ U(\xi,\eta) &= 2 \quad \text{für alle} \quad (\xi,\eta)^T \in T(K_2) \\ U(\xi,\eta) &= 1 \quad \text{für alle} \quad (\xi,\eta)^T \in T(K_1) \,. \end{aligned}$$

Dieses Problem im Kreisring $T(D)$ lässt sich besser in Polarkoordinaten lösen, deshalb wird erneut mit $\xi = r\cos\varphi$, $\eta = r\sin\varphi$,
$1 \leq r \leq R$, $0 \leq \varphi < 2\pi$ und $v(r,\varphi) := U(\xi(r,\varphi), \eta(r,\varphi))$ transformiert und das Problem lautet jetzt

$$\begin{aligned} v_{rr} + \frac{1}{r}v_r + \frac{1}{r^2}v_{\varphi\varphi} &= 0 \quad \text{für alle} \quad 1 \leq r \leq R\,, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi \\ v(R,\varphi) &= 2\,, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi \\ v(1,\varphi) &= 1\,. \end{aligned}$$

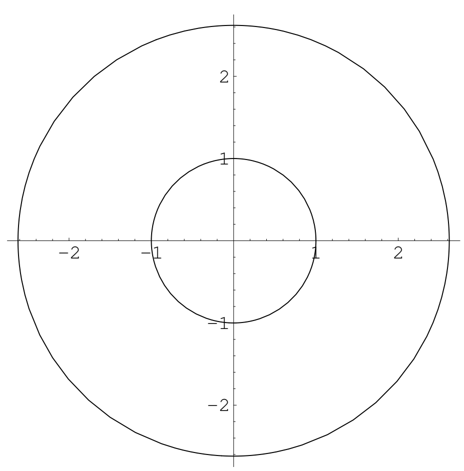


Bild 17 b): $T(D) = \{w \in \mathbb{C} \mid 1 < |w| < R = 2.618\}$ mit $z_1 = \frac{9-3\sqrt{5}}{2} \approx 1.15$

Auf Grund der Gebietssymmetrie und der Rotationssymmetrie der Randdaten liegt die Vermutung nahe, dass dieses Problem eine rotationssymmetrische Lösung besitzt, d.h. $v(r,\varphi) = v(r)$. Das Problem vereinfacht sich so zu einer Randwertaufgabe mit gewöhnlicher Differentialgleichung

$$\begin{aligned} v_{rr} + \frac{1}{r} v_r &= 0 \qquad \text{für alle} \qquad 1 < r < R \\ v(R) &= 2\,, \\ v(1) &= 1\,, \end{aligned}$$

deren allgemeine Lösung lautet $v(r) = c_1 \ln r + c_2$.

Anpassen an die Randdaten liefert

$1 = v(1) = c_1 \ln 1 + c_2 = c_2 \quad$ und $\quad 2 = v(R) = c_1 \ln R + 1$
$\Rightarrow\ c_1 = 1/\ln R$.

Die gesuchte Lösung in Polarkoordinaten lautet somit

$$v(r,\varphi) = v(r) = \frac{\ln r}{\ln R} + 1.$$

Rücktransformation in die $w-$Ebene ergibt dort die Lösung

$$U(w) = \frac{\ln |w|}{\ln R} + 1.$$

Rücktransformation in die $z-$Ebene ergibt dort die Lösung

$$u(z) = \frac{\ln |T(z)|}{\ln R} + 1.$$

Mit (beachte $z_{1,2} \in \mathbb{R}$)

$$\begin{aligned} |T(z)| &= \left|\frac{z_2 z - 9}{z_1 z - 9}\right| = \left(\frac{z_2 z \bar{z}_2 \bar{z} - 9(z_2 z + \bar{z}_2 \bar{z}) + 81}{z_1 z \bar{z}_1 \bar{z} - 9(z_1 z + \bar{z}_1 \bar{z}) + 81}\right)^{1/2} \\ &= \left(\frac{z_2^2 z\bar{z} - 9 z_2 (z + \bar{z}) + 81}{z_1^2 z\bar{z} - 9 z_1 (z + \bar{z}) + 81}\right)^{1/2} \\ &= \left(\frac{z_2^2 (x^2 + y^2) - 18 z_2 x + 81}{z_1^2 (x^2 + y^2) - 18 z_1 x + 81}\right)^{1/2} \end{aligned}$$

ergibt sich in der $(x,y)-$Ebene die Lösungsdarstellung

$$u(x,y) = \frac{1}{2 \ln R} \ln \left(\frac{z_2^2 (x^2 + y^2) - 18 z_2 x + 81}{z_1^2 (x^2 + y^2) - 18 z_1 x + 81}\right) + 1\,.$$

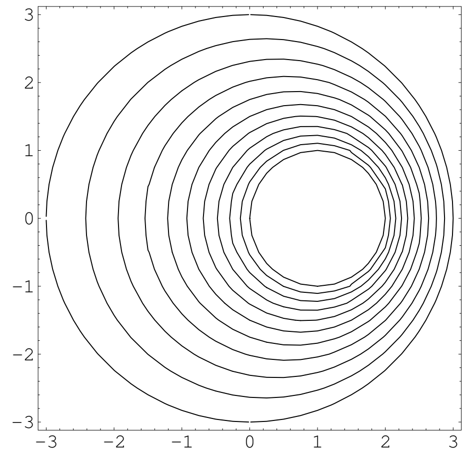


Bild 17 c): Höhenlinien der Lösung $u(x, y)$

Lösung 18:

a) direkt:

Kurvenparametrisierung: $c(t) = 2it + 1 - i\,, \quad 0 \le t \le 1 \quad \Rightarrow \quad \dot{c}(t) = 2i$

$$\begin{aligned}
\int_c z^3 + 4\,dz &= \int_0^1 ((c(t))^3 + 4)\dot{c}(t)\,dt = \int_0^1 ((2it + 1 - i)^3 + 4)2i\,dt \\
&= \int_0^1 (-8it^3 - 12(1-i)t^2 + 12t - 2i - 2 + 4)2i\,dt \\
&= \int_0^1 16t^3 - 24(1+i)t^2 + 24it + 4 + 4i\,dt \\
&= \left(4t^4 - 8(1+i)t^3 + 12it^2 + (4+4i)t\right)\Big|_0^1 \\
&= 4 - 8(1+i) + 12i + (4+4i) = 8i
\end{aligned}$$

