Fibonaccizahlen

elementar, schön und real

Bodo Werner

Department Mathematik
Universität Hamburg

Tag der Mathematik 5. Juli 2008

Kalenderblatt der DMV

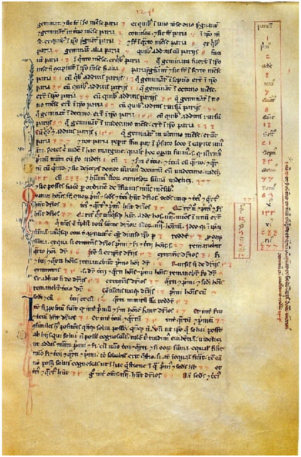
Geschichte Fibonacci I

Leonardo da Pisa, genannt FIBONACCI (1170-1250 (?))

Erster großer Mathematiker des christlichen Abendlandes!

Geschichte Fibonacci II

Liber Abbaci (1202): Indisch-arabische Ziffern



Die Folge

0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, ...

Folge (F_n)

$$F_0 = 0,\ F_1 = 1,\ F_2 = 1, ...,\ F_9 = 34,\ ......$$

Rekursion:

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}, \quad F_0 = 0,\ F_1 = 1.$$

Formel von J. P. M. BINET (1786-1856)

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\Big(\Big(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{5}\Big)^n - \Big(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{5}\Big)^n\Big), n = 0, 1, 2, \ldots.$$

Die Folge

$$0,\ 1,\ 1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 8,\ 13,\ 21,\ 34,\ \ldots\ldots\ldots$$

Folge (F_n)

$$F_0 = 0,\ F_1 = 1,\ F_2 = 1, \ldots\ldots,\ F_9 = 34,\ \ldots\ldots$$

Rekursion:

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}, \quad F_0 = 0,\ F_1 = 1.$$

Formel von J. P. M. BINET (1786-1856)

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5}\right)^n - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{5}\right)^n\right), n = 0, 1, 2, \ldots.$$

Die Folge

$$0,\ 1,\ 1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 8,\ 13,\ 21,\ 34, \ldots\ldots\ldots.$$

Folge (F_n)

$$F_0 = 0,\ F_1 = 1,\ F_2 = 1, \ldots\ldots,\ F_9 = 34,\ \ldots\ldots$$

Rekursion:

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}, \quad F_0 = 0,\ F_1 = 1.$$

Formel von J. P. M. BINET (1786-1856)

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{5}\right)^n - \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{5}\right)^n\right), n = 0, 1, 2, \ldots.$$

Die Folge

$$0,\ 1,\ 1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 8,\ 13,\ 21,\ 34,\ \ldots\ldots\ldots\ldots$$

Folge (F_n)

$$F_0 = 0,\ F_1 = 1,\ F_2 = 1, \ldots\ldots,\ F_9 = 34,\ \ldots\ldots$$

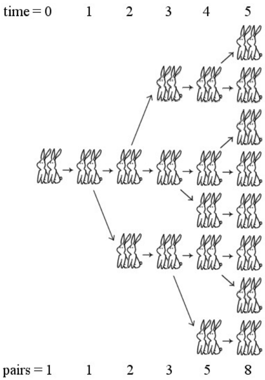
Rekursion:

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}, \quad F_0 = 0,\ F_1 = 1.$$

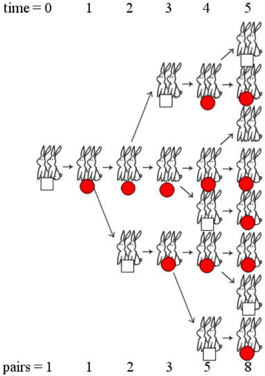
Formel von J. P. M. BINET (1786-1856)

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5}\right)^n - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{5}\right)^n\right), n = 0, 1, 2, \ldots.$$

Kaninchenvermehrung A I



Kaninchenvermehrung A II



Kaninchenvermehrung A III

$$J_n = A_{n-1}, \quad A_n = A_{n-1} + J_{n-1}$$

$$A_n = A_{n-1} + A_{n-2}.$$

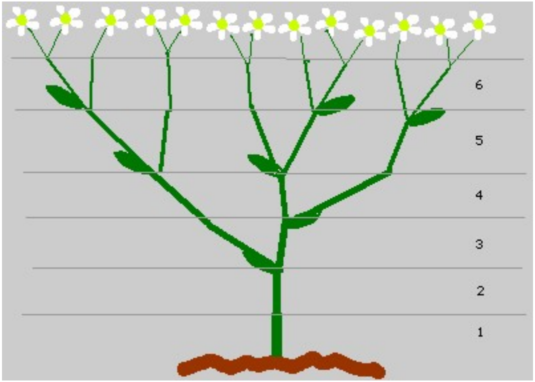
Kaninchenfolge

0
1
1, 0
1, 0, 1
1, 0, 1, 1, 0
1, 0, 1, 1, 0, 1, 0, 1
1, 0, 1, 1, 0, 1, 0, 1, 1, 0, 1, 1, 0

Kaninchenfolge

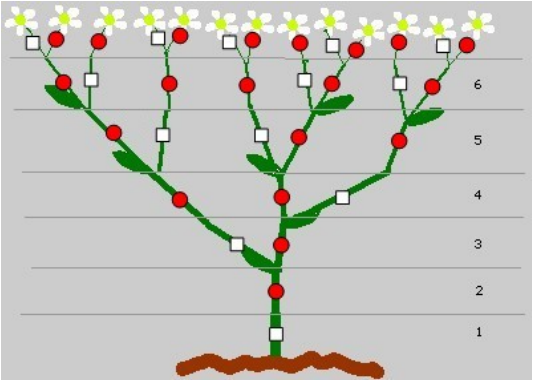
0
1
1, 0
1, 0, 1
1, 0, 1, 1, 0
1, 0, 1, 1, 0, 1, 0, 1
1, 0, 1, 1, 0, 1, 0, 1, 1, 0, 1, 1, 0

