Mitt. Math. Ges. Hamburg **23/1** (2004), 63–80

Mathematisierung der anschaulichen Geometrie

Von Eberhard M. Schröder

Die „Elemente" des Euklid, die vor etwa 2300 Jahren verfaßt wurden, zeigen in meisterlicher Weise, wie sich unsere Vorstellungen von Ebene und Raum in Verbindung mit mathematischem Denken ordnen und ausbauen lassen.

Über lange Zeit galt das Werk des Euklid als Musterbeispiel für exaktes mathematisches Schließen. Aber 1832 wies C. F. Gauss auf logische Lücken im Aufbau hin, betreffend Anordnungseigenschaften der Geometrie.

Vor dem Hintergrund einer logischen Analyse der Fundamente der Mathematik in der zweiten Hälfte des 19. Jahrhunderts durch eine Reihe von Mathematikern veröffentlichte David Hilbert 1899 sein Werk „Grundlagen der Geometrie", durch welches die anschauliche Geometrie nun als mathematische Struktur im heutigen Sinne verstanden werden darf.

Hilbert charakterisiert die drei Strukturkomponenten Inzidenz, Anordnung und Metrik in dieser Reihenfolge, und erst durch weitere Untersuchungen wie etwa 1907 durch J. Hjelmslev und 1934 durch E. Podehl und K. Reidemeister wurde deutlich, daß man metrische Geometrie losgelöst von Anordnung betrachten kann und daß sich auf diese Weise Möglichkeiten zur Vereinfachung des Hilbertschen Axiomensystems ergeben.

Marksteine für die in [7] vorgelegte Kennzeichnung des Anschauungsraumes sind die 1944 und 1980 erschienenen Arbeiten [1] von R. Baer und [2] von W. Benz. Der Nachweis, daß die anschauliche Geometrie sich aus nur sieben Axiomen vollständig aufbauen läßt, erfolgt in [8] durch Rückgriff auf die Theorie der euklidischen Ebenen und in [7] durch Verwendung von Resultaten aus der Spezialliteratur.

Im folgenden soll nun ein direkter Beweis vorgelegt werden, der sich allein auf Grundkenntnisse in Mengenlehre und Algebra stützt.

1 Eine axiomatische Kennzeichnung der anschaulichen Geometrie

Wir definieren den Anschauungsraum, der ursprünglich ein Objekt unseres physikalischen Denkens ist, als eine mathematische Struktur, bestehend aus einer wenigstens zweielementigen Punktmenge $\mathcal{P}$ und einer Relation $\equiv$, die für je zwei zweielementige Teilmengen von $\mathcal{P}$ Kongruenz im Sinne einer Äquivalenzrelation bestätigen oder negieren soll und die gewisse Grundeigenschaften besitzt, welche nachfolgend als Axiome fomuliert sind.

Wir betrachten also eine Menge $\mathcal{P}$ mit $|\mathcal{P}| \geq 2$, auch Menge der **Punkte** genannt (hier bezeichnet $|X|$ die *Mächtigkeit* der Menge X), und denken uns auf dem System $\mathcal{P}_2 := \{\, \{A, B\} \mid A, B \in \mathcal{P} \wedge A \neq B \,\}$ aller zweielementigen

Teilmengen von $\mathcal{P}$ eine abstrakte Äquivalenzrelation $\equiv$ gegeben, die im weiteren auch als **Kongruenzrelation** bezeichnet wird.

Mit dem Begriff „Äquivalenzrelation“ ist verbunden, daß $\equiv$ die Grundeigenschaften des Gleichheitszeichens besitzt, daß also für $\{A,B\},\{C,D\}$, $\{E,F\}$ aus $\mathcal{P}_2$ gilt:

(Rf) *Reflexivität.* Es ist $\{A,B\}\equiv\{A,B\}$.
(Sy) *Symmetrie.* Aus $\{A,B\}\equiv\{C,D\}$ folgt $\{C,D\}\equiv\{A,B\}$.
(Tr) *Transitivität.* Aus $\{A,B\}\equiv\{C,D\}$ und $\{C,D\}\equiv\{E,F\}$ folgt $\{A,B\}\equiv\{E,F\}$.

Die Axiome, die für das Paar $(\mathcal{P},\equiv)$ angegeben werden sollen, lassen sich im Prinzip allein unter Verwendung von $\mathcal{P}$ und $\equiv$ formulieren. Um aber von vornherein die Verbindung zu unseren mathematisch-physikalischen Vorstellungen sichtbar werden zu lassen, schicken wir (wie Euklid und Hilbert) mehrere Definitionen voraus, die eine anschaulich einleuchtende Formulierung der Axiome ermöglichen:

(D1) Ist $\{M,A\}\in\mathcal{P}_2$, so wird die Menge

$$s_M(A) := \{X\in\mathcal{P}\,|\,\{M,X\}\equiv\{M,A\}\}$$

die **Sphäre um** M **durch** A mit M als **Mittelpunkt** genannt. Es sei $\mathfrak{S}$ die Menge aller so definierten Sphären.

(D2) Ist $\{A,B\}\in\mathcal{P}_2$, so wird die Menge

$$m_{A,B} := \{X\in\mathcal{P}\,|\,\{A,X\}\equiv\{X,B\}\}$$

als **Symmetrieebene** oder **Mittelsenkrechte von** A,B oder auch einfach als **Ebene** bezeichnet. Es sei $\mathcal{E}$ die Menge aller so definierten Ebenen.

(D3) Sind $\delta,\varepsilon\in\mathcal{E}$ mit $\delta\neq\varepsilon\wedge\delta\cap\varepsilon\neq\emptyset$, so wird $\delta\cap\varepsilon$ eine **Gerade** genannt. Die Menge aller derart definierten Geraden sei $\mathcal{G}$.

Punkte $A,B,C,\ldots\in\mathcal{P}$ heißen genau dann **komplanar**, wenn es ein $\varepsilon\in\mathcal{E}$ mit $\varepsilon\ni A,B,C,\ldots$ gibt, und genau dann **kollinear**, wenn es ein $g\in\mathcal{G}$ mit $g\ni A,B,C,\ldots$ gibt.

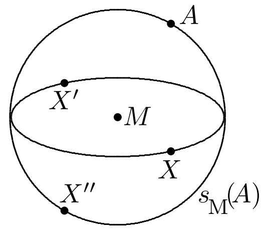
(D4) Zwei Geraden $g,h\in\mathcal{G}$ werden genau dann als **parallel** bezeichnet, in Zeichen: $g\parallel h$, wenn sie gemeinsam in einer Ebene liegen und keinen Punkt gemeinsam haben, oder wenn sie gleich sind. Die Negation von $g\parallel h$ notieren wir als $g\nparallel h$.

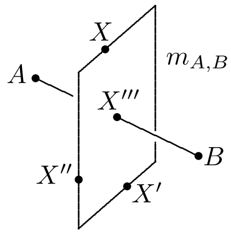
Sind A,B,C,D nichtkollineare Punkte und gibt es Geraden $g,h,k,l\in\mathcal{G}$ mit $A\in g\cap h\ \wedge\ B\in h\cap k\ \wedge\ C\in k\cap l\ \wedge\ D\in l\cap g\ \wedge\ g\parallel k\ \wedge\ h\parallel l$, so heißt (A,B,C,D) ein **Parallelogramm**, in Zeichen: $\#(A,B,C,D)$.

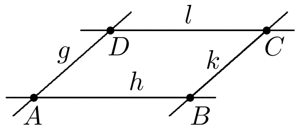
(D5) Ist g eine Gerade und ist s eine Sphäre, so wird g genau dann eine **Tangente von** s genannt, wenn $|g\cap s|=1$ ist.

Ist s eine Sphäre und ist X ein Punkt, so heißt X genau dann ein **innerer Punkt von** s, wenn X keiner Tangente von s angehört.

Ist s eine Sphäre, so wird die Vereinigung von s mit der Menge aller innerer Punkte von s als **Kugel** $\overline{s}$ bezeichnet.







$\#(A,B,C,D)$

Eine Menge $\mathfrak{M}$ von Kugeln heißt **konzentrisch**, wenn es ein $M \in \mathcal{P}$ und eine nichtleere Teilmenge $\mathfrak{A}$ von $\mathcal{P} \setminus \{M\}$ gibt mit $\mathfrak{M} = \{\, \overline{s_M(A)} \mid A \in \mathfrak{A}\}$.

Unter Verwendung der eingeführten Bezeichnungen charakterisieren wir die anschauliche Geometrie nun wie folgt als mathematische Struktur:

Der **Anschauungsraum** ist ein Paar $(\mathcal{P}, \equiv)$, bestehend aus einer wenigstens zweielementigen Menge $\mathcal{P}$ und einer auf $\mathcal{P}_2$ erklärten Äquivalenzrelation $\equiv$, so daß die folgenden sieben Axiome erfüllt sind:

(R) Reichhaltigkeitsaxiom. Jede Ebene enthält nichtkollineare Punkte.

(V) Verbindungsaxiom. Je drei Punkte sind komplanar.

(G) Geradenaxiom. Wenn eine Gerade mit einer Ebene mehr als einen Punkt gemeinsam hat, dann ist die Gerade eine Teilmenge dieser Ebene.

(P) Parallelenaxiom. Zu jeder Geraden gibt es durch jeden Punkt genau eine parallele Gerade.

(K) Kongruenzaxiom. Ist (A,B,C,D) *ein Parallelogramm, so ist* $\{A,B\} \equiv \{C,D\}$.

(A) Anordnungsaxiom. Jede Gerade durch einen inneren Punkt einer Sphäre trifft diese Sphäre.

(S) Vollstõndigkeitsaxiom. Der Durchschnitt einer Menge konzentrischer Kugeln ist stets eine Kugel oder einelementig.

Aus der hier gegebenen Definition des Anschauungsraumes werden wir durch mathematisch strenge Deduktion eine Reihe seiner Eigenschaften entwickeln. Dazu gehört insbesondere die kartesische Darstellung mit Hilfe reeller Zahlen, d.h. wir werden sehen, wie die Zahlen in die Geometrie kommen und warum der Satz des Pythagoras gültig ist.

2 Kongruenzräume und klassische Räume

Ebenso, wie es bis auf Isomorphie – d.h. bis auf die Möglichkeit der Existenz isomorpher Modelle – nur *ein* System der reellen Zahlen gibt, existiert bis auf Isomorphie auch nur *ein* Modell des Anschauungsraumes.

Entscheidend für diese Eindeutigkeit ist das Axiom (S), das dem Prinzip der unteren Grenze im Bereich der positiven reellen Zahlen entspricht.

Dieses Axiom wird erst dann benötigt, wenn die Grenzwerttheorie der Analysis verwendet werden soll. Um zu berücksichtigen, daß sich weite Bereiche der euklidischen Geometrie ohne Hilfsmittel der Analysis und frei von Anordnungsbeziehungen entwickeln lassen, legen wir fest:

2.1 Ein Paar $(\mathcal{P}, \equiv)$, bestehend aus einer Menge $\mathcal{P}$ mit $|\mathcal{P}| \geq 2$ und einer auf $\mathcal{P}_2$ erklärten Äquivalenzrelation $\equiv$ heißt **Kongruenzraum**, wenn die fünf Axiome (R), (V), (G), (P), (K) erfüllt sind, und **klassischer Raum**, wenn zusätzlich auch das Axiom (A) gültig ist.
Der Anschauungsraum ist bei den nachfolgenden Erörterungen über Kongruenzräume und klassische Räume als Hauptbeispiel stets mit einbezogen.