Stammfunktion:

$$\begin{aligned}
\int_c z^3 + 4\,dz &= \int_{1-i}^{1+i} z^3 + 4\,dz = \left(\frac{z^4}{4} + 4z\right)\Bigg|_{1-i}^{1+i} \\
&= \left(\frac{(1+i)^4}{4} - \frac{(1-i)^4}{4} + 4(1 + i - (1-i)\right) = \frac{-4}{4} - \frac{-4}{4} + 8i = 8i
\end{aligned}$$

b) direkt: $\quad c(t) = i\pi t \;$ mit $\; -1 \leq t \leq 0$

$$\begin{aligned}
\int\limits_c ze^z\,dz &= \int\limits_{-1}^{0} \dot{c}(t)c(t)e^{c(t)}\,dt = \int\limits_{-1}^{0} i\pi i\pi t e^{i\pi t}\,dt = -\pi^2 \int\limits_{-1}^{0} te^{i\pi t}\,dt \\
&= -\pi^2 \left(\left. \frac{te^{i\pi t}}{i\pi} \right|_{-1}^{0} - \frac{1}{i\pi} \int\limits_{-1}^{0} e^{i\pi t}\,dt \right) = -\pi^2 \left. \left(\frac{te^{i\pi t}}{i\pi} - \frac{e^{i\pi t}}{(i\pi)^2} \right) \right|_{-1}^{0} \\
&= e^{i\pi t}\left.(i\pi t - 1)\right|_{-1}^{0} = -1 - e^{-i\pi}(-i\pi - 1) \\
&= -1 + (-i\pi - 1) = -2 - i\pi
\end{aligned}$$

Stammfunktion:

$$\begin{aligned}
\int\limits_c ze^z\,dz &= \int\limits_{-i\pi}^{0} ze^z\,dz = e^z\left.(z-1)\right|_{-i\pi}^{0} = -1 - e^{-i\pi}(-i\pi - 1) \\
&= -1 + (-i\pi - 1) = -2 - i\pi
\end{aligned}$$

c) (i) $c_1(t) = it$ mit $\pi/4 \leq t \leq 3\pi/4$

direkt:

$$\int_{c_1} \frac{1}{z}\,dz = \int_{\pi/4}^{3\pi/4} \frac{i}{it}\,dt = \ln t|_{\pi/4}^{3\pi/4} = \ln\frac{3\pi}{4} - \ln\frac{\pi}{4} = \ln 3$$

Stammfunktion:

$$\int_{c_1} \frac{1}{z}\,dz \;=\; \ln z|_{\pi i/4}^{3\pi i/4} = \ln\left|\frac{3\pi i}{4}\right| + i\frac{\pi}{2} - \left(\ln\left|\frac{\pi i}{4}\right| + i\frac{\pi}{2}\right) = \ln\frac{3\pi}{4} - \ln\frac{\pi}{4} = \ln 3$$

(ii) $c_2(t) = e^{it}$ mit $\pi/4 \leq t \leq 3\pi/4$

direkt:

$$\int_{c_2} \frac{1}{z}\,dz = \int_{\pi/4}^{3\pi/4} \frac{ie^{it}}{e^{it}}\,dt = \int_{\pi/4}^{3\pi/4} i\,dt = it|_{\pi/4}^{3\pi/4} = \frac{\pi i}{2}$$

Stammfunktion:

$$\int_{c_2} \frac{1}{z}\,dz = \ln z|_{(1+i)/\sqrt{2}}^{(-1+i)/\sqrt{2}} = \ln\left|\frac{-1+i}{\sqrt{2}}\right| + i\frac{3\pi}{4} - \ln\left|\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right| - i\frac{\pi}{4} = \frac{\pi i}{2}$$

d) direkt: $\quad c(\varphi) = e^{i\varphi}$ mit $0 \leq \varphi \leq \pi/2$

$$\begin{aligned}
\int\limits_1^i \ln z\,dz &= \int\limits_0^{\pi/2} \ln(e^{i\varphi})ie^{i\varphi}\,d\varphi \;=\; i\int\limits_0^{\pi/2} e^{i\varphi}(\ln|e^{i\varphi}| + i\varphi)\,d\varphi \;=\; -\int\limits_0^{\pi/2} e^{i\varphi}\varphi\,d\varphi \\
&= \left.\left(-\frac{\varphi}{i}e^{i\varphi}\right)\right|_0^{\pi/2} + \frac{1}{i}\int\limits_0^{\pi/2} e^{i\varphi}\,d\varphi \;=\; -\frac{\pi}{2} - e^{i\varphi}|_0^{\pi/2} \;=\; -\frac{\pi}{2} - i + 1
\end{aligned}$$

Stammfunktion: In der geschlitzten Ebene $\mathbb{C}\backslash\mathbb{R}_-^0$ ist $\ln z$ holomorph.

$$\begin{aligned}\int_1^i 1\cdot\ln z\,dz &= z\ln z\big|_1^i - \int_1^i z\cdot\frac{1}{z}\,dz = \left(z\left(\ln|z| + i\arg z\right) - z\right)\big|_1^i \\ &= i\left(\ln|i| + i\frac{\pi}{2}\right) - (i-1) = -\frac{\pi}{2} - i + 1\end{aligned}$$

Lösung 19:

a) Isolierte Singularität bei $z_0 = -2$ wird nicht von $c:\ |z+1-i| = 1$ umschlossen

$$\oint_{|z+1-i|=1} \frac{1}{z+2}\,dz = 0$$

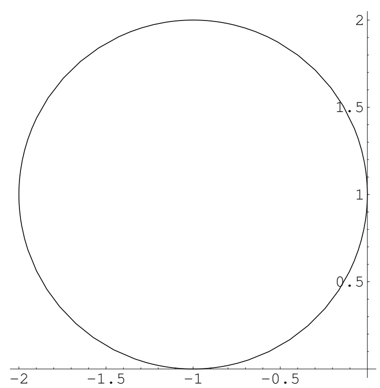


Bild 19 a): Kurve $c:\ |z+1-i| = 1$

b) $\dfrac{z^2-2z+2}{z^3-z^2+2} = \dfrac{(z-1-i)(z-1+i)}{(z+1)(z-1-i)(z-1+i)} = \dfrac{1}{z+1}$