Pflanzenwachstum A

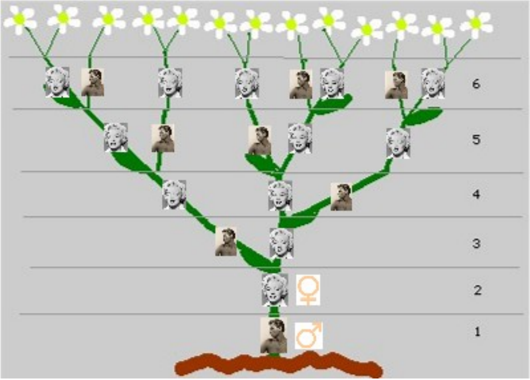


Achillea ptarmica — Sumpf-Schafgarbe

Pflanzenwachstum B



X-Chromosom-Vererbung

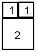


F-Rechtecke I

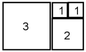
$\boxed{1}$

F-Rechtecke II

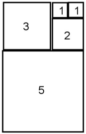
F-Rechtecke III



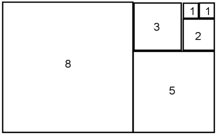
F-Rechtecke IV



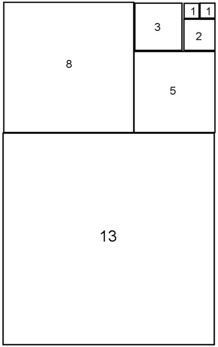
F-Rechtecke V



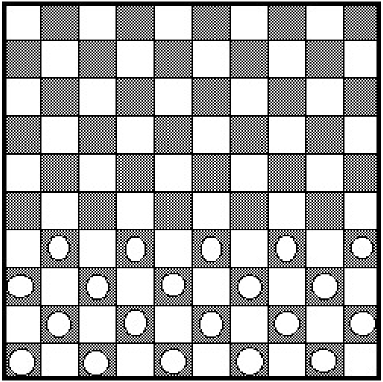
F-Rechtecke VI



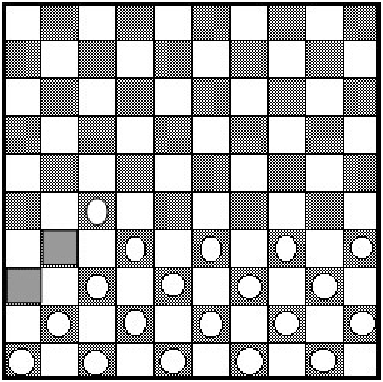
F-Rechtecke VII



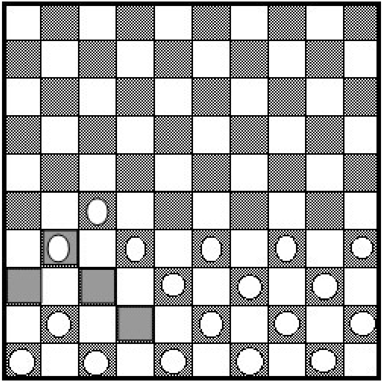
Dame–Halma I



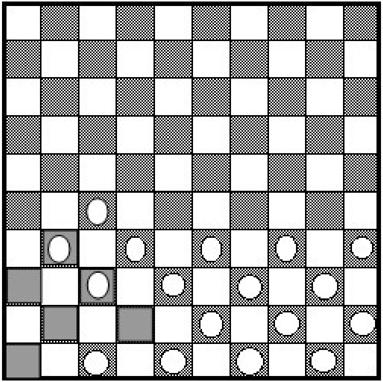
Dame–Halma II



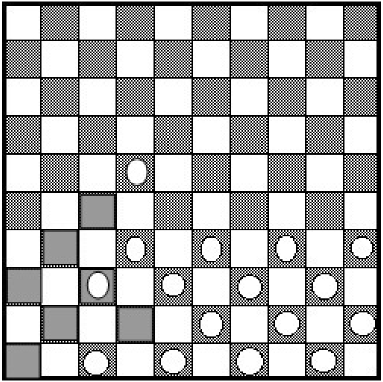
Dame–Halma III



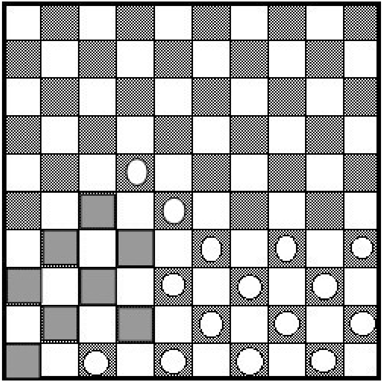
Dame–Halma IV



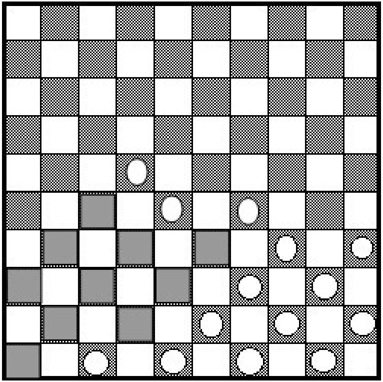
Dame–Halma V



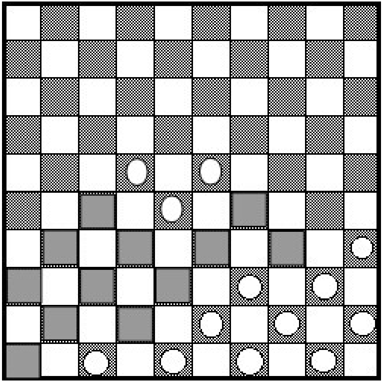
Dame–Halma VI



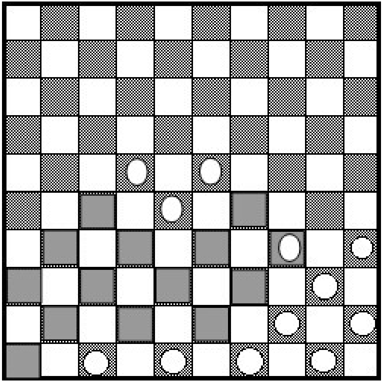
Dame–Halma VII



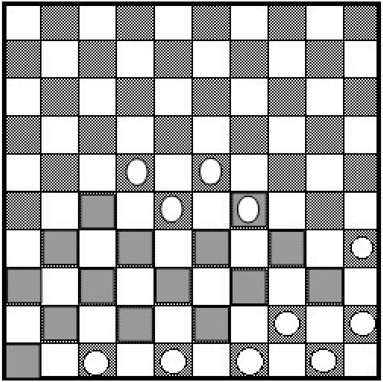
Dame–Halma VIII



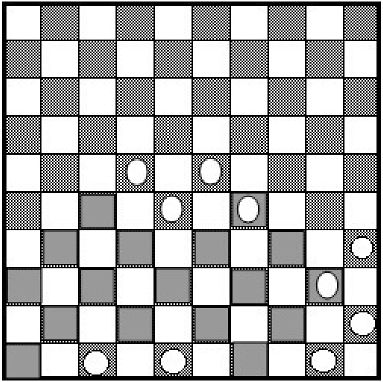
Dame–Halma IX



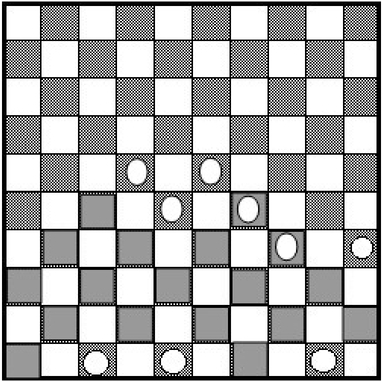
Dame–Halma X



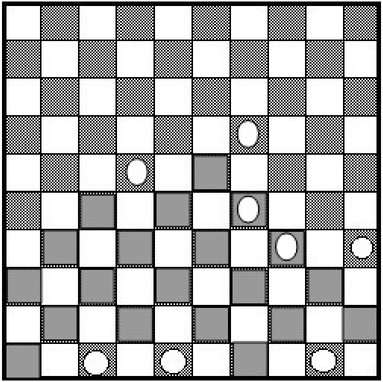
Dame–Halma XI



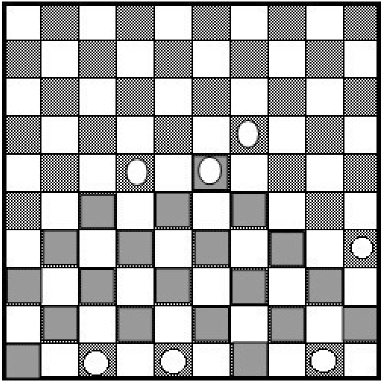
Dame–Halma XII



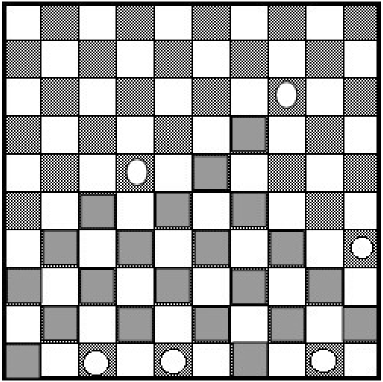
Dame–Halma XIII



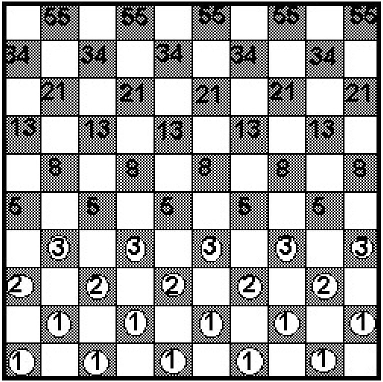