Um solche Räume miteinander vergleichen zu können, vereinbaren wir:

2.2 Zwei Kongruenzräume $(\mathcal{P}, \equiv), (\mathcal{P}', \equiv')$ heißen **isomorph**, wenn eine Bijektion φ von $\mathcal{P}$ auf $\mathcal{P}'$ existiert mit
$\{A, B\} \equiv \{C, D\} \Leftrightarrow \{\varphi(A), \varphi(B)\} \equiv' \{\varphi(C), \varphi(D)\} \quad \forall\ \{A, B\}, \{C, D\} \in \mathcal{P}_2.$

3 Geraden und Ebenen

Im folgenden sei $(\mathcal{P}, \equiv)$ ein Kongruenzraum.

Abkürzend schreiben wir im weiteren AB statt $\{A, B\}$ für $A, B \in \mathcal{P}$, solange damit keine Unklarheiten verbunden sind.

Allein unter Verwendung der Axiome (R), (V), (G) erhalten wir zunächst

3.1 Satz. *Es gelten die folgenden Aussagen:*

(1) Ist $AB \in \mathcal{P}_2$, so sind $A, B \notin m_{A,B}$, und es ist $A \notin s_A(B)$.

(2) Ist $AB \in \mathcal{P}_2$, so existiert genau ein $g \in \mathcal{G}$ mit $g \ni A, B$. Wir bezeichnen g mit $\langle A, B\rangle$ und nennen $\langle A, B\rangle$ die **Verbindungsgerade** *von A, B.*

(3) Je zwei Punkte sind kollinear.

(4) Sind A, B, C nichtkollineare Punkte, so gibt es genau ein $\varepsilon \in \mathcal{E}$ mit $\varepsilon \ni A, B, C$, und es ist $|\{A, B, C\}| = 3$. Wir bezeichnen ε mit $\langle A, B, C\rangle$ und nennen $\langle A, B, C\rangle$ die **Verbindungsebene** *von A, B, C.*

(5) Es gibt vier nichtkomplanare Punkte.

Beweis. (1) Es ist $AA \not\equiv AB$ und $AB \not\equiv BB$, da $\equiv$ nur zwischen zweielementigen Mengen erklärt ist.

(2) Es sei $AB \in \mathcal{P}_2$. Nach (V) gibt es ein $\delta \in \mathcal{E}$ mit $\delta \ni A, A, B$, und wegen (1) existiert ein $C \in \mathcal{P} \setminus \delta$. Nach (V) gibt es dann ein $\varepsilon \in \mathcal{E}$ mit $\varepsilon \ni A, B, C$, und wegen $C \notin \delta \wedge C \in \varepsilon$ ist $\delta \neq \varepsilon$, also $g := \delta \cap \varepsilon \in \mathcal{G}$ mit $A, B \in g$. Ist nun $h \in \mathcal{G}$ mit $h \ni A, B$, so führt (G) auf $h \subseteq \delta \wedge h \subseteq \varepsilon$, also auf $h \subseteq g$. Da sich h in der Form $\xi \cap \eta$ mit $\xi, \eta \in \mathcal{E} \wedge \xi \neq \eta$ darstellen läßt, erhalten wir wegen $A, B \in \xi \cap \eta$ mit (G) die Beziehung $h = \xi \cap \eta \supseteq g$, also $h = g$.

(3) folgt wegen $|\mathcal{P}| \geq 2$ aus (2) (auch, falls die Punkte identisch sind).

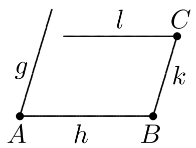
(4) Sind A, B, C nichtkollinear, so führt (3) auf $|\{A, B, C\}| = 3$. Wegen (V)

existiert ein $\delta \in \mathcal{E}$ mit $\delta \ni A, B, C$. Gäbe es ein $\varepsilon \in \mathcal{E}$ mit $\varepsilon \neq \delta \wedge \varepsilon \ni A, B, C$, so wäre $\delta \cap \varepsilon$ eine A, B, C enthaltende Gerade.

(5) Wegen $|\mathcal{P}| \geq 2$ gibt es $AB \in \mathcal{P}_2$, und wegen (R) und (4) enthält die Ebene $\varepsilon := m_{A,B}$ drei nichtkollineare Punkte U, V, W. Da ε nach (4) die einzige Ebene ist, die U, V, W umfaßt, und da (1) auf $A \notin \varepsilon$ führt, sind A, U, V, W nichtkomplanar. $\diamond$

Unter zusätzlicher Verwendung des Axioms (P) zeigen wir nun

3.2 Parallelogrammsatz. *Sind A, B, C nichtkollineare Punkte, so gibt es genau ein $D \in \mathcal{P}$ mit $\#(A, B, C, D)$. Die Punkte A, B, C, D sind komplanar und zu je dreien nichtkollinear. Jede Ebene enthält ein Parallelogramm.*



Beweis. Gemäß (P) gibt es $g, l \in \mathcal{G}$ mit $g \parallel k := \langle B, C \rangle \wedge g \ni A \wedge l \parallel h := \langle A, B \rangle \wedge l \ni C$. Da $\varepsilon := \langle A, B, C \rangle$ nach 3.1 die einzige A, B, C enthaltende Ebene ist, ist $g \cup l \subseteq \varepsilon$. Überdies ist $g \cap k = \varnothing$ und $h \cap l = \varnothing$, da A, B, C (wegen der Definition der Parallelität) sonst kollinear wären.

Es folgt $g \cap l \neq \varnothing$, denn sonst wären g und h zwei verschiedene Parallelen durch A zu l entgegen (P). Wegen 3.1(2) und $A \notin l$ ist $|g \cap l| = 1$, und mithin gibt es genau ein $D \in \mathcal{P}$ mit $\{D\} = g \cap l$. Es gilt dann $\#(A, B, C, D)$, und aus der Konstruktion ergeben sich in Verbindung mit (R) und (P) die verbleibenden Behauptungen. $\diamond$

3.3 Satz. *Jede Gerade enthält wenigstens zwei Punkte. Sind $\delta, \varepsilon \in \mathcal{E}$ mit $\delta \neq \varepsilon \wedge \delta \cap \varepsilon \neq \varnothing$, so ist $|\delta \cap \varepsilon| \geq 2$.*

Beweis. Es sei $m \in \mathcal{G}$. Definitionsgemäß ist $m \neq \varnothing$. Angenommen, es ist $m = \{A\}$ mit $A \in \mathcal{P}$. Nach 3.1(5) gibt es $B, C \in \mathcal{P}$ so, daß A, B, C nichtkollinear sind, und nach 3.2 gibt es ein $D \in \mathcal{P}$ mit $\#(A, B, C, D)$. Dann wären m und $\langle A, D \rangle$ aber zwei verschiedene Parallelen durch A zu $\langle B, C \rangle$ entgegen (P). Deshalb gilt die erste Aussage des Satzes, und diese impliziert die zweite entsprechend der Definition der Geraden. $\diamond$

3.4 Satz. *Ist ε eine Ebene und ist $\mathcal{G}_\varepsilon := \{g \in \mathcal{G} \mid g \subseteq \varepsilon\}$, so gilt:*

(1) Sind $A, B \in \varepsilon$ mit $A \neq B$, so existiert genau ein $g \in \mathcal{G}_\varepsilon$ mit $g \ni A, B$. Es ist $g = \langle A, B \rangle$.

(2) Sind $A \in \varepsilon$ und $g \in \mathcal{G}_\varepsilon$ mit $A \notin g$, so gibt es genau ein $h \in \mathcal{G}_\varepsilon$ mit $h \ni A$ und $h \cap g = \varnothing$. Es ist $h \parallel g$.

(3) Sind $g, g', h, h' \in \mathcal{G}_\varepsilon$ mit $g \parallel g' \wedge h \parallel h' \wedge g \not\parallel h$, so ist $|g' \cap h'| = 1$.

Beweis. (1) folgt aus 3.1(2) und (G).

(2) Sind $B, C \in g$ mit $B \neq C$ (vgl. 3.3), so sind A, B, C wegen 3.1(2) nichtkollinear, und nach 3.1(4) ist $\varepsilon = \langle A, B, C \rangle$ die einzige Ebene, die A und g umfaßt.
Ist jetzt $h \in \mathcal{G}$ mit $h \ni A \wedge h \parallel g$ (vgl. (P)), so folgt $h \in \mathcal{G}_\varepsilon$ und wegen $A \notin g$ außerdem $h \cap g = \varnothing$.

Ist andererseits $k \in \mathcal{G}_\varepsilon$ mit $k \ni A \wedge k \cap g = \varnothing$, so führt (P) auf $k = h$.

(3) Wegen 3.1(2) gibt es ein $D \in \varepsilon$ mit $g \cap h = \{D\}$. Wäre $h \cap g' = \varnothing$, so wären g, h zwei Parallelen durch D zu g' entgegen (P). Demnach gibt es ein $R \in \varepsilon$ mit $h \cap g' = \{R\}$, denn wegen $g \parallel g' \wedge g \nparallel h$ ist $g' \neq h$. Wäre nun $g' \cap h' = \varnothing$, so wären h, g' zwei Parallelen durch R zu h'. Also ist $g' \cap h' \neq \varnothing$ mit $g' \neq h'$ wegen $h \parallel h' \wedge h \nparallel g'$. Nach 3.1(2) bedeutet dies $|g' \cap h'| = 1$. $\diamond$

3.5 Geraden $g, h, ...$ heißen **komplanar**, wenn sie gemeinsam einer Ebene angehören.

Sind g, h komplanare Geraden mit $g \neq h$ und ist $A \in \mathcal{P} \setminus g$, so gibt es wegen Axiom (G), 3.1 und 3.3 genau ein $\delta \in \mathcal{E}$ mit $\delta \supseteq g \cup h$ und genau ein $\varepsilon \in \mathcal{E}$ mit $\varepsilon \supseteq \{A\} \cup g$. Wir bezeichnen δ mit $\langle g, h \rangle$ und ε mit $\langle A, g \rangle$.

Ist $x \in \mathcal{G} \cup \mathcal{E}$ und ist $\varepsilon \in \mathcal{E}$, so werden x und ε **parallel** genannt, in Zeichen: $x \parallel \varepsilon$, wenn $x \subseteq \varepsilon \vee x \cap \varepsilon = \varnothing$ gilt. Die Negation von $x \parallel \varepsilon$ notieren wir als $x \nparallel \varepsilon$.

Zu $(A, g) \in \mathcal{P} \times \mathcal{G}$ gibt es wegen Axiom (P) genau ein $k \in \mathcal{G}$ mit $k \ni A \wedge k \parallel g$. Dieses k wird im weiteren mit $(A \parallel g)$ bezeichnet und die **Parallele durch** A **zu** g genannt. Es folgt

3.6 Satz. *Sind $g, h, k \in \mathcal{G}$ und $\alpha, \beta, \gamma \in \mathcal{E}$, so gilt:*

(1) $(\alpha \cap \beta) \cap (\beta \cap \gamma) = (\beta \cap \gamma) \cap (\gamma \cap \alpha) = (\gamma \cap \alpha) \cap (\alpha \cap \beta)$,

(2) $\alpha \nparallel \beta \Leftrightarrow \alpha \cap \beta \in \mathcal{G}$,

(3) $g \nparallel \alpha \Leftrightarrow |g \cap \alpha| = 1$,

(4) $A \in \alpha \wedge g \parallel \alpha \Rightarrow (A \parallel g) \subseteq \alpha$,

(5) $g \parallel h \wedge h \parallel k \Rightarrow g \parallel k$,

(6) $g \parallel h \wedge h \parallel \alpha \Rightarrow g \parallel \alpha$,

(7) $g \parallel \alpha \wedge \alpha \parallel \beta \Rightarrow g \parallel \beta$,

(8) $\alpha \parallel \beta \wedge \beta \parallel \gamma \Rightarrow \alpha \parallel \gamma$.