Isolierte aber hebbare Singularität bei $z_1 = 1+i$, $z_2 = 1-i$:

Isolierte und nicht hebbare Singularität bei $z_0 = -1$:

z_0 wird von $c_1:\ |z| = 0.5$ nicht umschlossen: $\displaystyle\oint_{c_1} \frac{1}{z+1}\,dz = 0$

z_0 wird von $c_2:\ |z| = 1.5$ umschlossen: $\displaystyle\oint_{c_2} \frac{1}{z+1}\,dz = 2\pi i$

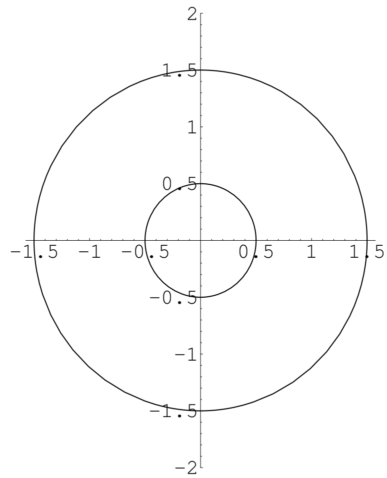


Bild 19 b): Kurven $c_1 : |z| = 0.5$ und $c_2 : |z| = 1.5$

c) $\dfrac{\cos z}{z^2 - \pi^2} = \cos z \cdot \dfrac{1}{z+\pi} \cdot \dfrac{1}{z-\pi}$,

Singularitäten bei $z_0 = -\pi$ und $z_1 = \pi$

$c_1 : |z+2| = 2$ umschließt nur die isolierte Singularität $z_0 = -\pi$

$$f(z) = \cos z \cdot \frac{1}{z-\pi} \quad \Rightarrow \quad f(-\pi) = \cos(-\pi) \cdot \frac{1}{-\pi-\pi} = \frac{1}{2\pi}$$

$$\oint\limits_{c_1} \frac{f(z)}{z+\pi}\, dz = \frac{2\pi i f(-\pi)}{0!} = \frac{2\pi i}{2\pi} = i$$

$c_2 : |z-1.5| = 2$ umschließt nur die isolierte Singularität $z_1 = \pi$

$$g(z) = \cos z \cdot \frac{1}{z+\pi} \quad \Rightarrow \quad g(\pi) = \cos(\pi) \cdot \frac{1}{\pi+\pi} = -\frac{1}{2\pi}$$

$$\oint\limits_{c_2} \frac{g(z)}{z-\pi}\, dz = \frac{2\pi i g(\pi)}{0!} = \frac{2\pi i}{-2\pi} = -i$$

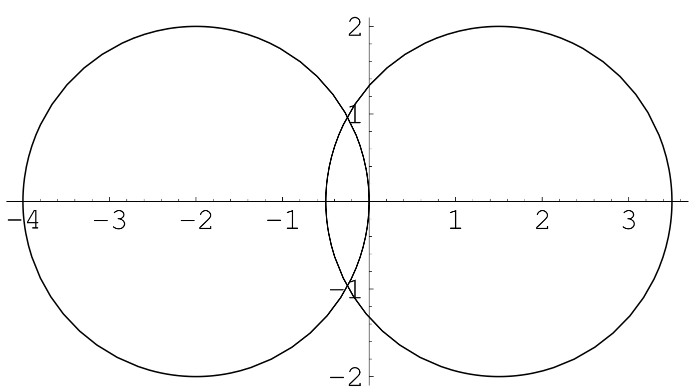


Bild 19 c): Kurven $c_1 : |z+2| = 2$ und $c_2 : |z-1.5| = 2$

d) $c : |z-i| = 3$ umschließt zunächst beide Singularität $z_0 = -2$ und $z_1 = 1$

Partialbruchzerlegung: $\dfrac{z^2+3z-1}{z^2+z-2} = 1 + \dfrac{1}{z-1} + \dfrac{1}{z+2}$,

$$\oint\limits_c \frac{z^2+3z-1}{z^2+z-2}\,dz = \oint\limits_c dz + \oint\limits_c \frac{1}{z-1}\,dz + \oint\limits_c \frac{1}{z+2}\,dz = 0 + 2\pi i + 2\pi i = 4\pi i$$

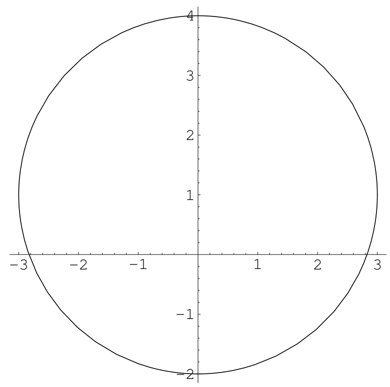


Bild 19 d): Kurve $c:\ |z-i| = 3$

e) Isolierte Singularität bei $z_0 = 0$ liegt in $c:\ |z| = \pi$

$$\oint\limits_{|z|=\pi} z^2 + \frac{e^z}{z^2}\,dz = \oint\limits_{|z|=\pi} z^2\,dz + \oint\limits_{|z|=\pi} \frac{e^z}{z^2}\,dz = 0 + 2\pi i \frac{(e^z)'|_{z=0}}{1!} = 2\pi i$$

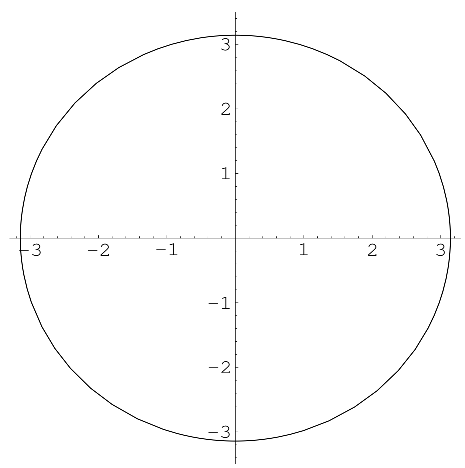


Bild 19 e): Kurve $c:\ |z| = \pi$

f) Einzige Singularität bei $z_0 = 1 + i$,

$\ln z$ ist im von der Kurve $c:\ |z-1-2i| = 2$ umschlossenen Gebiet holomorph.