Dame–Halma XIV



Dame–Halma XV



Dame–Halma XVI



Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit p_n, bei n Münzwürfen niemals zweimal hintereinander **Zahl** zu werfen?

Zahl:=1, Wappen:=0. Es gibt 2^n 0-1-Folgen der Länge n

Wieviele Fibonacci-Sequenzen der Länge n (keine zwei Einsen hintereinander) gibt es?

Antwort: F_{n+2}, $p_n = \frac{F_{n+2}}{2^n}$

Münzwurf — Zufallsgeneratoren

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit p_n, bei n Münzwürfen niemals zweimal hintereinander **Zahl** zu werfen?

Zahl:=1, Wappen:=0. Es gibt 2^n 0-1-Folgen der Länge n

Wieviele Fibonacci-Sequenzen der Länge n (keine zwei Einsen hintereinander) gibt es?

Antwort: F_{n+2}, $p_n = \frac{F_{n+2}}{2^n}$

Münzwurf — Zufallsgeneratoren

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit p_n, bei n Münzwürfen niemals zweimal hintereinander **Zahl** zu werfen?

Zahl:=1, Wappen:=0. Es gibt 2^n 0-1-Folgen der Länge n

Wieviele Fibonacci-Sequenzen der Länge n (keine zwei Einsen hintereinander) gibt es?

Antwort: $F_{n+2}, \quad p_n = \frac{F_{n+2}}{2^n}$

Phyllotaxis I

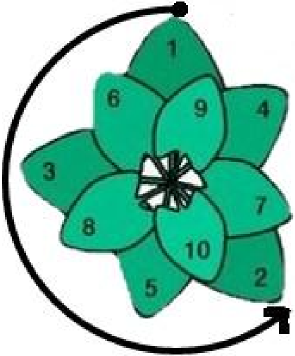
Phyllotaxis, der Lehre von der **Blattstellung** bzw. allgemeiner von der **Musterbildung** bei Pflanzen.

Leonardo da Vinci (1452-1519) entdeckte Spiralmuster

Charles Bonnet (1720-1793): Parastichen (Spiralarme)