Beweis. Offenbar sind (1) und (2) gültig, und (3) folgt aus (G) und 3.3.
(4) Für $g \subseteq \alpha$ gilt die Aussage nach 3.4(2). Ist $g \cap \alpha = \varnothing$, so ist $g \cap h = \varnothing$ für $h := \langle A, g \rangle \cap \alpha$, und dann ist $(A \parallel g) = h \subseteq \alpha$.
(5) O.B.d.A. sei $h \neq k$, und es sei $\varepsilon := \langle h, k \rangle$. Ist $g \cap \varepsilon \neq \varnothing$, so führt $g||h$ mit (4) auf $g \subseteq \varepsilon$, und mit 3.4(3) folgt $g||k$. Ist $g \cap \varepsilon = \varnothing$ und ist $A \in k$, so führt (4) auf $m := (A \parallel g) \subseteq \varepsilon$, und mit (1) ergibt sich $h \cap m = m \cap g = \varnothing$, also $h \parallel m$ und damit $g \parallel m = (A \parallel h) = k$.
(6) Es sei $A \in \alpha$. Nach (4) ist $k := (A \parallel h) \subseteq \alpha$, und nach (5) ist $g \parallel k$. Im Falle $g \cap \alpha \neq \varnothing$ führt dies mit (4) auf $g \subseteq \alpha$, und mithin ist $g \parallel \alpha$.
(7) Es sei $A \in \alpha$ und $h := (A \parallel g)$. Wegen (4) ist $h \subseteq \alpha$, also $h \parallel \beta$ und damit $g \parallel \beta$ gemäß (6).
(8) Es sei $\alpha \cap \gamma \neq \varnothing$, d.h. es gebe ein $g \in \mathcal{G}$ mit $g \subseteq \alpha \cap \gamma$. Dann existiert ein $h \in \mathcal{G}$ mit $h \subseteq \beta \wedge h \nparallel g$, und für $A \in g$ führt (4) auf $(A \| h) \subseteq \alpha \cap \gamma$. Wegen (5) ist $g \neq (A \| h)$, und mithin ist $\alpha = \gamma$. $\diamond$

3.7 Als *Folgerung* erhalten wir

(1) Sind $g, h \in \mathcal{G}$ *und* $\varepsilon \in \mathcal{E}$ *mit* $|g \cap h| = 1 \;\wedge\; g \parallel \varepsilon \;\wedge\; h \parallel \varepsilon$, *so ist* $\langle g, h \rangle \parallel \varepsilon$.

(2) Ist $(A, \varepsilon) \in \mathcal{P} \times \mathcal{E}$, *so existiert genau ein* $\delta \in \mathcal{E}$ *mit* $A \in \delta \;\wedge\; \delta \parallel \varepsilon$.
Wir notieren δ *in der Form* $(A \parallel \varepsilon)$.

Beweis. (1) Wenn es ein $k \in \mathcal{G}$ mit $k \subseteq \langle g, h \rangle \cap \varepsilon$ gibt, so ist $k \nparallel g \vee k \nparallel h$, etwa $k \nparallel g$, und dann ist $g \cap \varepsilon \neq \varnothing$, also $g \subseteq \varepsilon$ und damit $\varepsilon = \langle g, k \rangle = \langle g, h \rangle$.

(2) Es seien $k, m \in \mathcal{G}$ mit $k \cup m \subseteq \varepsilon \wedge k \nparallel m$. Nach (1) und 3.6(5),(6) ist $\delta := \langle (A \parallel k), (A \parallel m) \rangle$ eine Ebene mit $\delta \ni A \wedge \delta \parallel \varepsilon$. Ist $\delta' \in \mathcal{E}$ mit $\delta' \ni A \wedge \delta' \parallel \varepsilon$, so führt 3.6(8) auf $\delta' = \delta$. $\diamond$

3.8 Nach 3.6(5),(8) ist die Parallelität eine Äquivalenzrelation auf $\mathcal{G}$ *und* auf $\mathcal{E}$. Ist $g \in \mathcal{G}$, so heißt $(g\|) := \{h \in \mathcal{G} \mid h \parallel g\}$ das durch g bestimmte **Parallelbüschel**.

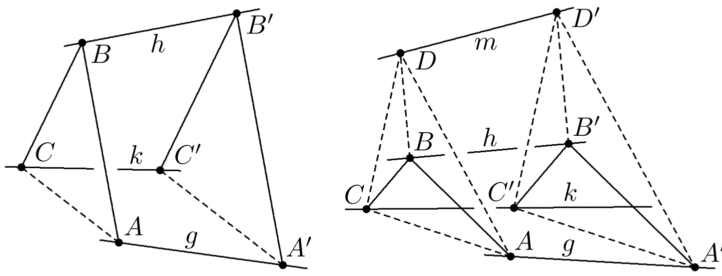
Wir sagen, daß Geraden $g, h, k, \ldots$ **im Büschel liegen**, wenn sie einen Punkt gemeinsam haben oder wenn sie paarweise parallel sind.

Sind g, h zwei verschiedene komplanare Geraden, so setzen wir $B(g, h) := (g \,\|)$ im Falle $g \parallel h$ und $B(g, h) := \{k \in \mathcal{G} \mid k \supseteq g \cap h\}$ andernfalls. Man nennt $B(g, h)$ **das durch** g, h **bestimmte Büschel**.

4 Translationen und zentrische Streckungen

Gegeben sei ein Kongruenzraum $(\mathcal{P}, \equiv)$. Vorbereitend zeigen wir zunächst

4.1 Satz des Desargues. *Sind* g, h, k *drei verschiedene im Büschel gelegene Geraden und sind* $A, A' \in g \setminus h \;\wedge\; B, B' \in h \setminus k \;\wedge\; C, C' \in k \setminus g$ *mit* $\langle A, B \rangle \parallel \langle A', B' \rangle \;\wedge\; \langle B, C \rangle \parallel \langle B', C' \rangle$, *so ist* $\langle A, C \rangle \parallel \langle A', C' \rangle$.



a) b)

Beweis. a) Sind g, h, k nicht komplanar, so sind die Ebenen $\langle A, B, C \rangle$ und $\langle A', B', C' \rangle$ nach 3.6(6) und 3.7(1) parallel, und es folgt
$\langle A, C \rangle = \langle g, k \rangle \cap \langle A, B, C \rangle \;\parallel\; \langle g, k \rangle \cap \langle A', B', C' \rangle = \langle A', C' \rangle$.

b) Sind g, h, k Geraden einer Ebene ε, so gibt es wegen (P), 3.1(3),(5) und 3.6(5) eine Gerade $m \in \mathcal{G} \setminus \mathcal{G}_\varepsilon$, die mit g, h, k im Büschel liegt. Sind nun $D, D' \in m \setminus g$ mit $\langle A, D \rangle \parallel \langle A', D' \rangle$, so führt a) für h, g, m bzw. k, h, m bzw. g, m, k auf $\langle B, D \rangle \parallel \langle B', D' \rangle$ bzw. $\langle C, D \rangle \parallel \langle C', D' \rangle$ bzw. $\langle A, C \rangle \parallel \langle A', C' \rangle$. $\diamond$

4.2 Ist $\varphi : \mathcal{P} \to \mathcal{P}$ eine Bijektion mit

$$(*) \quad \langle X, Y\rangle \parallel \langle \varphi(X), \varphi(Y)\rangle \quad \forall \ XY \in \mathcal{P}_2,$$

so heißt φ eine **Dilatation** von $(\mathcal{P}, \equiv)$.

Aus $(*)$ folgt $\langle \varphi^{-1}(\varphi(X)), \varphi^{-1}(\varphi(Y))\rangle \parallel \langle \varphi(X), \varphi(Y)\rangle \ \forall\, XY \in \mathcal{P}_2$, d.h. mit φ ist auch φ^{-1} eine Dilatation, und in Verbindung mit 3.6(5) ist dann ersichtlich, daß die Dilatationen von $(\mathcal{P}, \equiv)$ hinsichtlich des Verkettens „$\circ$“ eine *Gruppe* $\Delta(\circ)$ mit $id_{\mathcal{P}}$ als neutralem Element bilden. Wir erhalten

4.3 Satz. *Ist $\varphi \in \Delta$, so gilt:*

(1) Es ist $\varphi(g) \in \mathcal{G}$ und $\varphi(g) \parallel g \ \ \forall\, g \in \mathcal{G}$.

(2) Es ist $\varphi(\varepsilon) \in \mathcal{E}$ und $\varphi(\varepsilon) \parallel \varepsilon \ \ \forall\, \varepsilon \in \mathcal{E}$.

(3) Es ist $\varphi(\mathcal{G}) = \mathcal{G}$ und $\varphi(\mathcal{E}) = \mathcal{E}$.

(4) Ist $X \in \mathcal{P}$ und ist $a \in \mathcal{G} \cup \mathcal{E}$ mit $X, \varphi(X) \in a$, so ist $\varphi(a) = a$.

(5) Ist $X \in \mathcal{P}$ mit $\varphi(X) = X$ und ist $a \in \mathcal{G} \cup \mathcal{E}$ mit $a \ni X$, so ist $\varphi(a) = a$.

(6) Existiert $AB \in \mathcal{P}_2$ mit $\varphi(A) = A \wedge \varphi(B) = B$, so ist $\varphi = id_{\mathcal{P}}$.

(7) Ist $\varphi(X) \neq X \ \ \forall\, X \in \mathcal{P}$, so bilden die Fixgeraden von φ ein Parallelbüschel, und für $A, B \in \mathcal{P}$ mit $B \notin \langle A, \varphi(A)\rangle$ ist $(A, B, \varphi(B), \varphi(A))$ stets ein Parallelogramm.

Beweis. Es sei $u' := \varphi(u) \ \forall\, u \in \mathcal{P} \cup \mathcal{G} \cup \mathcal{E}$.

Ist $x \in \mathcal{G} \cup \mathcal{E}$ und ist $A \in x$, so führen 4.2$(*)$ und 3.6 für $B \in \mathcal{P} \setminus \{A\}$ und $y{:=}(A' \| x)$ auf $(B{\in}x \Leftrightarrow \langle A, B\rangle \| x \| y \Leftrightarrow \langle A', B'\rangle \| y \| x \Leftrightarrow B'{\in}y)$, d.h. es ist $x' = y \parallel x$. Damit sind (1), (2) gezeigt, und mit der Bijektivität von φ folgt (3).

Für $X \in \mathcal{P}$ und $a \in \mathcal{G} \cup \mathcal{E}$ mit $X, X' \in a$ ergibt sich nun $X' \in a \cap a' \wedge a \parallel a'$, also $a = a'$, und mithin sind auch (4), (5) gültig.

Ist $AB \in \mathcal{P}_2$ mit $A{=}A' \wedge B{=}B'$, so sind $\langle Y, A\rangle$, $\langle Y, B\rangle$ Fixgeraden von φ für jedes $Y{\in}\mathcal{P}{\setminus}\langle A, B\rangle$, und es folgt $Y' = Y$. Mit dem gleichen Argument für AY anstelle von AB ergibt sich dann (6).

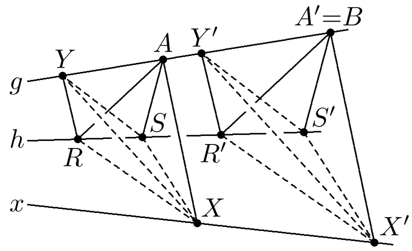
Nun gelte $X' \neq X \ \ \forall\, X \in \mathcal{P}$: Für $A \in \mathcal{P}$, $B \in \mathcal{P} \setminus \langle A, A'\rangle$ und $\varepsilon := \langle A, A', B\rangle$ folgt $B' \in \varepsilon$ wegen $\langle A', B'\rangle \parallel \langle A, B\rangle \parallel \varepsilon$. Die Fixgeraden $\langle A, A'\rangle$, $\langle B, B'\rangle$ von φ können sich in ε nicht schneiden, da φ keinen Fixpunkt hat, d.h. es gilt $\#(A, B, B', A')$, und mit (4) impliziert dies (7). $\diamond$

4.4 Wir betrachten $\varphi \in \Delta$. Hat φ keinen Fixpunkt oder ist $\varphi = id_{\mathcal{P}}$, so wird φ als **Translation** bezeichnet. Es sei $\mathcal{T}$ die Menge aller Translationen von $(\mathcal{P}, \equiv)$. Gibt es ein $Z \in \mathcal{P}$ mit $\varphi(Z) = Z$, so heißt φ eine **zentrische Streckung** mit **Zentrum** Z.