$$\ln^{(iv)} z = -\frac{6}{z^4} \quad \Rightarrow \quad \ln^{(iv)}(1+i) = -\frac{6}{(1+i)^4} = -\frac{6}{(\sqrt{2}e^{i\pi/4})^4} = \frac{3}{2}$$

$$\oint_c \frac{\ln z}{(z-1-i)^5}\,dz = \frac{2\pi i \ln^{(iv)}(1+i)}{4!} = \frac{\pi i}{8}$$

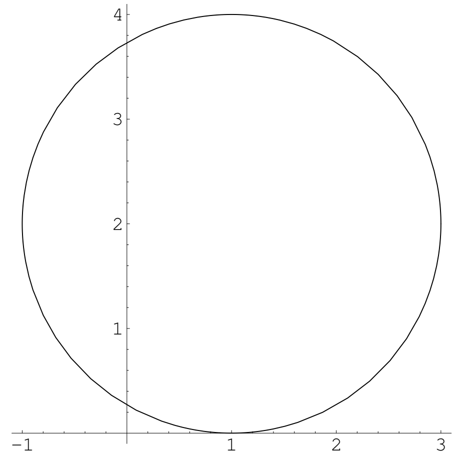


Bild 19 f): Kurve $c: \ |z-1-2i| \ = \ 2$

Lösung 20:

a) Der Integrand f wird unter Berücksichtigung des Entwicklungspunktes $z_0 = 1$ so umgeformt, dass die Summenformel für die geometrische Reihe angewendet werden kann.

$$\begin{aligned} f(\xi) &= \frac{1}{5-3\xi} = \frac{1}{5-3(\xi-1)-3} = \frac{1}{2-3(\xi-1)} \\ &= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\frac{3(\xi-1)}{2}} = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{3(\xi-1)}{2}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^n}{2^{n+1}}(\xi-1)^n \end{aligned}$$

Diese Reihe konvergiert für $|3(\xi-1)/2| < 1$ gleichmäßig, darf also in der Kreisscheibe $|\xi-1| < 2/3 =: R$ gliedweise integriert werden:

$$\begin{aligned} F(z) &= \int_1^z \frac{d\xi}{5-3\xi} = \int_1^z \sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^n}{2^{n+1}}(\xi-1)^n\,d\xi \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^n}{2^{n+1}}\int_1^z(\xi-1)^n\,d\xi = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^n}{(n+1)2^{n+1}}(z-1)^{n+1}\,. \end{aligned}$$

b) (i) $f(z) = \dfrac{5z}{z^2-2z+2} = \dfrac{5z}{(z-(1+i))(z-(1-i))}$

Die Singularitäten liegen bei $z_1 = 1+i$ und $z_2 = 1-i$. Damit ergibt sich der Konvergenzradius der Taylorreihe zum Entwicklungspunkt z_0 durch

$$r = \min\{|z_1-z_0|, |z_2-z_0|\}\,.$$

Für $z_0 = -1$ bzw. $z_0 = -1 - i$ erhält man:
$r_1 = \min\{|1 + i - (-1)|, |1 - i - (-1)|\}$
$\quad = \min\{|2 + i|, |2 - i|\} = \sqrt{5}\,,$
$r_2 = \min\{|1 + i - (-1 - i)|, |1 - i - (-1 - i)|\}$
$\quad = \min\{2|1 + i|, 2\} = 2.$

(ii) Die Singularitäten von $f(z) = \dfrac{1}{\cosh z}$ ergeben sich aus
$0 = \cosh z = \cos y \cosh x + i \sin y \sinh x$
$\Rightarrow \quad \cos y = 0 \quad \Rightarrow \quad y = \pi/2 + k\pi$
$\Rightarrow \quad \sin(\pi/2 + k\pi) \sinh x = (-1)^k \sinh x = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0$
Die Singularitäten liegen also bei $z_k = (\pi/2 + k\pi)i\ ,\ k \in \mathbb{Z}$.
Der Konvergenzradius für $z_0 = \dfrac{7i}{2}$ ergibt sich durch:

$$\begin{aligned} r &= \min_k\{|z_k - z_0|\} = \min_k\{|(\pi/2 + k\pi)i - \frac{7i}{2}|\} \\ &= \min_k |\pi + 2k\pi - 7|/2 = |\pi + 2\pi - 7|/2 \approx 1.2124 \end{aligned}$$

(iii) Der Hauptwert des Logarithmus der Funktion $\ln(3z+5)$ ist nur in der geschlitzten Ebene definiert, d.h. reelle Wert x mit $3x + 5 \leq 0 \Rightarrow x \leq -5/3$ sind nicht zugelassen. Der Konvergenzradius ergibt sich daher als kleinster Abstand zu dieser nicht definierten Halbgeraden.
Für $z_0 = 0$ erhält man $r_1 = |0 - (-5/3)| = 5/3$
und für $z_0 = i$ erhält man $r_2 = |i - (-5/3)| = \sqrt{34}/3$.

Lösung 21:

Die Faktorisierung des Nenners $z^2-1 = (z+1)(z-1)$ ergibt die Singularitäten der Funktion bei $z_1 = -1$ und $z_2 = 1$. Eine Partialbruchzerlegung liefert:

$$f(z) = \frac{2z}{(z+1)(z-1)} = \frac{1}{z+1} + \frac{1}{z-1}\ .$$

a) Aufgrund der Lage des Entwicklungspunktes bei $z_0 = 2$ und der beiden Singularitäten $z_1 = -1$ und $z_2 = 1$ kann man ablesen, dass eine Taylor-Reihenentwicklung in der Kreisscheibe $|z - 2| < 1$ vorliegen wird, eine Laurent-Reihenentwicklung im Kreisring $1 < |z-2| < 3$ und eine davon verschiedene Laurent-Reihenentwicklung im Außenraum $3 < |z - 2|$.