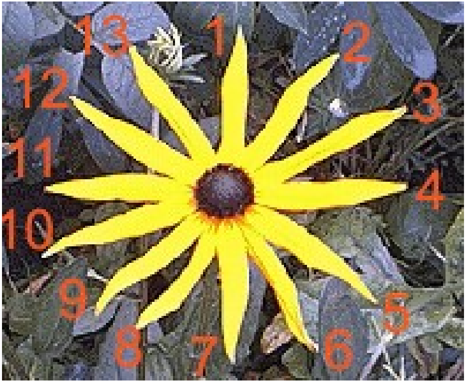
Schimper (1830): Divergenzwinkel

Phyllotaxis II



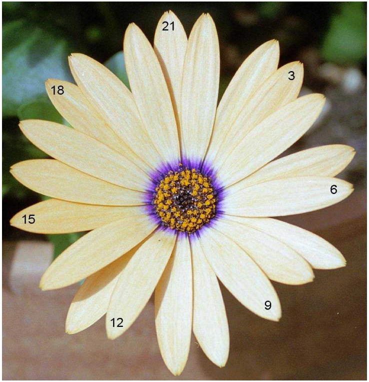
Blütenblätter I

Blütenblätter II



Blütenblätter III

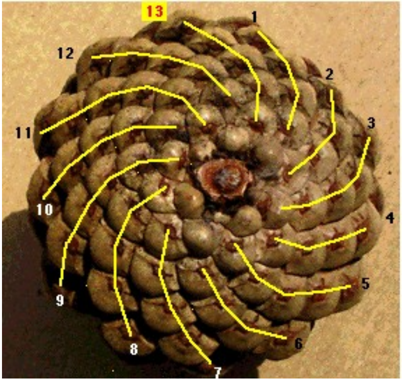
Blütenblätter IV



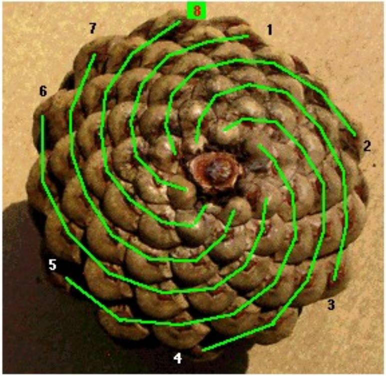
Blütenblätter VI

Kiefernzapfen I

Kiefernzapfen II

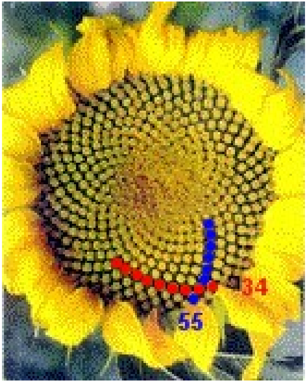


Kiefernzapfen III



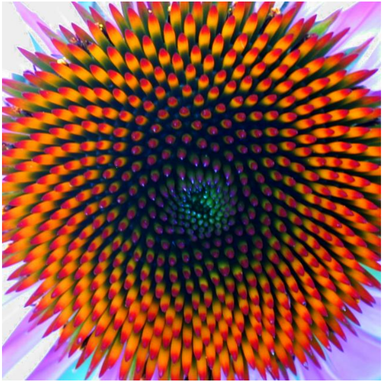
Spiralmuster (Parastichen) I

Spiralmuster (Parastichen) II

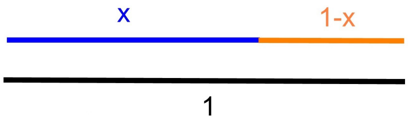


55 links- und 34 rechtsdrehende Spiralen

Spiralmuster (Parastichen) III



Goldener Schnitt: Definition



$$1 : x = x : (1-x)$$

$$x = (1-x) : x$$

Goldener Schnitt – Fortsetzung

Kleine Goldene Schnittzahl

$$\varphi = \frac{1}{2}\left(\sqrt{5} - 1\right) = 0.6180339887....$$

Große Goldene Schnittzahl

$$\Phi = \frac{1}{2}\left(\sqrt{5} + 1\right) = 1 + \varphi = 1.6180339887....$$

Fibonaccizahlen — Goldener Schnitt (Forts.)

Theorem

Die Quotienten zweier aufeinanderfolgender Fibonaccizahlen konvergieren gegen die kleine Goldene Schnittzahl.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{F_{n-1}}{F_n} = \varphi.$$

Theorie der Kettenbrüche!!

Fibonaccizahlen — Goldener Schnitt (Forts.)

Theorem

Die Quotienten zweier aufeinanderfolgender Fibonaccizahlen konvergieren gegen die kleine Goldene Schnittzahl.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{F_{n-1}}{F_n} = \varphi.$$

Theorie der Kettenbrüche!!

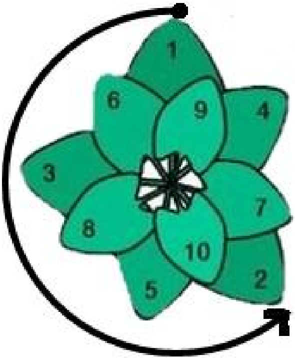
Theorem

Die Quotienten zweier aufeinanderfolgender Fibonaccizahlen konvergieren gegen die kleine Goldene Schnittzahl.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{F_{n-1}}{F_n} = \varphi.$$

Theorie der Kettenbrüche!!

Divergenz



Drehwinkel ω (Gradmaß, Bogenmaß)

- $\omega = 1$ entspricht 360 Grad oder 2π
- $\omega = \frac{1}{2}$ entspricht 180 Grad oder π
- $\omega = \frac{3}{4}$ entspricht 270 Grad oder $\frac{3}{2}\pi$
- Der **goldene Winkel** $\omega = \varphi$ entspricht 222,5 Grad = $\varphi \cdot 360$ Grad

  Der Komplementwinkel: 137,5 Grad

Drehwinkel

Drehwinkel ω (Gradmaß, Bogenmaß)

- $\omega = 1$ entspricht 360 Grad oder 2π
- $\omega = \frac{1}{2}$ entspricht 180 Grad oder π
- $\omega = \frac{3}{4}$ entspricht 270 Grad oder $\frac{3}{2}\pi$
- Der **goldene Winkel** $\omega = \varphi$ entspricht 222,5 Grad $= \varphi \cdot 360$ Grad

  Der Komplementwinkel: 137,5 Grad

Drehwinkel

Drehwinkel ω (Gradmaß, Bogenmaß)

- $\omega = 1$ entspricht 360 Grad oder 2π
- $\omega = \frac{1}{2}$ entspricht 180 Grad oder π
- $\omega = \frac{3}{4}$ entspricht 270 Grad oder $\frac{3}{2}\pi$
- Der **goldene Winkel** $\omega = \varphi$ entspricht 222,5 Grad = $\varphi \cdot 360$ Grad

  Der Komplementwinkel: 137,5 Grad

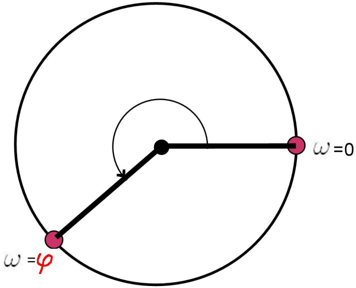
Drehwinkel

Drehwinkel ω (Gradmaß, Bogenmaß)

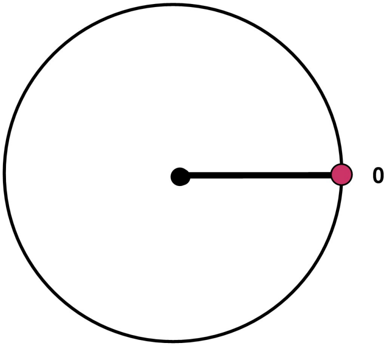
- $\omega = 1$ entspricht 360 Grad oder 2π
- $\omega = \frac{1}{2}$ entspricht 180 Grad oder π
- $\omega = \frac{3}{4}$ entspricht 270 Grad oder $\frac{3}{2}\pi$
- Der **goldene Winkel** $\omega = \varphi$ entspricht 222,5 Grad = $\varphi \cdot 360$ Grad

