Universität Hamburg
DER FORSCHUNG | DER LEHRE | DER BILDUNG

Übungen zu 'Mathematik II (Elementare Lineare Algebra)'
Blatt 7
Nathan Bowler

A: Präsenzaufgaben am 3. Juni

1. *Vektorraumaxiome überprüfen* Sei Fol die Menge aller Folgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von reelen Zahlen. Wir definieren die Summe $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} + (y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zweier Folgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ als $(x_n + y_n)_{n\in\mathbb{N}}$, und für $\lambda \in \mathbb{R}$ und $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathrm{Fol}$ definieren wir das Skalarprodukt $\lambda \cdot (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ als $(\lambda x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Beweisen Sie, dass $(\mathrm{Fol}, +, \cdot)$ ein Vektorraum ist.

2. *Unterräume von $\mathbb{R}^2$ erkennen*
   Welche der folgenden Mengen sind Unterräume von $\mathbb{R}$?
   (a) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x \leq y\}$
   (b) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x = y\}$
   (c) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | xy \geq 0\}$

3. *Summen von Unterräumen*
   Seien U und W Unterräume eines Vektorraums V. Zeigen Sie, dass
   $$U + W := \{u + w | u \in U \text{ und } w \in W\}$$
   ein Unterraum von V ist.

B: Aufgaben zum 10. Juni

1. *Kartesische Produkte von Vektorräumen*
   Seien V und W Vektorräume. Wir definieren die Summe und das Skalarprodukt für das kartesische Produkt $V \times W$ wie folgt:
   $$(v_1, w_1) + (v_2, w_2) = (v_1 + v_2, w_1 + w_2) \qquad \lambda \cdot (v, w) = (\lambda \cdot v, \lambda \cdot w)\,.$$
   Zeigen Sie, dass $(V \times W, +, \cdot)$ ein Vektorraum ist.

2. *Unterräume von $\mathbb{R}^3$ erkennen*
   Welche der folgenden Mengen sind Unterräume von $\mathbb{R}^3$?
   (a) $\{(x, y, z) | x + y + z = 0\}$
   (b) $\{(x, y, z) | xy = z\}$
   (c) $\{(x, y, z) | x = y = z\}$

3. *Matrixgleichungen umformen*
   Seien A und B Matrizen in $\mathbb{R}^{m\times n}$. Zeigen Sie, dass $\{x \in \mathbb{R}^n | Ax = Bx\}$ ein Unterraum von $\mathbb{R}^n$ ist.

4. *Unterraumaxiome überprüfen*
   Sei Fol der Vektorraum von Folgen aus der ersten Präsenzaufgabe. Beweisen Sie, dass
   $$\{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathrm{Fol} \,|\, \lim_{n\to\infty} x_n = 0\}$$
   ein Unterraum von Fol ist.

5. *Schnitte und Vereinigungen von Unterräumen*
   Seien U und W Unterräume eines Vektorraums V. Zeigen Sie, dass der Schnitt $U \cap W$ auch ein Unterraum von V ist. Finden Sie solchen V, U und W, sodass die Vereinigung $U \cup W$ kein Unterraum von V ist.