Wir setzen $\Delta(Z) := \{\varphi \in \Delta \mid \varphi(Z) = Z\}$ und bemerken, daß $\Delta(Z)$ offenbar eine *Untergruppe* von Δ ist. Wenn $\varphi \in \Delta(Z) \setminus \{id_{\mathcal{P}}\}$ ist, so ist Z nach 4.3(6) der einzige Fixpunkt von φ, und gemäß 4.3(5) ist $\{g \in \mathcal{G} \mid g \ni Z\}$ dann die Menge der Fixgeraden von φ.

Wir zeigen nun

4.5 Existenzsatz für Dilatationen. *Sind $A, B \in \mathcal{P}$, so gibt es genau ein $\tau \in \mathcal{T}$ mit $\tau(A) = B$. Wir notieren τ als $\tau_{A,B}$.*
Sind $A, B, Z \in \mathcal{P}$ mit $Z \neq A, B \ \wedge \ B \in \langle Z, A\rangle$, so gibt es genau ein $\delta \in \Delta(Z)$ mit $\delta(A) = B$.



Beweis. Für den Nachweis der ersten Aussage betrachten wir $g, h \in \mathcal{G}$ mit $g \ni A, B \wedge g \parallel h \neq g$ und für den Nachweis der zweiten $g, h \in \mathcal{G}$ mit $g \ni A, B \wedge g \cap h = \{Z\}$.

a) *Existenz*: Wir wählen einen festen Punkt $R \in h \setminus g$ und definieren $\varphi : \mathcal{P} \to \mathcal{P} : X \to X'$ wie folgt:
Ist $X \in \mathcal{P} \setminus g$, so gibt es genau eine Gerade $x \in B(g, h)$ mit $X \in x$, und dann sei $\{X'\} := x \cap (B \parallel \langle A, X\rangle)$. Ist $Y \in g$, so sei $\{Y'\} := g \cap (R' \parallel \langle R, Y\rangle)$.

Dann ist $A' = B$, und man erkennt, daß $\varphi : \mathcal{P} \to \mathcal{P}$ eine Bijektion mit $\varphi(x) = x$ $\forall\ x \in B(g, h)$ ist.

Für $X, W \in \mathcal{P} \setminus g$ mit $X \neq W$ folgt nach 4.1 oder trivialerweise sofort $\langle X, W\rangle \parallel \langle X', W'\rangle$, also auch $\langle X, R\rangle \parallel \langle X', R'\rangle$ im Falle $X \neq R$. Für $X \in \mathcal{P} \setminus (g \cup h)$ und $Y \in g \setminus h$ führt 4.1 nun auf $\langle X, Y\rangle \parallel \langle X', Y'\rangle$, und für $S \in h \setminus g$ folgt mit 4.1 dann auch $\langle S, Y\rangle \parallel \langle S', Y'\rangle$. Mithin ist φ eine Dilatation, und offenbar ist $\varphi \in \mathcal{T}$ im Falle $h \parallel g$ sowie $\varphi \in \Delta(Z)$ andernfalls.

b) *Eindeutigkeit*: Ist ψ eine weitere Dilatation mit den gewünschten Eigenschaften, so ist $\psi(A) = B$ und $\psi(h) = h$ (vgl. 4.3), und mit 4.3 folgt $\psi(g) = g$ sowie $\psi(X) = X' \ \ \forall\ X \in \mathcal{P}$, also $\psi = \varphi$. $\diamond$

4.6 Corollar. *$\mathcal{T}(\circ)$ ist ein abelscher Normalteiler von $\Delta(\circ)$.*

Beweis. Ist $\tau \in \mathcal{T} \setminus \{id_{\mathcal{P}}\}$, so ist $\tau^{-1} \in \Delta$, und τ^{-1} hat die gleichen Fixgeraden wie τ. Nach 4.3 ist dann $\tau^{-1} \in \mathcal{T}$.

Sind $\sigma, \tau \in \mathcal{T}$, so ist $\sigma \circ \tau \in \Delta$ gemäß 4.2, und wenn $\sigma \circ \tau$ einen Fixpunkt A hat, so ist $\tau(A) = \sigma^{-1}(A)$, also $\tau = \sigma^{-1}$ gemäß 4.5 und damit $\sigma \circ \tau = id_{\mathcal{P}}$. Dies bedeutet $\sigma \circ \tau \in \mathcal{T}$, und folglich ist $\mathcal{T}$ eine Untergruppe von $\Delta(\circ)$.

Ist $\alpha \in \Delta$ und $\tau \in \mathcal{T}$, so führt $\alpha \circ \tau \circ \alpha^{-1}(X) = X$ für ein $X \in \mathcal{P}$ auf $\tau(\alpha^{-1}(X)) = \alpha^{-1}(X)$, also auf $\tau = id_{\mathcal{P}}$, d.h. es ist $\alpha \circ \tau \circ \alpha^{-1} \in \mathcal{T}$. Dies bedeutet, daß $\mathcal{T}$ ein Normalteiler von Δ ist.

Nun seien $\sigma, \tau \in \mathcal{T} \setminus \{id_p\}$ und $A \in \mathcal{P}$: Wenn $\sigma(A) \notin \langle A, \tau(A)\rangle$ ist, so gilt $\#(\tau(A), A, \sigma(A), \sigma(\tau(A)))$ und $\#(A, \sigma(A), \tau(\sigma(A)), \tau(A))$ gemäß 4.3(7), also auch $\#(\tau(A), A, \sigma(A), \tau(\sigma(A)))$ und damit $\sigma \circ \tau(A) = \tau \circ \sigma(A)$ (vgl. 3.2). Nach 4.5 ist dann $\sigma \circ \tau = \tau \circ \sigma$.

Ist jetzt $\rho \in \mathcal{T}$ mit $\rho(A) \in \langle A, \tau(A)\rangle$, so gibt es nach 4.5 ein $\sigma \in \mathcal{T}$ mit $\sigma(A), \sigma(\rho(A)) \notin \langle A, \tau(A)\rangle$, und mit dem bereits Bewiesenen folgt $\sigma \circ (\tau \circ \rho) = (\sigma \circ \tau) \circ \rho = (\tau \circ \sigma) \circ \rho = \tau \circ (\sigma \circ \rho) = (\sigma \circ \rho) \circ \tau = \sigma \circ (\rho \circ \tau)$, also $\tau \circ \rho = \rho \circ \tau$. Mithin ist $\mathcal{T}(\circ)$ abelsch. $\diamond$

5 Vektorielle Darstellung von Punkten, Geraden und Ebenen

5.1 Gegeben sei ein Kongruenzraum $(\mathcal{P}, \equiv)$. Wir wählen einen im weiteren festen Punkt O und bezeichnen diesen als **Ursprung**. Für $X \in \mathcal{P}$ wird die Translation $\tau_{O,X}$ jetzt mit τ_X bezeichnet, und wir setzen

$\boxed{X + Y := \tau_X \circ \tau_Y(O) = \tau_X(Y)}$ $\forall\, X, Y \in \mathcal{P}$.

Nach 4.5, 4.6 und wegen $\tau_{X+Y}(O) = X+Y = \tau_X \circ \tau_Y(O)$ ist $\alpha : \mathcal{P} \to \mathcal{T} : X \to \tau_X$ eine Bijektion mit $\boxed{\tau_{X+Y} = \tau_X \circ \tau_Y}$ $\forall\, X, Y \in \mathcal{P}$, und nach 4.6 ist $\mathcal{P}(+)$ dann eine zu $\mathcal{T}(\circ)$ isomorphe abelsche Gruppe mit dem neutralen Element O.

Das Negative von $X \in \mathcal{P}$ ist $-X := \tau_X^{-1}(O)$. Ist $g \in \mathcal{G}$ mit $g \ni O$ und sind $X, Y \in g$, so gilt $\tau_X^{-1}(g) = g \wedge \tau_X \circ \tau_Y(g) = g$ gemäß 4.3, also $-X, X + Y \in g$, d.h. $g(+)$ ist eine *Untergruppe* von $\mathcal{P}(+)$.

5.2 Es sei $\mathbb{K} := \Delta(O) \cup \{0\}$, wobei 0 die sog. *Nullabbildung* $0 : \mathcal{P} \to \{O\}$ ist. Wir setzen $\boxed{\alpha \cdot \beta := \alpha \circ \beta}$ $\forall\, \alpha, \beta \in \mathbb{K}$ und $\boxed{\alpha \cdot X := \alpha(X)}$ $\forall\, (\alpha, X) \in \mathbb{K} \times \mathcal{P}$.

Nach 4.4 ist $\mathbb{K}^\bullet := \Delta(O) = \mathbb{K}\backslash\{0\}$ bzgl. „$\cdot$“ eine Gruppe mit dem neutralen Element $1 := id_{\mathcal{P}}$, und $\mathbb{K}(\cdot)$ ist eine Halbgruppe mit $\boxed{0 \cdot \alpha = 0 = \alpha \cdot 0}$ $\forall\, \alpha \in \mathbb{K}$.
Es folgt $\boxed{0{\cdot}X = O \ \wedge \ 1{\cdot}X = X \ \wedge \ (\alpha{\cdot}\beta){\cdot}X = \alpha{\cdot}(\beta{\cdot}X)}$ $\forall\, X \in \mathcal{P}$, $\forall\, \alpha, \beta \in \mathbb{K}$.

Nach 4.6 ist $\alpha \circ \tau_X \circ \alpha^{-1}$ für $X \in \mathcal{P}$ und $\alpha \in \mathbb{K}^\bullet$ eine Translation mit $\alpha \circ \tau_X \circ \alpha^{-1}(O) = \alpha(X)$, und deshalb ist $\boxed{\tau_{\alpha \cdot X} = \alpha \circ \tau_X \circ \alpha^{-1}}$. Dies impliziert $\boxed{\alpha \cdot (X + Y) = \alpha \cdot X + \alpha \cdot Y}$ $\forall\, \alpha \in \mathbb{K}$, $\forall\, X, Y \in \mathcal{P}$, denn für $\alpha = 0$ ist dies klar, und für $\alpha \in \mathbb{K}^\bullet$ folgt dies aus
$\tau_{\alpha(X+Y)} = \alpha \circ \tau_{X+Y} \circ \alpha^{-1} = \alpha \circ \tau_X \circ \alpha^{-1} \circ \alpha \circ \tau_Y \circ \alpha^{-1} = \tau_{\alpha X} \circ \tau_{\alpha Y} = \tau_{\alpha X + \alpha Y}$.

Nach 4.5 gilt $\langle O, X \rangle = \{O\} \cup \{\alpha{\cdot}X \mid \alpha \in \mathbb{K}^\bullet\} =: \mathbb{K}X$ $\forall\, X \in \mathcal{P}^\bullet := \mathcal{P}\backslash\{O\}$, und für $XY \in \mathcal{P}_2$ erhalten wir $\langle X, Y \rangle = \tau_X(\langle O, Y{-}X \rangle)$, also $\boxed{\langle X, Y \rangle = X{+}\mathbb{K}(Y{-}X)}$.
Weiter ergibt sich $\boxed{A{+}\mathbb{K}B \parallel C{+}\mathbb{K}D \Leftrightarrow \mathbb{K}B = \mathbb{K}D}$ für $A, C \in \mathcal{P} \ \wedge \ B, D \in \mathcal{P}^\bullet$, denn es ist $A + \mathbb{K}B = \tau_A(\mathbb{K}B) \parallel \mathbb{K}B$ und $C + \mathbb{K}D = \tau_C(\mathbb{K}D) \parallel \mathbb{K}D$, und wegen $O \in \mathbb{K}B \cap \mathbb{K}D$ führen Axiom (P) und 3.6(5) dann auf die Behauptung.