  Der Komplementwinkel: 137,5 Grad

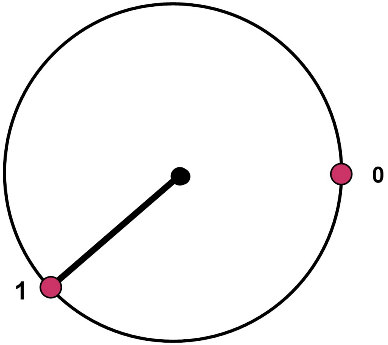
Goldene Drehung



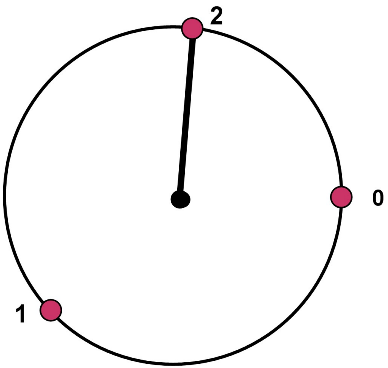
Orbit der goldenen Drehung — Saatmaschine I



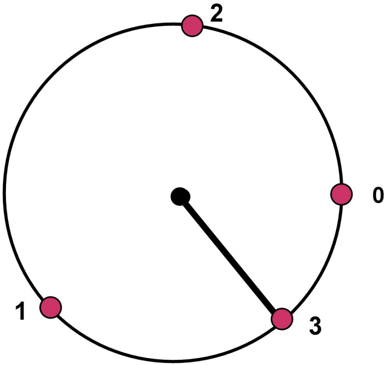
Orbit der goldenen Drehung — Saatmaschine II



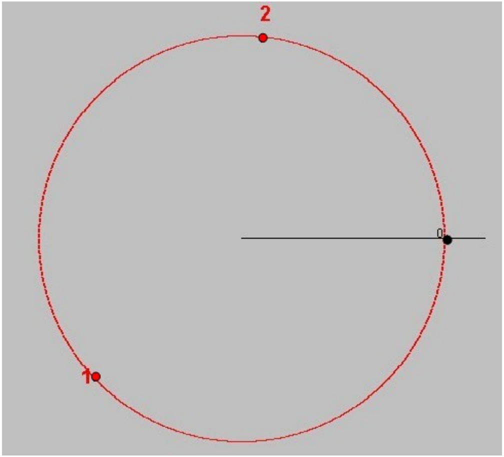
Orbit der goldenen Drehung — Saatmaschine III



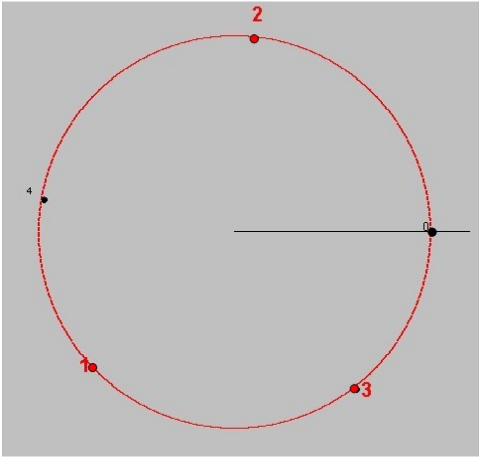
Orbit der goldenen Drehung — Saatmaschine IV