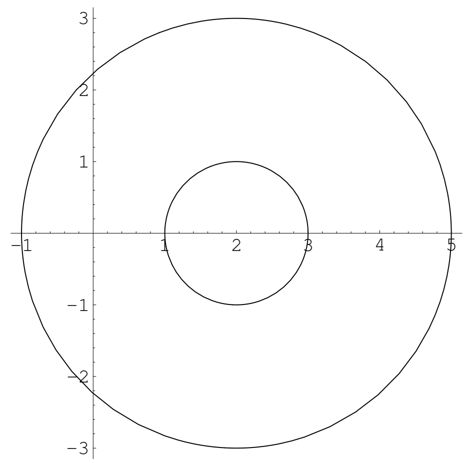


Bild 21 a): Konvergenzbereiche der Laurent-Reihenentwicklungen um $z_0 = 2$

Mit Hilfe der Summenformel der geometrischen Reihe im entsprechenden Konvergenzbereich können die Partialbrüche durch Reihenentwicklungen dargestellt werden:

$|z-2| < 1$:

$$\frac{1}{z-1} = \frac{1}{1+(z-2)} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(z-2)^n$$

$|z-2| > 1$:

$$\begin{aligned}\frac{1}{z-1} &= \frac{1}{z-2}\cdot\frac{1}{1+1/(z-2)} = \frac{1}{z-2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{-1}{z-2}\right)^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(z-2)^{n+1}} = -\sum_{n=-\infty}^{-1}(-1)^n(z-2)^n\end{aligned}$$

$|z-2| < 3$:

$$\begin{aligned}\frac{1}{z+1} &= \frac{1}{3+z-2} = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1+(z-2)/3} \\ &= \frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{z-2}{3}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3^{n+1}}(z-2)^n\end{aligned}$$

$|z-2| > 3$:

$$\begin{aligned}\frac{1}{z+1} &= \frac{1}{z-2}\cdot\frac{1}{1+3/(z-2)} = \frac{1}{z-2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{3}{z-2}\right)^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^n(-1)^n}{(z-2)^{n+1}} = -\sum_{n=-\infty}^{-1}\frac{(-1)^n}{3^{n+1}}(z-2)^n\,.\end{aligned}$$

Taylor-Reihe mit Konvergenz in der Kreisscheibe $|z-2| < 1$:

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{z+1} + \frac{1}{z-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^{n+1}} (z-2)^n + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (z-2)^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{1}{3^{n+1}} + 1 \right) (z-2)^n . \end{aligned}$$

Laurent-Reihe mit Konvergenz im Kreisring $1 < |z-2| < 3$:

$$f(z) = \frac{1}{z+1} + \frac{1}{z-1} = \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^{n+1}} (z-2)^n}_{\text{Nebenteil}} - \underbrace{\sum_{n=-\infty}^{-1} (-1)^n (z-2)^n}_{\text{Hauptteil}} .$$

Laurent-Reihe mit Konvergenz im Außenring $3 < |z-2|$:

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{z+1} + \frac{1}{z-1} = -\sum_{n=-\infty}^{-1} \frac{(-1)^n}{3^{n+1}} (z-2)^n - \sum_{n=-\infty}^{-1} (-1)^n (z-2)^n \\ &= -\sum_{n=-\infty}^{-1} (-1)^n \left(\frac{1}{3^{n+1}} + 1 \right) (z-2)^n . \end{aligned}$$

b) Da der Entwicklungspunkt $z_0 = -1$ mit der Singularität $z_1 = -1$ übereinstimmt, gibt es keine Taylor-Reihenentwicklung.

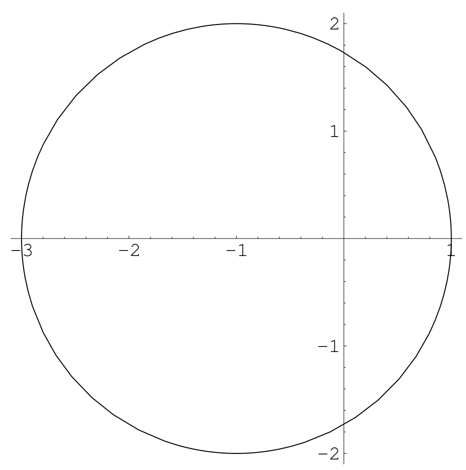


Bild 21 b): Konvergenzbereiche der Laurent-Reihenentwicklungen um $z_0 = -1$

Analog zu a) ergibt sich:

$|z+1| < 2 \quad :$

$$\frac{1}{z-1} = \frac{1}{-2+z+1} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1-(z+1)/2} = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{n+1}}(z+1)^n$$

$|z+1| > 2 \quad :$

$$\frac{1}{z-1} = \frac{1}{z+1} \cdot \frac{1}{1-2/(z+1)} = \frac{1}{z+1} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{z+1}\right)^n = \sum_{n=-\infty}^{-1} \frac{1}{2^{n+1}}(z+1)^n \,.$$

In der punktierten Kreisscheibe $0 < |z+1| < 2$ konvergente Laurent-Reihe:

$$f(z) = \frac{1}{z+1} + \frac{1}{z-1} = \underbrace{\frac{1}{z+1}}_{\text{Hauptteil}} \underbrace{-\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{n+1}}(z+1)^n}_{\text{Nebenteil}} \,.$$

Im Außenring $|z+1| > 2$ konvergente Laurent-Reihe:

$$f(z) = \frac{1}{z+1} + \frac{1}{z-1} = \frac{1}{z+1} + \sum_{n=-\infty}^{-1} \frac{1}{2^{n+1}}(z+1)^n = \frac{2}{z+1} + \sum_{n=-\infty}^{-2} \frac{1}{2^{n+1}}(z+1)^n \,.$$