5.3 Die Abbildung $-1 : \mathcal{P} \to \mathcal{P} : X \to -X$ ist eine Bijektion, da $\mathcal{P}(+)$ eine Gruppe ist, und wegen $\langle -X, -Y \rangle \parallel \tau_{X+Y}(\langle -X, -Y \rangle) = \langle X, Y \rangle$ $\forall\, XY \in \mathcal{P}_2$ und $-O = O$ ist dann $-1 \in \mathbb{K}^\bullet$. Wir setzen $-\alpha := (-1) \cdot \alpha$ $\forall\, \alpha \in \mathbb{K}$.

Für $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ betrachten wir nun die Abbildung $\alpha + \beta : \mathcal{P} \to \mathcal{P} : X \to \alpha(X) + \beta(X)$.
Offenbar gilt $\boxed{\alpha + \beta = \beta + \alpha}$, $\boxed{0 + \alpha = \alpha}$ und $\boxed{\alpha + (-\alpha) = 0}$ $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}$ sowie $(\beta \neq -\alpha \ \Leftrightarrow \ \beta(X) \neq (-\alpha)(X) \ \Leftrightarrow \ (\alpha + \beta)(X) \neq O \ \ \forall\, X \in \mathcal{P}^\bullet)$ gemäß 4.5.

Sind $\alpha, \beta \in \mathbb{K}^\bullet$ mit $\beta \neq -\alpha$ und setzen wir $X' := \alpha(X) \wedge X'' = \beta(X)$ $\forall\, X \in \mathcal{P}$, so folgt $X, X', X'', X' + X'' \in \mathbb{K}X\backslash\{O\}$ $\forall\, X \in \mathcal{P}^\bullet$.

Für festes $A \in \mathcal{P}^{\bullet}$ und für $Y \in \mathcal{P} \setminus \mathbb{K}A$ ergibt sich dann

$$\langle A' + A'', A' + Y'' \rangle \parallel \langle A'', Y'' \rangle \parallel \langle A, Y \rangle \parallel \langle A', Y' \rangle \parallel \langle A' + Y'', Y' + Y'' \rangle,$$

also $\langle A, Y \rangle \parallel \langle A' + A'', Y' + Y'' \rangle$, und für $\delta \in \mathbb{K}^{\bullet}$ mit $\delta(A) := A' + A''$ (vgl. 4.5) impliziert dies $\delta(Y) = Y' + Y'' = (\alpha + \beta)(Y) \;\; \forall\, Y \in \mathcal{P} \setminus \mathbb{K}A$.
Ist nun $Z \in \mathbb{K}^{\bullet}A$, so folgt mit Y, Z anstelle von A, Y entsprechend $\delta(Z) = = (\alpha + \beta)(Z)$, d.h. es ist $\alpha + \beta = \delta \in \mathbb{K}^{\bullet}$.

Damit ist $\boxed{\alpha + \beta \in \mathbb{K}}$ $\forall\, \alpha, \beta \in \mathbb{K}$ gezeigt, und es folgt $\boxed{(\alpha+\beta)\cdot X = \alpha\cdot X + \beta\cdot X}$

$\wedge\; ((\alpha+\beta)+\gamma)(X) = \alpha\cdot X + \beta\cdot X + \gamma\cdot X = (\alpha + (\beta+\gamma))(X)$
$\wedge\; ((\alpha\cdot(\beta+\gamma))(X) = \alpha\cdot(\beta\cdot X + \gamma\cdot X) = (\alpha\cdot\beta + \alpha\cdot\gamma)(X)$
$\wedge\; ((\beta+\gamma)\cdot\alpha)(X) = (\beta+\gamma)(\alpha X) = (\beta\cdot\alpha + \gamma\cdot\alpha)(X) \;\; \forall\, X \in \mathcal{P},\ \forall\, \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{K}$,
d.h. $\mathbb{K}(+)$ ist assoziativ, und für $\mathbb{K}(+,\cdot)$ gelten die Distributivgesetze.

Aus 5.1, 5.2, 5.3 erhalten wir

5.4 Satz. $\mathbb{K}(+,\cdot)$ *ist ein Schiefkörper, und* $\mathcal{P}(+)$ *ist ein Linksvektorraum über dem Schiefkörper* $\mathbb{K}(+,\cdot)$.

5.5 Satz. *Sind O,A,B nichtkollineare Punkte, so ist* $\langle O,A,B \rangle$ *ein Untervektorraum von* $(\mathcal{P}(+), \mathbb{K}(+,\cdot))$ *mit* $\langle O, A, B \rangle = \{xA + yB \mid x, y \in \mathbb{K}\} =: \mathbb{K}A + \mathbb{K}B$.

Beweis. Wegen $\langle O, A \rangle = \mathbb{K}A$ und $\langle O, B \rangle = \mathbb{K}B$ ist $\mathbb{K}A \cup \mathbb{K}B \subseteq \langle O, A, B \rangle =: \varepsilon$. Nach 4.3(4),(7) gilt $\tau_{xA}(\varepsilon) = \varepsilon \;\forall x \in \mathbb{K}$, und dies impliziert $xA + yB \in \varepsilon \;\forall x, y \in \mathbb{K}$. Ist $R \in \varepsilon \setminus (\mathbb{K}A \cup \mathbb{K}B)$, so gibt es nach 3.4(3) und 3.6(4) Elemente $x, y \in \mathbb{K}$ mit $(R \parallel \mathbb{K}B) \cap \mathbb{K}A = \{xA\} \;\wedge\; (R \parallel \mathbb{K}A) \cap \mathbb{K}B = \{yB\}$. Dann gilt $\#(xA, O, yB, R)$, also $R = xA + yB$. Es folgt $\varepsilon = \mathbb{K}A + \mathbb{K}B$ und damit die Behauptung. $\diamond$

5.6 *Anmerkung.* Der Linksvektorraum $(\mathcal{P}(+), \mathbb{K}(+,\cdot))$ ist durch die Wahl des Ursprungs O festgelegt. Bei einer anderen Wahl von O entsteht ein isomorpher Linksvektorraum (vgl. [9](5.61)c)).

6 Mittelsenkrechten und Orthogonalität

Gegeben sei ein Kongruenzraum $(\mathcal{P}, \equiv)$. Im folgenden verwenden wir erstmalig auch das Kongruenzaxiom (K) und zeigen zunächst

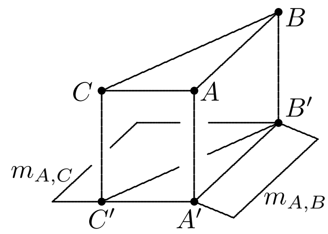
6.1 Lemma. *Es gibt ein Parallelogramm* (A, B, C, D) *mit* $\langle A, C \rangle \cap \langle B, D \rangle \neq \varnothing$.

Beweis. Angenommen, für jedes Parallelogramm (A, B, B', A') gilt
(1) $\langle A, B' \rangle \cap \langle B, A' \rangle = \varnothing$.
Mit (K) erhalten wir dann
(2) $AB \equiv A'B' \wedge AA' \equiv BB' \wedge AB' \equiv A'B$.
Weiter ergibt sich
(3) $\langle X, Y \rangle \cap m_{X,Y} = \varnothing \;\; \forall\, XY \in \mathcal{P}_2$,
denn wenn ein $R \in \langle X, Y \rangle \cap m_{X,Y}$ existiert, so kann man $S \in m_{X,Y} \setminus \{R\}$ und $T \in \mathcal{P}$ wählen mit $\#(X, S, Y, T)$ (vgl. 3.2). Wegen (K) folgt dann $XT \equiv YS \equiv SX \equiv TY$, also $T \in m_{X,Y} \cap \langle X, Y, S \rangle = \langle R, S \rangle$ und damit $R \in \langle X, Y \rangle \cap \langle S, T \rangle$ im Widerspruch zur Annahme.

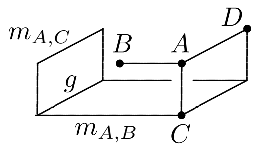
Aus (2) und (3) erhalten wir

(4) Sind A,B,C nichtkollineare Punkte mit $\langle A,B\rangle \cap m_{A,C} = \varnothing$, so ist $m_{A,B} \parallel m_{A,C}$.

Beweis. Es existiere ein Punkt $A' \in m_{A,B} \cap \cap m_{A,C}$. Sind $B', C' \in \mathcal{P}$ mit $\#(B, A, A', B')$ und $\#(C, A, A', C')$, so führt 4.1 auf $\#(C, B, B', C')$, und wegen $\langle A, B\rangle \parallel m_{A,B} \;\wedge\; \langle A, B\rangle \parallel m_{A,C} \;\wedge \;\wedge\; \langle A, C\rangle \parallel m_{A,C}$ gilt $A', B' \in m_{A,B} \cap m_{A,C} \;\wedge \;\wedge\; C' \in m_{A,C}$ (vgl. 3.6). Mit (2) folgt jetzt $AC' \equiv CA' \equiv A'A \equiv A'B \equiv AB' \equiv B'C \equiv C'B$, also $C' \in m_{A,B}$ und damit $m_{A,B} = \langle A', B', C'\rangle = m_{A,C}$.



(5) Nun seien $AB \in \mathcal{P}_2$ und $C \in m_{A,B}$. Wegen $\langle A, C\rangle \nparallel m_{A,B} \wedge \langle A, C\rangle \parallel m_{A,C}$ (vgl. (3)) gilt $m_{A,B} \nparallel m_{A,C}$ gemäß 3.6(7), d.h. es ist $g := m_{A,B} \cap m_{A,C} \in \mathcal{G}$. Wegen $C \notin \langle A, B\rangle$ und (4) ist dann $\langle A, B\rangle \nparallel m_{A,C}$. Für $D \in (A \parallel g)$ mit $D \neq A$ folgt $C \notin \langle A, D\rangle$, und wegen $\langle A, D\rangle \parallel m_{A,C}$ ist $B \notin \langle A, D\rangle$. Mit $\langle A, D\rangle \cap m_{A,B} = \varnothing \wedge \langle A, D\rangle \cap m_{A,C} = \varnothing$ führt (4) nun auf $m_{A,B} \parallel m_{A,D} \parallel \parallel m_{A,C}$ im Widerspruch zu $m_{A,B} \nparallel m_{A,C}$. $\diamond$



Mit Hilfe von 6.1 erhalten wir

6.2 Satz. *Es gilt* $-1 \neq 1, \quad 2 := 1 + 1 \neq 0, \quad \frac{1}{2} := 2^{-1} \in \mathbb{K}^{\bullet}$ *sowie* $2\alpha = \alpha + \alpha \neq 0$ *und* $2X = X + X \neq O \;\; \forall\, \alpha \in \mathbb{K}^{\bullet}, \;\; \forall\, X \in \mathcal{P}^{\bullet}$.