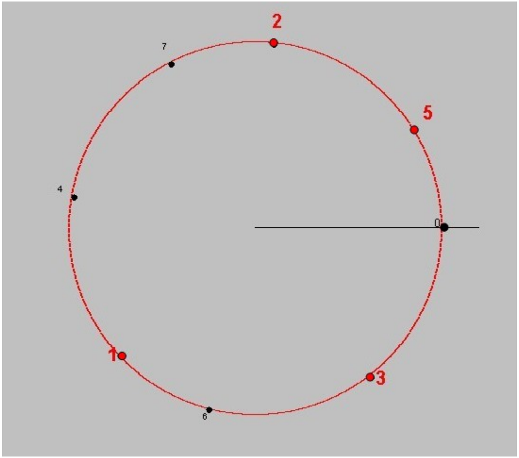
Orbit der goldenen Drehung I



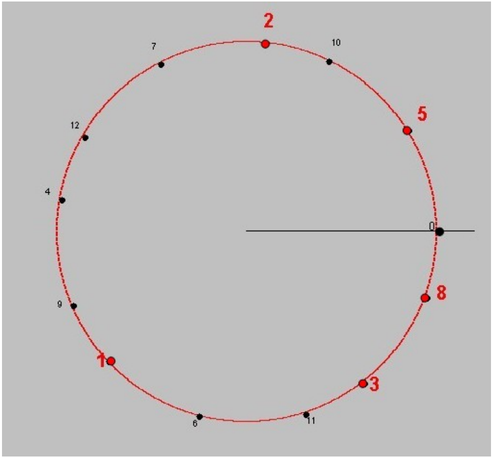
Orbit der goldenen Drehung II



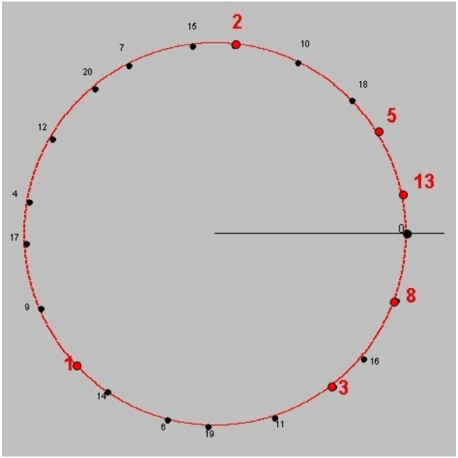
Orbit der goldenen Drehung III



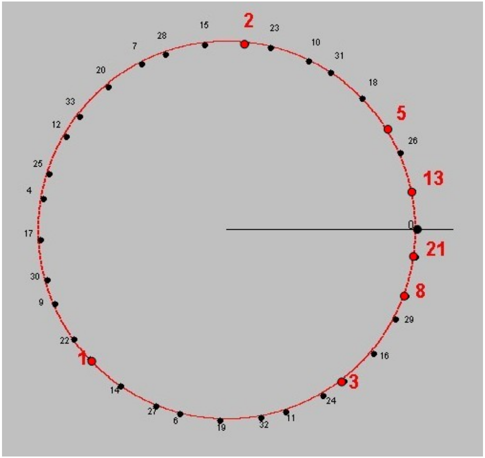
Orbit der goldenen Drehung IV



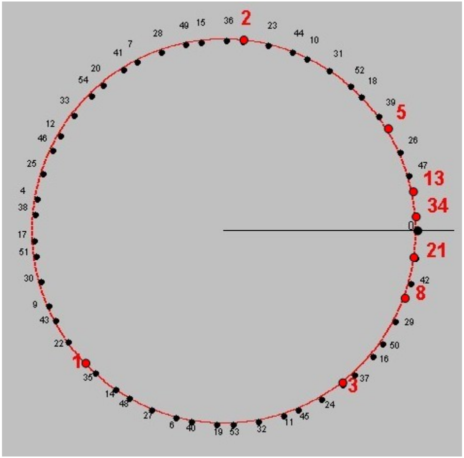
Orbit der goldenen Drehung V



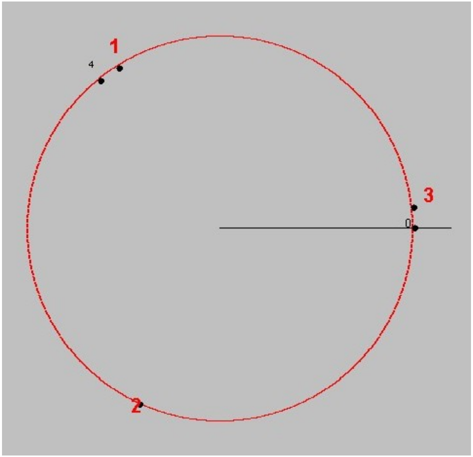
Orbit der goldenen Drehung VI



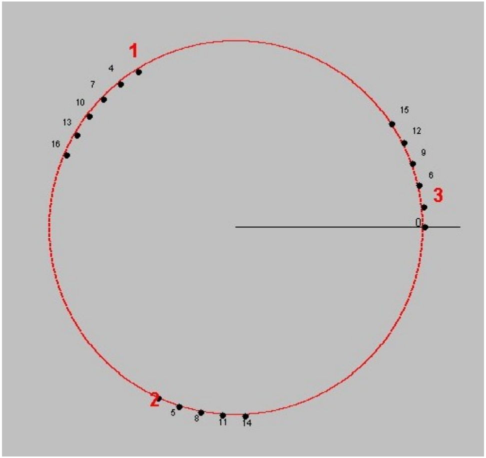
Orbit der goldenen Drehung VII



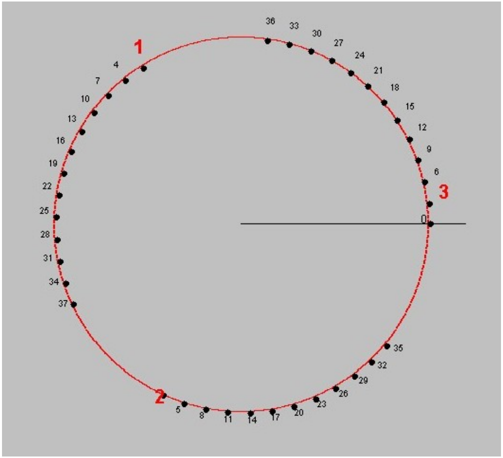
Orbit einer Drehung um 122,29 Grad I



Orbit einer Drehung um 122,29 Grad II



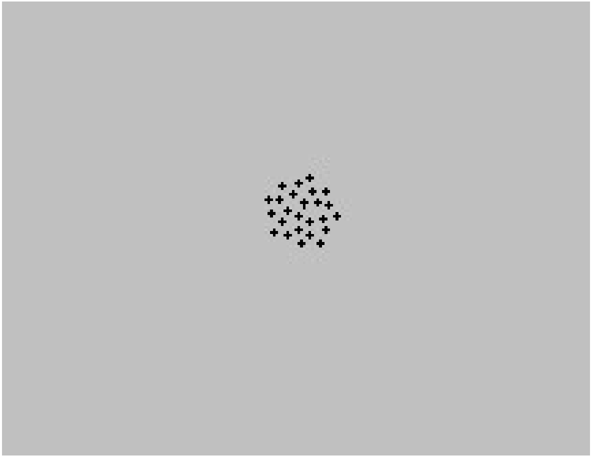
Orbit einer Drehung um 122,29 Grad III



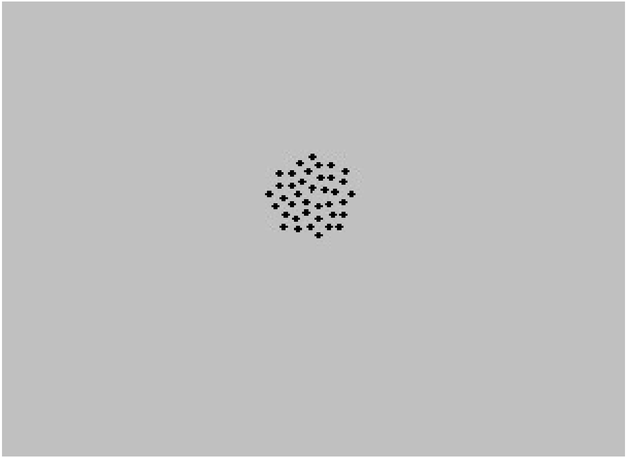
Zusammenfassung

Die goldene Drehung führt zu einer optimalen **Packung.**

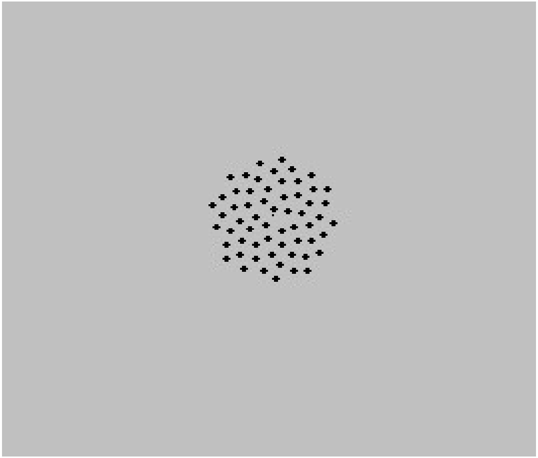
Goldene Drehung - Radiales Wachstum (400 Samen) I