Lösung 22:

a) Einzige Singularität von f ist der Entwicklungspunkt $z_0 = 0$. Für $|z| > 0$ gilt:

$$f(z) = \frac{e^z - 1 - z - z^2/2}{z^2} = \frac{1}{z^2}\left(\frac{z^3}{3!} + \frac{z^4}{4!} + \frac{z^5}{5!} + \cdots\right) = \frac{z}{3!} + \frac{z^2}{4!} + \frac{z^3}{5!} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{(n+2)!} \quad \Rightarrow \quad a_{-1} = 0$$

b) Einzige Singularität von f ist der Entwicklungspunkt $z_0 = -\pi$. Für $|z+\pi| > 0$ gilt:

$$\begin{aligned}
f(z) &= z \sin\left(\frac{1}{z+\pi}\right) \\
&= (z+\pi-\pi)\left(\frac{1}{z+\pi} - \frac{1}{3!}\cdot\frac{1}{(z+\pi)^3} + \frac{1}{5!}\cdot\frac{1}{(z+\pi)^5} \mp \cdots\right) \\
&= \left(1 - \frac{1}{3!}\cdot\frac{1}{(z+\pi)^2} + \frac{1}{5!}\cdot\frac{1}{(z+\pi)^4} \mp \cdots\right) \\
&\quad + \left(-\frac{\pi}{z+\pi} + \frac{\pi}{3!}\cdot\frac{1}{(z+\pi)^3} \mp \cdots\right) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\left(\frac{1}{z+\pi}\right)^{2n} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\pi(-1)^{n+1}}{(2n+1)!}\left(\frac{1}{z+\pi}\right)^{2n+1} \\
\Rightarrow &\quad a_{-1} = -\pi
\end{aligned}$$

c) Einzige Singularität von f ist der Entwicklungspunkt $z_0 = 0$. Für $|z| > 0$ gilt:

$$\begin{aligned}
f(z) &= \frac{\cos z}{z^5} = \frac{1}{z^5}\left(1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} \pm \cdots\right) \\
&= \left(\frac{1}{z^5} - \frac{1}{2!}\cdot\frac{1}{z^3} + \frac{1}{4!}\cdot\frac{1}{z} - \frac{z}{6!} \pm \cdots\right) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n-5} \quad \Rightarrow \quad a_{-1} = \frac{1}{4!}
\end{aligned}$$

Lösung 23:

a) Die Singularitäten von

$$f(z) = \frac{1}{z^4+z^2} = \frac{1}{z^2(z^2+1)} = \frac{1}{z^2} - \frac{1}{z^2+1}$$

sind gegeben durch die Nennernullstellen, die keine Zählernullstellen sind:
$z_1 = i$ und $z_2 = -i$ sind Pole 1. Ordnung und $z_3 = 0$ ist Pol 2. Ordnung.

$$\text{Res }(f; z_1) = \left.\frac{1}{(z^4+z^2)'}\right|_{z=i} = \left.\frac{1}{4z^3+2z}\right|_{z=i} = \frac{1}{4i^3+2i} = \frac{i}{2}$$

$$\text{Res }(f; z_2) = (z+i)\cdot\left.\frac{1}{z^4+z^2}\right|_{z=-i} = \left.\frac{1}{z^2(z-i)}\right|_{z=-i} = \frac{1}{(-i)^2(-2i)} = -\frac{i}{2}$$

$$\text{Res }(f; z_3) = \frac{1}{1!}\left.\left(z^2\left(\frac{1}{z^4+z^2}\right)\right)'\right|_{z=0} = \left.\left(\frac{1}{z^2+1}\right)'\right|_{z=0} = -\left.\frac{2z}{(z^2+1)^2}\right|_{z=0} = 0$$

Die Laurent-Entwicklung im Außengebiet $|z| > 1$ ergibt sich durch:

$$f(z) = \frac{1}{z^4+z^2} = \frac{1}{z^4}\cdot\frac{1}{1+1/z^2} = \frac{1}{z^4}\left(1 - \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z^4}\cdots\right) = \frac{1}{z^4} - \frac{1}{z^6} + \frac{1}{z^8}\cdots$$

b) $f(z) = \sin\frac{1}{z} = \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}}_{=:a_n} \frac{1}{z^{2n+1}} = \frac{1}{z} - \frac{1}{3!z^3} + \frac{1}{5!z^5} + \cdots$

Die einzige Singularität $z_0 = 0$ ist wesentlich mit
Res $(f; z_0) = a_{-1} = 1$.

c) $f(z) = \frac{z - \sin z}{z^2} = \frac{1}{z^2}\left(\frac{z^3}{3!} - \frac{z^5}{5!} + \frac{z^7}{7!} + \cdots\right) = \frac{z}{3!} - \frac{z^3}{5!} + \frac{z^5}{7!} + \cdots$

Die einzige Singularität $z_0 = 0$ ist hebbar mit
Res $(f; z_0) = a_{-1} = 0$.

d) Die Singularitäten von $f(z) = \coth z = \frac{\cosh z}{\sinh z}$ ergeben sich aus:

$$\begin{aligned} 0 &= \sinh z = \frac{1}{2}\left(e^z - e^{-z}\right) = \frac{1}{2}\left(e^{x+iy} - e^{-x-iy}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(e^x(\cos y + i\sin y) - e^{-x}(\cos y - i\sin y)\right) \\ &= \cos y \sinh x + i \sin y \cosh x\,. \end{aligned}$$

Die Lösungen sind gegeben durch $y = k\pi\,, k \in \mathbb{Z}$ und $x = 0$. Die Nennernullstellen $z_k = ik\pi$ sind einfach und auch keine Zählernullstellen, denn

$$(\sinh z)'|_{z=ik\pi} = \cosh ik\pi = \cos k\pi \neq 0\,.$$

Also sind z_k Pole 1. Ordnung und man erhält

$$\text{Res }(f; z_k) = \left(\frac{\cosh z}{(\sinh z)'}\right)\Bigg|_{z=z_k} = \left(\frac{\cosh z}{\cosh z}\right)\Bigg|_{z=z_k} = 1\,.$$

Es gibt kein Außengebiet ohne Singularitäten.

Lösung 24:

a) Aus der Faktorisierung

$$z^4 - z^2 - 2z + 2 = (z + 1 - i)(z + 1 + i)(z - 1)^2$$

ergeben sich die Nennernullstellen, die keine Zählernullstellen sind

$$z_0 = -1 + i\,, \quad z_1 = -1 - i\,, \quad z_2 = 1\,.$$

Damit sind z_0 und z_1 Pole 1. Ordnung und z_2 ist Pol 2. Ordnung.