Beweis. Nach 6.1 gibt es $A, \ldots, E \in \mathcal{P}$ mit $\#(A, B, C, D) \wedge E \in \langle A,C\rangle \cap \langle B,D\rangle$. Setzen wir $\tau_{-E}(X) =: X' \;\forall\, X \in \mathcal{P}$, so folgt $\#(A', B', C', D')$ mit $(A', C') \cap (B', D') = \{O\}$ und $A', B', C', D' \in \mathcal{P}^{\bullet}$. Für $\alpha \in \mathbb{K}^{\bullet}$ mit $\alpha(A') = C'$ (vgl 4.5) folgt $\alpha(B') = D' \wedge \alpha(D') = B'$ gemäß 4.3 und mit 4.5 dann $\alpha^2 = 1$, also $(\alpha - 1)(\alpha + 1) = 0$. Wegen $\alpha \neq 1$ impliziert dies $-1 = \alpha \neq 1$ und damit die restlichen Aussagen (vgl. 5.4). $\diamond$

6.3 Corollar. *Sind A, B, C nichtkollineare Punkte und ist $D := A - B + C$ sowie $M := \frac{1}{2}(A + C)$, so gilt $\#(A, B, C, D)$ mit $\langle A, C\rangle \cap \langle B, D\rangle = \{M\}$.*

Beweis. Wegen $\tau_{D-A}(A) = D \wedge \tau_{D-A}(B) = C$ führt 4.3(7) auf $\#(A, B, C, D)$. Nach 6.2 ist $A + \frac{1}{2}(C - A) = \frac{1}{2}(A + C) = \frac{1}{2}(B + D) = B + \frac{1}{2}(D - B)$, also $M \in \langle A, C\rangle \cap \langle B, D\rangle$ gemäß 5.2. $\diamond$

Weiter zeigen wir

6.4 Satz. *Es gilt* $\tau_{A,B} = \tau_{B-A} \quad \forall\, A, B \in \mathcal{P}$ *sowie* $\{X, Y\} \equiv \{\tau(X), \tau(Y)\} \;\; \forall\, XY \in \mathcal{P}_2, \;\; \forall\, \tau \in \mathcal{T}$.

Beweis. a) Für $A,B \in \mathcal{P}$ ist $\tau_{A,B}(A) = B = \tau_{B-A}(A)$, also $\tau_{A,B} = \tau_{B-A}$ gemäß 4.5. b) Ist $XY \in \mathcal{P}_2$ und $\tau \in \mathcal{T}$ mit $\tau(X) \notin \langle X, Y\rangle$, so führt 4.3(7) mit (K) auf $XY \equiv \tau(X)\tau(Y)$. c) Ist $XY \in \mathcal{P}_2$ und $\tau \in \mathcal{T}$ mit $\tau(X) \in \langle X, Y\rangle$, so sei $Z \in \mathcal{P} \setminus \langle X, Y\rangle$, $\rho := \tau_{X,Z}$ und $\sigma := \tau_{Z,\tau(X)}$. Nach 4.5 und 4.6 ist $\sigma \circ \rho = \tau$, und mit b) folgt dann $XY \equiv \rho(X)\rho(Y) \equiv \sigma(\rho(X))\,\sigma(\rho(Y)) = \tau(X)\tau(Y)$. $\diamond$

Ist (A, B, C, D) ein Parallelogramm von $(\mathcal{P}, \equiv)$ mit $AB \equiv BC \equiv CD \equiv DA$, so heißt (A, B, C, D) eine **Raute**, in Zeichen: $\Diamond(A, B, C, D)$.

Wir erhalten

6.5 Satz. *Ist* $AC \in \mathcal{P}_2$, *so ist* $\{\frac{1}{2}(A + C)\} = \langle A, C\rangle \cap m_{A,C}$, *und für* $B \in m_{A,C} \setminus \langle A, C\rangle$ *und* $D := A - B + C$ *gilt* $\Diamond(A, B, C, D)$ *sowie* $D \in m_{A,C}$.

Beweis. Ist $AC \in \mathcal{P}_2$, so lassen sich B, D wie angegeben wählen. Mit 6.3 und (K) folgt $AD \equiv CB \equiv BA \equiv DC$, also $\Diamond(A, B, C, D)$ und $D \in m_{A,C}$. Wegen $\langle A, B, C\rangle \cap m_{A,C} = \langle B, D\rangle$ und 6.3 ist $\{\frac{1}{2}(A + C)\} = \langle A, C\rangle \cap \langle B, D\rangle = = \langle A, C\rangle \cap m_{A,C}$. $\diamond$

6.6 Corollar. *Es ist* $\langle M, A\rangle \cap s_M(A) = \{A, 2M - A\} \quad \forall\ MA \in \mathcal{P}_2$.

Beweis. Ist $MA \in \mathcal{P}_2$ und ist $C := 2M - A$, so ist $C \neq A$, und es ist $C = M + 1 \cdot (M - A) \in \langle M, A\rangle \wedge \{M, C\} \overset{6.4}{\equiv} \{M + (A - M), C + (A - M)\} \equiv \{A, M\}$, also $C \in \langle M, A\rangle \cap s_M(A)$. Ist $X \in \langle M, A\rangle \cap s_M(A)$ mit $X \neq A$, so führt 6.5 auf $M \in \langle A, X\rangle \cap m_{A,X} = \{\frac{1}{2}(A + X)\}$, und es folgt $X = 2M - A = C$. $\diamond$

6.7 Es sei $O^\perp := \mathcal{P}$, und für $A \in \mathcal{P}^\bullet$ sei $A^\perp := m_{-A,A}$. Nach 6.5 ist $\boxed{\mathbb{K}A \cap A^\perp = \{O\}}\ \forall\ A \in \mathcal{P}^\bullet$. Sind $A, B \in \mathcal{P}$, so notieren wir $\boxed{A \in B^\perp}$ auch als $\boxed{A \perp B}$ und nennen A zu B **senkrecht** oder **orthogonal**.

Sind $A, B \in \mathcal{P}^\bullet$ mit $A \perp B$, so führt 6.5 auf $\Diamond(-B, A, B, -A)$, d.h. es ist $B \in m_{-A,A} = A^\perp$. Mithin gilt $\boxed{A \perp B \Leftrightarrow B \perp A}\ \forall\ A, B \in \mathcal{P}$.

Wir zeigen nun

6.8 Satz. *Ist* $E_1 \in \mathcal{P}^\bullet$, *so gibt es* $E_2, E_3 \in \mathcal{P}^\bullet$ *mit* $E_1^\perp \cap E_2^\perp = \mathbb{K}E_3$, $E_2^\perp \cap E_3^\perp = \mathbb{K}E_1$, $E_3^\perp \cap E_1^\perp = \mathbb{K}E_2$, $E_1 \perp E_2$, $E_2 \perp E_3$, $E_3 \perp E_1$, *und für* $R \in \mathcal{P}^\bullet$ *gilt* $\boxed{R^\perp = E_1^\perp \Leftrightarrow \mathbb{K}R = \mathbb{K}E_1}$.

Beweis. Es sei $E_2 \in E_1^\perp \setminus \{O\}$. Dann ist $E_1^\perp \neq E_2^\perp$ wegen $E_2 \notin E_2^\perp$, und nach 3.3, 5.2 gibt es ein $E_3 \in \mathcal{P}^\bullet$ mit $E_1^\perp \cap E_2^\perp = \mathbb{K}E_3$, d.h. es ist $E_1 \perp E_2$, $E_2 \perp E_3$, $E_3 \perp E_1$. Wegen $E_3 \notin E_3^\perp$ ist $E_2^\perp \cap E_3^\perp = \mathbb{K}E_1$ und $E_3^\perp \cap E_1^\perp = \mathbb{K}E_2$. Ist nun $R \in \mathcal{P}^\bullet$, so führt $R^\perp = E_1^\perp$ auf $R \perp E_2, E_3$ und auf $\mathbb{K}R = E_2^\perp \cap E_3^\perp = \mathbb{K}E_1$. Umgekehrt erhalten wir aus $R \in \mathbb{K}E_1$ zunächst $R \perp E_2, E_3$, also $R^\perp \ni E_2, E_3$ und damit $R^\perp = \langle O, E_2, E_3\rangle = E_1^\perp$. $\diamond$

6.9 Corollar. *Ist* $AB \in \mathcal{P}_2$, *so ist* $m_{A,B} \parallel (A - B)^\perp$, *und überdies gilt*

$$\boxed{X \in m_{A,B} \ \Leftrightarrow\ X - \tfrac{1}{2}(A + B) \in (A - B)^\perp} \quad \forall\ X \in \mathcal{P}.$$

Beweis. Für $\tau := \tau_{-\frac{1}{2}(A+B)}$ ist $m_{A,B} \parallel \tau(m_{A,B}) = \tau(\{X \in \mathcal{P} \mid AX \equiv XB\}) \overset{6.4}{=} = \{\tau(X) \mid X \in \mathcal{P} \wedge \tau(A)\tau(X) \equiv \tau(X)\tau(B)\} = m_{\tau(A),\tau(B)} = (\frac{1}{2}(A - B))^\perp \overset{6.8}{=} = (A - B)^\perp$, also auch $(X \in m_{A,B} \Leftrightarrow \tau(X) \in \tau(m_{A,B}) = (A - B)^\perp)\ \forall\ X \in \mathcal{P}$. $\diamond$

7 Algebraische Darstellung von Kongruenzräumen

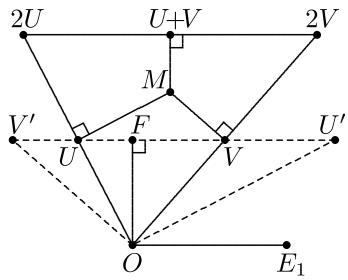
Gegeben sei ein Kongruenzraum $(\mathcal{P}, \equiv)$. Im weiteren seien O, E_1, E_2, E_3 gemäß 5.1 und 6.8 fest gewählt.

Zunächst zeigen wir

7.1 Satz. *Die Abbildung* $\kappa : \mathbb{K}^3 \to \mathcal{P} : (x, y, z) \to xE_1 + yE_2 + zE_3$ *ist eine Bijektion. Es ist* $E_1^\perp = \mathbb{K}E_2 + \mathbb{K}E_3$, $E_2^\perp = \mathbb{K}E_3 + \mathbb{K}E_1$ *und* $E_3^\perp = \mathbb{K}E_1 + \mathbb{K}E_2$.