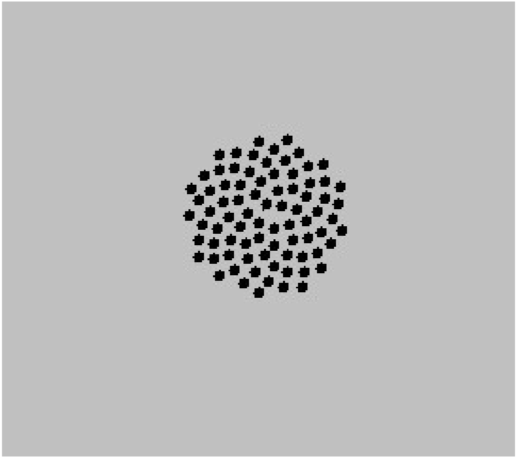
Goldene Drehung - Radiales Wachstum (400 Samen) II



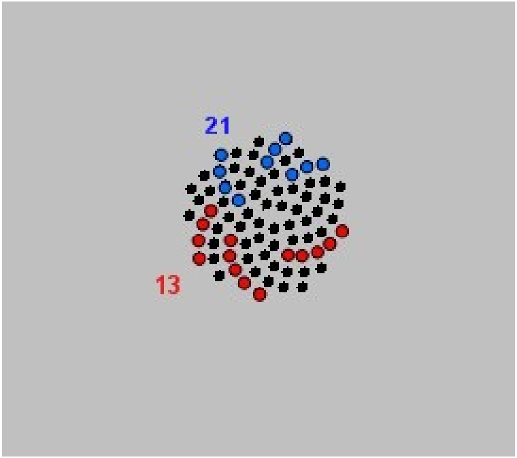
Goldene Drehung - Radiales Wachstum (400 Samen) III



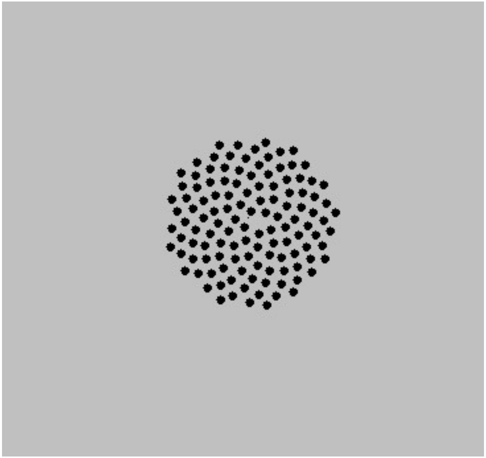
Goldene Drehung - Radiales Wachstum (400 Samen) IV



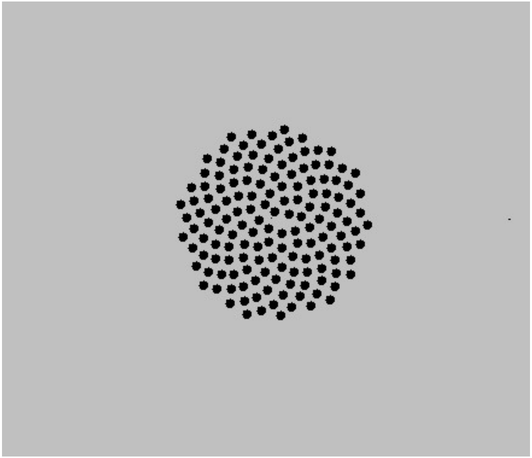
Goldene Drehung - Radiales Wachstum (400 Samen) V



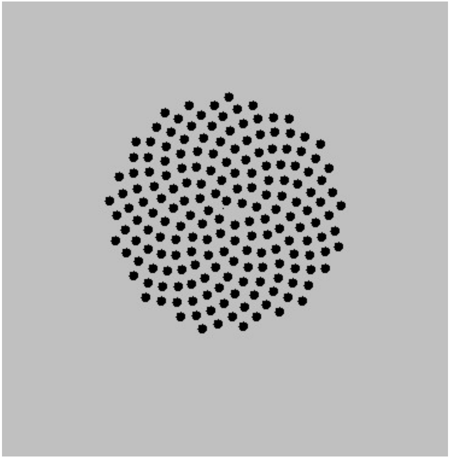
Goldene Drehung - Radiales Wachstum (400 Samen) VI



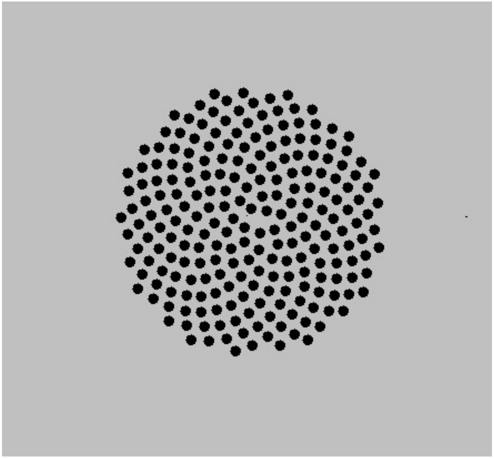
Goldene Drehung - Radiales Wachstum (400 Samen) VII



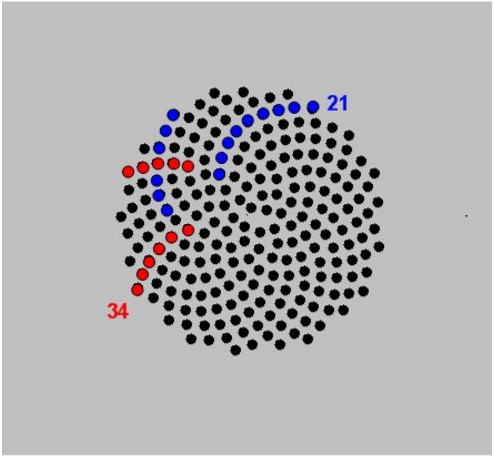
Goldene Drehung - Radiales Wachstum (400 Samen) VIII