Der Hauptteil der Laurententwicklung in z_k , $k = 0, 1$ besitzt damit die Form

$$h(z, z_k) = \frac{a_{-1,k}}{z - z_k}\,, \quad \text{wobei} \quad a_{-1,k} = \text{Res}(f(z); z_k)$$

gilt. Für $z_0 = -1 + i$ ergibt sich

$$\begin{aligned}
\operatorname{Res}(f(z); -1+i) &= \left.\frac{25}{(z+1+i)(z-1)^2}\right|_{z=-1+i} \\
&= \frac{25}{(-1+i+1+i)(-1+i-1)^2} \\
&= \frac{25}{2i(3-4i)} = \frac{25(3+4i)}{2i \cdot 25} = \frac{4-3i}{2}
\end{aligned}$$

Zum gleichen Ergebnis führt die Taylor-Reihenentwicklung des holomorphen Anteils von f um $z_0 = -1 + i$:

$$f(z) = \frac{1}{z+1-i} \cdot \underbrace{\frac{25}{(z+1+i)(z-1)^2}}_{= g_1(z), \text{(holom.)}}$$

$$= \frac{1}{z+1-i}(g_1(-1+i) + g_1'(-1+i)(z+1-i) + \cdots)$$

mit $g_1(-1+i) = \operatorname{Res}(f(z); -1+i) = \dfrac{4-3i}{2}$. Insgesamt erhält man also

$$f(z) = \underbrace{\frac{4-3i}{2(z+1-i)}}_{= h(z,-1+i)} + \underbrace{g_1'(-1+i) + \cdots}_{\text{Nebenteil}}$$

Für $z_1 = -1 - i$ ergibt sich entsprechend

$$f(z) = \frac{1}{z+1+i} \cdot \underbrace{\frac{25}{(z+1-i)(z-1)^2}}_{= g_2(z), \text{(holom.)}}$$

$$= \frac{1}{z+1+i}(g_2(-1-i) + g_2'(-1-i)(z+1+i) + \cdots)$$

mit $g_2(-1-i) = \operatorname{Res}(f(z); -1-i) = \dfrac{4+3i}{2}$. Insgesamt erhält man also

$$f(z) = \underbrace{\frac{4+3i}{2(z+1+i)}}_{= h(z,-1-i)} + \underbrace{g_2'(-1-i) + \cdots}_{\text{Nebenteil}}$$

Für den Pol 2. Ordnung $z_2 = 1$ erhält man den Hauptteil der Laurent-Reihe um z_2 über die Taylor-Reihenentwicklung des holomorphen Anteils g_3 von f:

$$\begin{aligned}
f(z) &= \frac{1}{(z-1)^2} \cdot \frac{25}{(z+1-i)(z+1+i)} = \frac{1}{(z-1)^2} \cdot \underbrace{\frac{25}{z^2+2z+2}}_{= g_3(z)} \\
&= \frac{1}{(z-1)^2}\left(g_3(1) + g_3'(1)(z-1) + \frac{1}{2}g_3''(1)(z-1)^2 + \cdots\right)
\end{aligned}$$

Nach kurzer Rechnung erhält man

$$g_3(1) = 5\,, \quad g_3'(1) = -4 \;=\; \mathrm{Res}(f(z);1)$$

$$\Rightarrow \quad f(z) = \underbrace{\frac{5}{(z-1)^2} - \frac{4}{z-1}}_{=\,h(z,1)} + \underbrace{g_3''(1)/2 + \cdots}_{\text{Nebenteil}}$$

Die komplexe Partialbruchzerlegung lautet deshalb:

$$\begin{aligned} f(z) &= h(z,-1+i) + h(z,-1-i) + h(z,1) \\ &= \frac{4-3i}{2(z+1-i)} + \frac{4+3i}{2(z+1+i)} + \frac{5}{(z-1)^2} - \frac{4}{z-1}\,. \end{aligned}$$

Als reelle Partialbruchzerlegung ergibt sich:

$$f(z) = \frac{4z+7}{z^2+2z+2} + \frac{5}{(z-1)^2} - \frac{4}{z-1}\,.$$

b) Von den Singularitäten von f

$$z_0 = -1+i\,, \quad z_1 = -1-i\,, \quad z_2 = 1\,.$$

liegen nur z_0 und z_1 innerhalb von c.

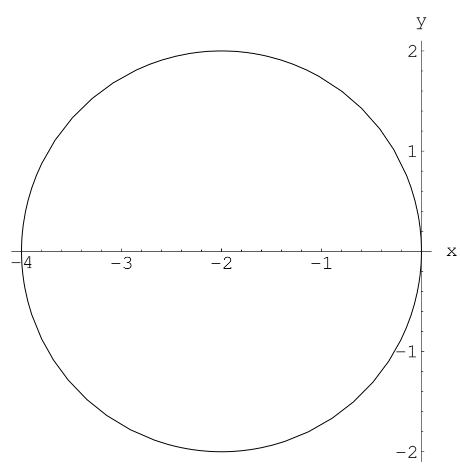


Bild 24: Kreis $c:\ |z+2| = 2$

Damit ergibt sich nach dem Residuensatz

$$\begin{aligned} \oint_c f(z)\,dz &= 2\pi i\,(\mathrm{Res}\;(f;-1+i) + \mathrm{Res}\;(f;-1-i)) \\ &= 2\pi i \left(\frac{4-3i}{2} + \frac{4+3i}{2}\right) = 8\pi i\,. \end{aligned}$$

Lösung 25:

a) Die Singularitäten der Funktion $f(z) = \dfrac{1}{z^2-4z+6}$ liegen bei $z_1 = 2+i\sqrt{2}$ und $z_2 = 2-i\sqrt{2}$, sind Pole 1. Ordnung, und man erhält:

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2-4x+6}\,dx &= 2\pi i \,\mathrm{Res}(f;z_1) = 2\pi i \left.\frac{1}{z-2+i\sqrt{2}}\right|_{z=z_1}\\ &= 2\pi i \frac{1}{2i\sqrt{2}} = \frac{\pi}{\sqrt{2}}\,.\end{aligned}$$

b) Beachtet man, dass $g(x) = \dfrac{\sin x}{x^4+324}$ eine ungerade Funktion ist, so ergibt sich