Beweis. Ist $(u, v, w) \in \mathbb{K}^3$, so ist $\kappa((u, v, w)) \in \mathcal{P}$. Ist $X \in \mathcal{P}$, so gibt es gemäß 3.6, 3.7, 4.5 und 6.7 ein Tripel $(x, y, z) \in \mathbb{K}^3$ mit
$\{xE_1\} = \mathbb{K}E_1 \cap (X \parallel E_1^\perp)$, $\{yE_2\} = \mathbb{K}E_2 \cap (X \parallel E_2^\perp)$, $\{zE_3\} = \mathbb{K}E_3 \cap (X \parallel E_3^\perp)$.
Dann ist $xE_1 - X \in E_1^\perp$, und mit $yE_2, zE_3 \in E_1^\perp$ folgt $\kappa((x, y, z)) - X \in E_1^\perp$ (vgl. 5.5). Ebenso ist $\kappa((x, y, z)) - X \in E_2^\perp \cap E_3^\perp$, d.h. es ist $\kappa((x, y, z)) = X$. Sind nun $r, s, t \in \mathbb{K}$ mit $X = rE_1 + sE_2 + tE_3$, so ist $rE_1 - X \in E_1^\perp$, also $\{rE_1\} = \mathbb{K}E_1 \cap (X \parallel E_1^\perp) = \{xE_1\}$ und damit $r = x$. Entsprechend erhalten wir $s = y$ und $t = z$. Zusammen mit 5.5 impliziert dies die Behauptung. $\diamond$

7.2 Im folgenden sei $F \in \{E_2, E_3\}$. Wir studieren die Orthogonalität in der Ebene $\varepsilon := \mathbb{K}E_1 + \mathbb{K}F$ (vgl. [1]):



Ist $x \in \mathbb{K}^\bullet$, so gibt es genau ein $x' \in \mathbb{K}^\bullet \setminus \{x\}$ mit $xE_1 + F \perp x'E_1 + F$, denn wegen $xE_1 + F \neq O, F$ ist $(xE_1 + F)^\perp \cap \varepsilon$ eine Gerade durch O, die von $\mathbb{K}E_1, \mathbb{K}F, \mathbb{K}(xE_1 + F)$ verschieden ist (vgl. 6.7, 6.8) und die $F + \mathbb{K}E_1$ in genau einem Punkt $x'E_1 + F \notin \{F, xE_1 + F\}$ trifft. Nach 6.7 ist $(x')' = x \ \ \forall\, x \in \mathbb{K}^\bullet$. Sind nun $u, v \in \mathbb{K}^\bullet$ mit $u \neq v$ und ist $U := uE_1 + F$, $V := vE_1 + F$, so ist $U' := u'E_1 + F \ \neq \ v'E_1 + F =: V'$, und nach 3.4, 5.2 existiert ein Punkt M in ε mit $\{M\} = (U + \mathbb{K}U') \cap (V + \mathbb{K}V')$. Dann gibt es $a, b \in \mathbb{K}$ mit $M - U = aU' \ \wedge \ M - V = bV'$, und nach 6.9 ist $M \in m_{O,2U} \cap m_{O,2V}$. Wir erhalten $\{M, 2U\} \equiv \{M, O\} \equiv \{M, 2V\}$, also $M \in m_{2U,2V}$, und mit 6.9 folgt $M - (U+V) \perp 2U - 2V = 2(u-v)E_1$. Wegen $E_1^\perp \cap \varepsilon = \mathbb{K}F$ gibt es nun ein $c \in \mathbb{K}$ mit $cF = M - U - V$, und mithin gilt $cF = aU' - V = (au' - v)E_1 + (a-1)F$ sowie $cF = bV' - U = (bv' - u)E_1 + (b-1)F$. Mit 7.1 führt dies auf $au' = v \ \wedge \ bv' = u \ \wedge \ a - 1 = c = b - 1$, also auf $a = b$ und $u'v^{-1} = a^{-1} = v'u^{-1}$.

Damit ist $\boxed{u' \cdot v^{-1} = v' \cdot u^{-1}}$ $\ \forall\, u, v \in \mathbb{K}^\bullet$ mit $u \neq v$ gezeigt, und wegen $(u = v \Leftrightarrow u' = v')$ gilt dies auch für $u = v$. Mit $v = 1$ folgt $\boxed{u' = 1' \cdot u^{-1}}$ $\ \forall\, u \in \mathbb{K}^\bullet$. Dies impliziert nun $1' \cdot u^{-1} \cdot v^{-1} = 1' \cdot v^{-1} \cdot u^{-1} \ \ \forall\, u, v \in \mathbb{K}^\bullet$, und deshalb gilt

(1) $\boxed{u \cdot v = v \cdot u}$ $\ \ \forall\, u, v \in \mathbb{K}^\bullet$,

d.h. $\mathbb{K}(+, \cdot)$ ist ein *Körper*.

Weiter erhalten wir $xE_1 + yF \perp uE_1 + vF \Leftrightarrow xu = 1' \cdot yv$ für $x, y, u, v \in \mathbb{K}$, denn im Falle $x, y, u, v \in \mathbb{K}^\bullet$ folgt dies aus $\frac{x}{y}E_1 + F \perp \frac{u}{v}E_1 + F \Leftrightarrow \frac{u}{v} = (\frac{x}{y})' = 1' \cdot \frac{y}{x}$, und sonst gilt dies trivialerweise.

Wir setzen jetzt $p := -1' \in \mathbb{K}^\bullet$ im Falle $F = E_2$ und $q := -1' \in \mathbb{K}^\bullet$ im Falle $F = E_3$. Mit der Vereinbarung

(2) $\boxed{(uE_1 + vE_2 + wE_3) * (xE_1 + yE_2 + zE_3) := ux + pvy + qwz}$

für $u, v, w, x, y, z \in \mathbb{K}$ ergibt sich dann

(3) $X \perp Y \Leftrightarrow X * Y = 0 \quad \forall\, X, Y \in \mathbb{K}E_1 + \mathbb{K}E_2 = E_3^\perp$,

(4) $X \perp Y \Leftrightarrow X * Y = 0 \quad \forall\, X, Y \in \mathbb{K}E_1 + \mathbb{K}E_3 = E_2^\perp$,

(5) $X * Y = Y * X \quad \forall\, X, Y \in \mathcal{P}$,

(6) $(aX + bY) * (cU) = ac \cdot (X * U) + bc \cdot (Y * U) \quad \forall\, a, b, c \in \mathbb{K}, \ \forall\, X, Y, U \in \mathcal{P}$,

d.h. durch „$*$" ist ein **Skalarprodukt** für $(\mathcal{P}, \equiv)$ erklärt.

Dieses beschreibt die Orthogonalität von $(\mathcal{P}, \equiv)$ gemäß

7.3 Satz. *Es ist* $\boxed{X \perp Y \Leftrightarrow X * Y = 0} \quad \forall\, X, Y \in \mathcal{P}$.

Beweis. a) Entsprechend der Wahl von O, E_1, E_2, E_3 ist
$U^\perp = \{X \in \mathcal{P} \mid U * X = 0\} \quad \forall \ U \in \mathbb{K}E_1 \cup \mathbb{K}E_2 \cup \mathbb{K}E_3$ (vgl. 7.1).
b) Mit 5.5, 7.2(3),(4) und a) erhalten wir für $v, w \in \mathbb{K}$ zunächst
$E_1 + vE_2, wE_3 \in (-pvE_1 + E_2)^\perp$ sowie $E_1 + wE_3, vE_2 \in (-qwE_1 + E_3)^\perp$
und damit dann

$$\begin{aligned}(E_1 + vE_2 + wE_3)^\perp &= \langle O, -pvE_1 + E_2, -qwE_1 + E_3 \rangle = \\ &= \{-(pvy + qwz)E_1 + yE_2 + zE_3 \mid y, z \in \mathbb{K}\} = \\ &= \{xE_1 + yE_2 + zE_3 \mid x, y, z \in \mathbb{K} \ \wedge \ 1 \cdot x + pvy + qwz = 0\} = \\ &= \{X \in \mathcal{P} \mid (E_1 + vE_2 + wE_3) * X = 0\}.\end{aligned}$$

Nach 6.8 bedeutet dies $U^\perp = \{X \in \mathcal{P} \mid U * X = 0\} \ \forall\, U \in \mathcal{P} \setminus E_1^\perp$.
c) Für $U, V \in E_1^\perp$ ist $E_1 * V = 0$ und
$(U \perp V \overset{5.5}{\Leftrightarrow} U + E_1 \perp V \overset{b)}{\Leftrightarrow} (U + E_1) * V = 0 \Leftrightarrow U * V = 0)$. $\diamond$

7.4 Sind $X, Y \in \mathcal{P}$, so nennen wir $(X - Y)^2 := (X - Y) * (X - Y)$ das **Abstandsquadrat** von X und Y.

Wegen $U \notin U^\perp \ \forall\, U \in \mathcal{P}^\bullet$ gilt $U^2 \neq 0 \ \ \forall\, U \in \mathcal{P}^\bullet$, also

(1) $\boxed{x, y, z \in \mathbb{K} \ \wedge \ x^2 + py^2 + qz^2 = 0 \ \Rightarrow \ x = y = z = 0}$.

Weiter erhalten wir

(2) $\boxed{\{R, S\} \equiv \{T, U\} \Leftrightarrow (R - S)^2 = (T - U)^2} \quad \forall\, \{R, S\}, \{T, U\} \in \mathcal{P}_2$.

Denn ist $X := R - S$ und $Y := T - U$, so führt 6.4 auf $\{R, S\} \equiv \{T, U\} \Leftrightarrow \{R - S, S - S\} \equiv \{T - U, U - U\} \Leftrightarrow \{X, O\} \equiv \{Y, O\}$. Im Falle $X = Y$ gilt die Behauptung, und andernfalls ist $\{X, O\} \equiv \{Y, O\} \Leftrightarrow O \in m_{X,Y} \overset{6.9}{\Leftrightarrow}$ $\Leftrightarrow O - \frac{1}{2}(X + Y) \in (X - Y)^\perp \Leftrightarrow (X + Y) * (X - Y) = 0 \Leftrightarrow X^2 = Y^2$. $\diamond$

Schließlich folgt

7.5 Satz des Pythagoras. *Es gilt*

$$(R{-}S)^2 + (S{-}T)^2 = (R{-}T)^2 \quad \Leftrightarrow \quad R{-}S \perp S{-}T \quad \forall\, R,S,T \in \mathcal{P}.$$

Beweis. Für $X := R{-}S$ und $Y := S{-}T$ ist $X^2{+}Y^2 = (X{+}Y)^2 \Leftrightarrow X{*}Y = 0.$ $\diamond$

7.6 *Anmerkungen.* a) Die *Metrik* „$*$“ auf $(\mathcal{P},\equiv)$ ist festgelegt durch die Wahl des Ursprungs O und des *Einheitspunktes* E_1. Denn die Orthogonalität auf $(\mathcal{P},\equiv)$ ist bestimmt durch $\equiv$ und O gemäß 6.7, und nach [9](9.7)(8) (mit $\varphi = id_{\mathcal{P}}$) ist „$*$“ das einzige (basisunabhängig definierbare) Skalarprodukt auf $(\mathcal{P}(+),\mathbb{K}(+,\cdot))$, welches 7.3 und die Bedingung $E_1 * E_1 = 1$ erfüllt.

b) Nach [9](7.53) hat $\mathbb{K}$ unendlich viele Elemente.

c) Mit 5.4, 6.2 und 7.1 – 7.5 ist eine *vollständige algebraische Beschreibung* für $(\mathcal{P},\equiv)$ gewonnen.

Denn ist $\mathbb{K}(+,\cdot)$ ein Körper mit $1 \neq -1$ und gibt es $p,q \in \mathbb{K}^{\bullet}$ mit 7.4(1), so ist durch $f((u,v,w),(x,y,z)) := ux + pvy + qwz \quad \forall\ (u,v,w),(x,y,z) \in \mathbb{K}^3$ ein Skalarprodukt f auf $\mathbb{K}^3$ erklärt, und vermittels $\{R,S\} \equiv_f \{T,U\} :\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow f(R-S,R-S) = f(T-U,T-U)$ für $R,S,T,U \in \mathbb{K}^3$ mit $R \neq S \wedge T \neq U$ erweist sich $(\mathbb{K}^3,\equiv_f)$ dann als ein Kongruenzraum (vgl. [8]).

8 Algebraische Darstellung klassischer Räume

Gegeben sei ein klassischer Raum $(\mathcal{P},\equiv)$, d.h. außer den Axiomen (R), (V), (G), (P), (K) soll jetzt auch das Anordnungsaxiom (A) erfüllt sein.

8.1 Ist $MA \in \mathcal{P}_2$, so ist M ein *innerer* Punkt von $s_M(A)$, denn nach 6.6 gilt $(g \ni M \Rightarrow |g \cap s_M(A)| \neq 1) \quad \forall\, g \in \mathcal{G}$.