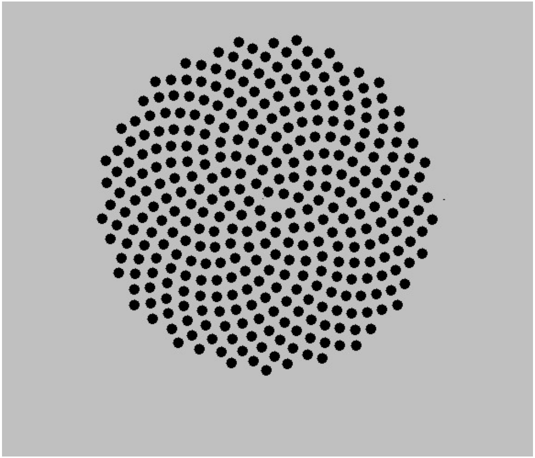
Goldene Drehung - Radiales Wachstum (400 Samen) IX



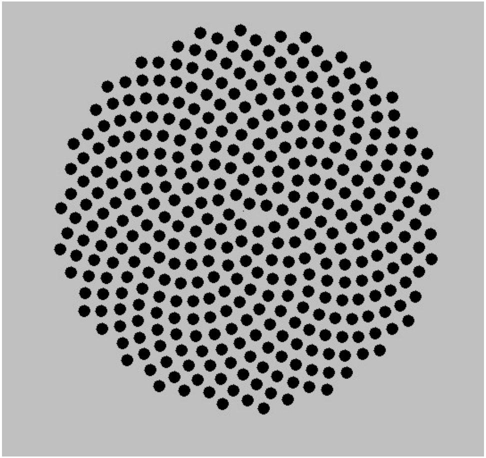
Goldene Drehung - Radiales Wachstum (400 Samen) X



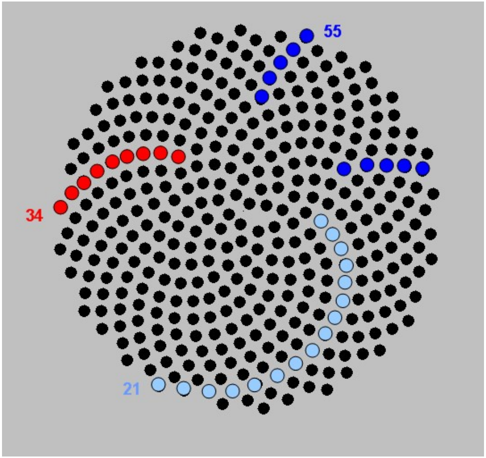
Goldene Drehung - Radiales Wachstum (400 Samen) XI



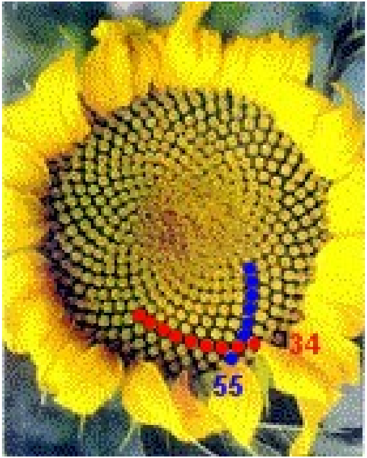
Goldene Drehung - Radiales Wachstum (400 Samen) XII



Goldene Drehung - Radiales Wachstum (400 Samen) XIII



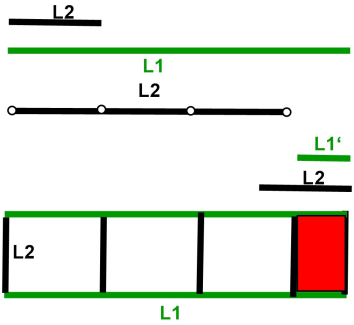
Goldene Drehung - Radiales Wachstum (400 Samen) XIV



Schlussbemerkung

Das beschriebene mathematische Modell erklärt die auftretenden Spiralmuster. Aber es muss keineswegs „richtig" sein.

Hippasos - Euklid - Irrationalität von Φ I



$\frac{L1}{L2}$ rational?

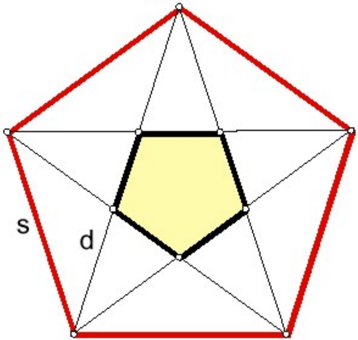
Kommensurabel?

$\frac{L2}{L1'}$ rational?

Euklid: Methode der wechselseitigen Wegnahme
Wenn man unter zwei ungleichen Größen abwechselnd immer die kleinere von der größeren wegnimmt, und der Rest niemals genau die vorhergehende Größe misst, dann müssen die Größen inkommensurabel sein.

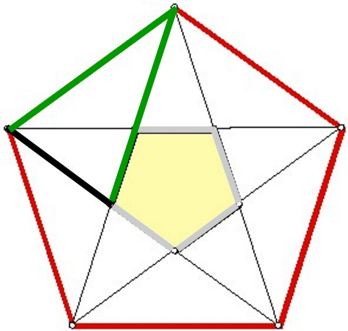
Hippasos - Euklid - Irrationalität von Φ II

$$\tau = \frac{1}{2} \cdot (\sqrt{5} + 1)$$

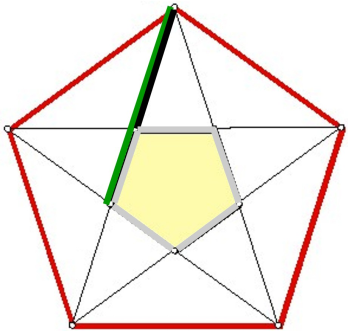


$$d : s = \tau$$

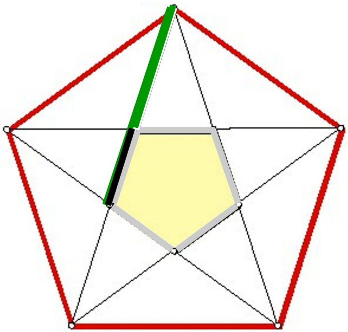
Hippasos - Euklid - Irrationalität von Φ III



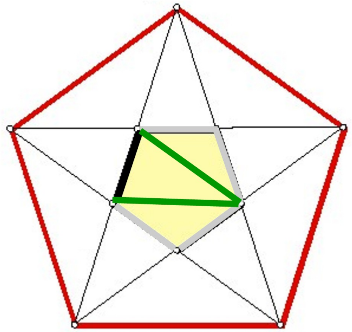
Hippasos - Euklid - Irrationalität von Φ IV



Hippasos - Euklid - Irrationalität von Φ V



Hippasos - Euklid - Irrationalität von Φ VI



Hippasos - Euklid - Irrationalität von Φ VII