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{x^4+324}\,dx &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{x^4+324}\,dx + i\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x^4+324}\,dx\\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{\frac{e^{ix}}{x^4+324}}_{=f(x)}\,dx = 2\pi i \sum_{\mathrm{Im}\ z_k>0} \mathrm{Res}\,(f(z);z_k)\,.\end{aligned}$$

Die Singularitäten der Funktion $f(z)$ ergeben sich aus $z^4+324=0$ und lauten daher

$$z_0 = 3+3i\,,\quad z_1 = -3+3i\,,\quad z_2 = -3-3i\,,\quad z_3 = 3-3i\,.$$

Es sind Pole 1. Ordnung, wovon nur $z_{0,1}$ in der oberen Halbebene liegen mit den Residuen

$$\begin{aligned}\mathrm{Res}\,(f;z_0) &= \lim_{z\to z_0}(z-z_0)f(z) = \frac{e^{iz_0}}{(z_0-z_1)(z_0-z_2)(z_0-z_3)}\\ &= \frac{e^{i(3+3i)}}{6(6+6i)6i} = -\frac{e^{-3+3i}}{216(1-i)} = -\frac{e^{-3}}{432}\cdot e^{3i}(1+i)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{Res}\,(f;z_1) &= \lim_{z\to z_1}(z-z_1)f(z) = \frac{e^{iz_1}}{(z_1-z_0)(z_1-z_2)(z_1-z_3)}\\ &= \frac{e^{i(-3+3i)}}{-6\cdot 6i(-6+6i)} = \frac{e^{-3-3i}}{216(1+i)} = \frac{e^{-3}}{432}\cdot e^{-3i}(1-i)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{x^4+324}\,dx &= 2\pi i\,(\ \mathrm{Res}\,(f;z_0) +\ \mathrm{Res}\,(f;z_1))\\ &= 2\pi i\left(-\frac{e^{-3}}{432}\cdot e^{3i}(1+i) + \frac{e^{-3}}{432}\cdot e^{-3i}(1-i)\right)\\ &= \frac{e^{-3}\pi i}{216}\left(-(e^{3i}-e^{-3i}) - i(e^{3i}+e^{-3i})\right)\\ &= \frac{e^{-3}\pi i}{216}\left(-2i(\sin 3+\cos 3)\right) = \frac{e^{-3}\pi}{108}\,(\sin 3+\cos 3)\ .\end{aligned}$$

c) Die hebbare Singularität bei $x = 1$ wird gekürzt und dann wird durch $y = x + 2$ substituiert:

$$\int_{-2}^{\infty} \frac{x-1}{(x^2+3x-4)\sqrt{x+2}}\,dx = \int_{-2}^{\infty} \frac{1}{(x+4)\sqrt{x+2}}\,dx = \int_{0}^{\infty} \frac{1}{(y+2)\sqrt{y}}\,dy\,.$$

Nun besitzt der Integrand die Standardform $\dfrac{r(y)}{y^\alpha} = \dfrac{1}{(y+2)\sqrt{y}}$ mit $r(y) = \dfrac{1}{y+2}$ und $\alpha = 1/2$. $r(z)$ besitzt nur die Singularität $z_1 = -2$ und man erhält:

$$\int_{0}^{\infty} \frac{1}{(y+2)\sqrt{y}}\,dx = \frac{2\pi i}{1-e^{-\pi i}} \operatorname{Res}\left(\frac{1}{(z+2)\sqrt{z}}; z_1\right) = \frac{2\pi i}{1-e^{-\pi i}} \cdot \frac{1}{\sqrt{-2}} = \frac{\pi}{\sqrt{2}}\,.$$

d) Mit $z = e^{i\varphi}$ substituiere man

$$\cos\varphi = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right) \text{ bzw. } \sin\varphi = \frac{1}{2i}\left(z - \frac{1}{z}\right).$$

Die Substitution erfordert noch die Berechnung von:

$$\frac{dz}{d\varphi} = ie^{i\varphi} = iz \;\Rightarrow\; d\varphi = \frac{dz}{iz}$$

$$\int_0^{2\pi} \frac{\sin\varphi}{4+\cos\varphi}\,d\varphi = \int_{|z|=1} \frac{\frac{1}{2i}\left(z-\frac{1}{z}\right)}{4+\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)} \cdot \frac{dz}{iz} = -\int_{|z|=1} \underbrace{\frac{z^2-1}{z(z^2+8z+1)}}_{=f(z)}\,dz$$

Die Singularitäten von f ergeben sich aus $0 = z(z^2+8z+1)$. Man erhält

$$z_0 = 0\,,\quad z_1 = -4+\sqrt{15}\,,\quad z_2 = -4-\sqrt{15}\,.$$

Nur von den im Einheitskreis liegenden $z_{0,1}$ werden die Residuen benötigt.

$$\operatorname{Res}(f; z_0) = \lim_{z\to z_0}(z-z_0)f(z) = \frac{z_0^2-1}{z_0^2+8z_0+1} = -1$$

$$\begin{aligned}\operatorname{Res}(f; z_1) &= \lim_{z\to z_1}(z-z_1)f(z) = \frac{z_1^2-1}{(z_1-z_0)(z_1-z_2)}\\ &= \frac{16-8\sqrt{15}+15-1}{(-4+\sqrt{15})2\sqrt{15}} = \frac{15-4\sqrt{15}}{\sqrt{15}(-4+\sqrt{15})} = 1\end{aligned}$$

Aus dem Residuensatz erhält man damit

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} \frac{\sin\varphi}{4+\cos\varphi}\,d\varphi &= -2\pi i\,(\operatorname{Res}(f; z_0) + \operatorname{Res}(f; z_1))\\ &= -2\pi i\,(-1+1) = 0\,.\end{aligned}$$

Das Ergebnis überrascht nicht, da $\dfrac{\sin\varphi}{4+\cos\varphi}$ eine 2π-periodische ungerade Funktion ist.