In Verbindung mit (A) führt 6.6 dann auf

(1) $\quad g \ni M \Rightarrow |g \cap s_M(A)| = 2 \quad \forall\, g \in \mathcal{G},\ \forall\, MA \in \mathcal{P}_2.$

Betrachten wir nun noch einmal den Beweis von 6.8, so erkennen wir mit (1) für $M := O$, daß wir in klassischen Räumen zu $E_1 \in \mathcal{P}^{\bullet}$ stets Elemente $E_2, E_3 \in \mathcal{P}^{\bullet}$ mit $E_1 \perp E_2 \ \wedge\ E_2 \perp E_3 \ \wedge\ E_3 \perp E_1 \ \wedge\ OE_1 \equiv OE_2 \equiv OE_3$ finden können. Wir denken uns die Erörterungen aus Abschnitt 7 im weiteren auf ein solches Tripel (E_1,E_2,E_3) bezogen. Dann ist $E_1^2 = E_2^2 = E_3^2$, also $\boxed{p = q = 1}$, und „$*$“ ist das sog. *Standardskalarprodukt* (vgl. 7.2(2)).

Wir zeigen nun zunächst

8.2 Lemma. *Ist $MR{\in}\mathcal{P}_2$ und ist $X \in \mathcal{P}\backslash s_M(R)$, so gibt es ein $S{\in}s_M(R)$ mit $M{-}X \perp X{-}S \ \wedge\ (M{-}X)^2{+}(X{-}S)^2 = (M{-}R)^2$ im Falle $X \in \overline{s_M(R)}$ und $M{-}S \perp S{-}X \ \wedge\ (M{-}R)^2{+}(S{-}X)^2 = (M{-}X)^2$ im Falle $X \notin \overline{s_M(R)}$.*

Beweis. a) Ist $S \in s_M(R)$ mit $(M{-}S){*}(S{-}X) \neq 0$, so sind $S,\ S{+}\alpha(S{-}X) \in \langle S,X\rangle \cap s_M(S) = \langle S,X\rangle \cap s_M(R)$ für $0 \neq \alpha := (2(M{-}S) * (S{-}X))/(S{-}X)^2$

wegen $(M-(S+\alpha(S-X)))^2 = (M-S)^2+\alpha(\alpha(S-X)^2-2(M-S)*(S-X)) =$ $= (M-S)^2 = (M-R)^2$.

b) Ist $X \notin \overline{s_M(R)}$, so gibt es definitionsgemäß ein $S \in s_M(R)$ mit $|\langle S, X\rangle \cap$ $\cap s_M(R)| = 1$, und mit a) folgt $M - S \perp S - X$.

c) Ist $X \in \overline{s_M(R)}$, so sei $Y \in (M-X)^\perp$ mit $Y \neq O$. Nach Axiom (A) gibt es ein $S \in s_M(R)$ mit $S \in X + \mathbb{K}Y$, und dann ist $X - S \in (M-X)^\perp$.

d) Die verbleibenden Aussagen ergeben sich mit 7.5. ◇

8.3 Satz. *Für* $\mathbb{K}_+ := \{x^2 \mid x \in \mathbb{K}\}$ *gilt:*

(1) Sind $u, v \in \mathbb{K}_+$, *so ist* $u + v \in \mathbb{K}_+$.

(2) Es gilt $X^2 \in \mathbb{K}_+ \quad \forall\, X \in \mathcal{P}$.

(3) Ist $x \in \mathbb{K}^\bullet$, *so ist entweder* $x \in \mathbb{K}_+$ *oder* $-x \in \mathbb{K}_+$.

Beweis. (1) Sind $x, y \in \mathbb{K}^\bullet$, so führt 8.1(1) auf $\mathbb{K}(xE_1 + yE_2) \cap s_O(E_1) \neq \varnothing$, d.h. es gibt ein $a \in \mathbb{K}^\bullet$ mit $a^2x^2 + a^2y^2 = (axE_1 + ayE_2)^2 = (E_1 - O)^2 = 1$, und dann ist $x^2 + y^2 = (1/a)^2 \in \mathbb{K}_+$.

(2) Ist $X = xE_1 + yE_2 + zE_3$ gemäß 7.1, so führt (1) auf $X^2 = x^2 + y^2 + z^2 \in \mathbb{K}_+$.

(3) Es ist $1 = 1^2 \in \mathbb{K}_+$. Ist $x \in \mathbb{K}^\bullet \setminus \{1\}$, so sei $M := \frac{1}{2}(1 + x) \cdot E_1$. Es folgt $M \neq E_1$ und $O \notin s_M(E_1)$. Ist $O \notin \overline{s_M(E_1)}$, so gibt es nach 8.2 ein $S \in s_M(E_1)$ mit $M - S \perp S - O$, also mit $M * S = S^2$, und dann ist $M^2 - x = (M - E_1)^2 =$ $= (M - S)^2 = M^2 - S^2$, also $x = S^2 \in \mathbb{K}_+$ gemäß (2).
Ist dagegen $O \in \overline{s_M(E_1)}$, so gibt es nach 8.2 ein $S \in s_M(E_1)$ mit $M - O \perp O - S$, und dann ist $M^2 - x = (M - E_1)^2 = (M - S)^2 = M^2 + S^2$, also $-x = S^2 \in \mathbb{K}_+$ gemäß (2). Gäbe es $r, s, x \in \mathbb{K}^\bullet$ mit $x = r^2 \wedge -x = s^2$, so wäre $rE_1 + sE_2 \in \mathcal{P}^\bullet$ mit $(rE_1 + sE_2)^2 = 0$ entgegen 7.4(1). ◇

8.4 Nach 8.3(1),(3) bewirkt Axiom (A), daß $\mathbb{K}(+,\cdot)$ ein *euklidischer* Körper ist. Dieser ist bekanntlich *angeordnet* vermittels $\boxed{x \leq y :\Leftrightarrow y - x \in \mathbb{K}_+} \quad \forall\, x, y \in \mathbb{K}$.

Nach der Definition von $\mathbb{K}_+$ und entsprechend den Regeln der Anordnung findet man zu jedem $u \in \mathbb{K}_+$ genau ein $x \in \mathbb{K}_+$ mit $x^2 = u$. Man notiert x als $\sqrt{u}$ und folgert, daß $\sqrt{\ }: \mathbb{K}_+ \to \mathbb{K}_+ : u \to \sqrt{u}$ eine streng monoton wachsende Bijektion ist.

Wegen 8.3(2) ist $|X| := \sqrt{X^2} \quad \forall\, X \in \mathcal{P}$ definiert. Man nennt $|X|$ den **Betrag** von X und $|X - Y|$ den **Abstand** von X und Y.

Wegen $X^2 = |X|^2$ und $(X^2 = Y^2 \Leftrightarrow |X| = |Y|)$ für $X, Y \in \mathcal{P}$ führt 7.4(2) auf

(1) $\boxed{\{R, S\} \equiv \{T, U\} \Leftrightarrow |R-S| = |T-U|} \quad \forall\, \{R, S\}, \{T, U\} \in \mathcal{P}_2$,

(2) $\{M, R\} \in \mathcal{P}_2 \ \wedge\ r := |R - M| \ \Rightarrow \boxed{s_{M,r} := \{X \in \mathcal{P} \mid |X - M| = r\} = s_M(R)}$,

und mit 8.2, 8.3 ergibt sich

(3) $\boxed{\overline{s_{M,r}} = \{X \in \mathcal{P} \mid |X - M| \leq r\}} \quad \forall\, M \in \mathcal{P}, \quad \forall\, r \in \mathbb{K}_+ \setminus \{0\}$,

denn sind $X, Y, Z \in \mathcal{P}$ mit $X^2 + Y^2 = Z^2$, so ist $X^2 \leq Z^2$, also $|X| \leq |Z|$.

8.5 Neben Axiom (A) sei in $(\mathcal{P}, \equiv)$ nun auch das Axiom (S) erfüllt.
Wir betrachten eine nichtleere Teilmenge $\mathfrak{Z}$ von $\mathbb{K}_+\setminus\{0\}$. Ist $\mathfrak{A} := \{zE_1 \mid z\in\mathfrak{Z}\}$ und $\mathfrak{M} := \{\overline{s_O(A)} \mid A\in\mathfrak{A}\} = \{\overline{s_{O,z}} \mid z\in\mathfrak{Z}\}$, so führt (S) mit der Vereinbarung $\overline{s_{M,0}} := \{M\}$ auf $\bigcap\mathfrak{M} = \overline{s_{M,r}}$ für ein $M\in\mathcal{P}$ und ein $r\in\mathbb{K}_+$. Hier ist $M=O$, denn andernfalls wäre $T := (1 + r/|M|)\cdot M \in \overline{s_{M,r}} = \bigcap\mathfrak{M}$ und $-T \in \bigcap\mathfrak{M}\setminus\overline{s_{M,r}}$. Mit 8.4(3) folgt nun $r \leq z \;\forall z \in \mathfrak{Z}$. Im Falle $r \in \mathfrak{Z}$ ist $r = \min\mathfrak{Z}$. Ist $r \notin \mathfrak{Z}$ und ist $a \in \mathbb{K}_+$ mit $r < a$, so existiert nach 8.4(3) ein $z \in \mathfrak{Z}$ mit $z < a$, denn andernfalls wäre $\overline{s_{O,r}} \subseteq \overline{s_{O,a}} \subseteq \bigcap\mathfrak{M}$ mit $aE_1 \in \overline{s_{O,a}} \setminus \overline{s_{O,r}}$, d.h. es wäre $\overline{s_{O,r}} \neq \bigcap\mathfrak{M}$. Demnach hat $\mathfrak{Z}$ das Infimum r.

Da $\mathfrak{Z}$ beliebig in $\mathbb{K}_+\setminus\{0\}$ gewählt war, bedeutet dies, daß $\mathbb{K}(+,\cdot)$ zum Körper $\mathbb{R}(+,\cdot)$ der reellen Zahlen isomorph ist. Mithin gilt

8.6 Hauptsatz. *Der Anschauungsraum ist darstellbar als dreidimensionaler Vektorraum über den reellen Zahlen, versehen gemäß 8.1, 8.4 und 7.5 mit der gewöhnlichen euklidischen Abstandsmessung.*

8.7 *Anmerkung.* Ist $\mathbb{K}(+,\cdot)$ eine beliebiger euklidischer Körper und wählt man auf $\mathbb{K}^3$ das Standardskalarprodukt $f_\circ$ mit $1 = p = q$, so erweist sich $(\mathbb{K}^3, \equiv_{f_\circ})$ (vgl. 7.6) nach [8] als klassischer Raum.

In [8] wird außerdem gezeigt, daß zwei klassische Räume genau dann isomorph sind, wenn ihre Koordinatenkörper, gewonnen gemäß Abschnitt 5, isomorph sind. Deshalb gehören zu den euklidischen Körpern die klassischen Räume, gerade so, wie zu den reellen Zahlen der Anschauungsraum gehört.

Literatur

[1] R. Baer, The fundamental theorems of elementary geometry. An axiomatic analysis. Trans. Am. Math. Soc. 56 (1944) 94–129.
[2] W. Benz, Ein Trennungsaxiom in der Orthogonalgeometrie und eine Charakterisierung der reellen Ebene. Lect. N. Math. 792 (1980) 12–19.
[3] Euklid, Die Elemente. Übersetzung von C. Thaer. Darmstadt 1971.
[4] D. Hilbert, Grundlagen der Geometrie. 8. Aufl., Stuttgart 1956.
[5] J. Hjelmslev, Neue Begründung der ebenen Geometrie. Math. Ann. 64 (1907) 449–474.
[6] E. Podehl, K. Reidemeister, Eine Begründung der ebenen elliptischen Geometrie. Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg 10 (1934) 231–255.
[7] E. M. Schröder, Ein Axiomensystem für den Anschauungsraum. Math. Sem.ber. 33 (1986) 184–200.
[8] —, Geometrie euklidischer Ebenen. Paderborn 1985.
[9] —, Vorlesungen über Geometrie, Band II,III. Mannheim 1992.

Eingegangen am 16. 9. 2003

Adresse des Autors:
Mathematisches Seminar der Universität
Bundesstraße 55, D–20146 Hamburg

e-mail:
e.schroeder@math.uni-hamburg.de