Universität Hamburg
DER FORSCHUNG | DER LEHRE | DER BILDUNG

Musterlösungen zu 'Mathematik II (Elementare Lineare Algebra)'
Blatt 4
Nathan Bowler

A: Präsenzaufgaben

1. *Lineares Gleichungssystem als Matrixgleichung darstellen*
   Stellen Sie das Gleichungssystem
   $$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &= 6 \\ -x_1 + 3x_2 + 4x_3 &= -1 \\ -x_1 + x_2 + x_3 &= 1 \end{aligned}$$
   als Matrixgleichung der Form Ax = b dar.

   Lösung:
   $$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 4 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

2. *Inverse von einer (2,2)-Matrix berechnen*
   Sei A die Matrix
   $$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}.$$
   Benutzen Sie die Formel aus der Vorlesung, um die inverse Matrix A^{-1} zu berechnen. Multiplizieren Sei zur probe A mit der berechneten inversen Matrix.

   Lösung:
   $$A^{-1} = \frac{1}{0 \times 3 - 1 \times 2} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$
   $$AA^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3. *Algorithmus für Berechnung von Inversen*
   Wenden Sie das Algorithmus aus der Vorlesung (Algorithmus 3) an, um die inverse Matrix von der Matrix A aus Aufgabe 2 wieder zu berechnen. Stimmen die Zwei Antworten überein?

   Lösung: Die Blockmatrix ist $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Wir wenden das Gauß-Jordan Verfahren an. Zunächst vertauschen wir die Zeilen: $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Nun teilen wir die erste Zeile durch Zwei: $\begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Als nächstes Schritt, subtrahieren wir das $\frac{3}{2}$-Fache der zweiten Zeile von dem Ersten: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Jetzt haben wir links eine Einheitsmatrix erzeugt, also ist die inverse Matrix von A durch $\begin{pmatrix} -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ gegeben. Diese Antwort stimmt mit der Vorherigen überein.

B: Aufgaben

Wir betrachten die folgenden 4 Matrizen:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 4 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ und } D = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. *Regeln für Inversen bestätigen*
   Bestätigen Sie, dass $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$ und $(B^{-1})^{-1} = B$.

   Lösung:

$$(A^{-1})^T = \left(\frac{1}{1\times 0 - 2\times 1}\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\right)^T = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

$$(A^T)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{1\times 0 - 1\times 2}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

$$B^{-1} = \frac{1}{3\times 0 - (-1)\times 2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ -1 & \frac{3}{2} \end{pmatrix}.$$

$$(B^{-1})^{-1} = \frac{1}{0\times\frac{3}{2} - \frac{1}{2}\times(-1)}\begin{pmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = B.$$

2. *Jacke-Hemd Regel bestätigen*
   Bestätigen Sie für die Matrizen A und B die Gültigkeit der Jacke-Hemd Regel $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

   Lösung:

$$(AB)^{-1} = \begin{pmatrix} 7 & -1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{7\times(-1) - (-1)\times 3}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -3 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ \frac{3}{4} & -\frac{7}{4} \end{pmatrix}.$$

$$B^{-1}A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ -1 & \frac{3}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ \frac{3}{4} & -\frac{7}{4} \end{pmatrix}.$$

3. *(3,3)-Matrix invertieren*
   Berechnen Sie die inverse Matrix C^{-1} von C.

   Lösung: Die Blockmatrix ist

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

   Wir addieren die erste Zeile auf die anderen Zwei:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 4 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Wir teilen die zweite Zeile durch 5:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{4}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Wir Subtrahieren das Dreifache der zweiten Zeile von der Dritten:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{4}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{7}{5} & \frac{2}{5} & -\frac{3}{5} & 1 \end{pmatrix}$$

Wir multiplizieren die dritte Zeile durch $-\frac{5}{7}$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{4}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{2}{7} & \frac{3}{7} & -\frac{5}{7} \end{pmatrix}$$

Wir subtrahieren das $\frac{4}{5}$-Fache der dritten Zeile von der Zweiten:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{3}{7} & -\frac{1}{7} & \frac{4}{7} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{2}{7} & \frac{3}{7} & -\frac{5}{7} \end{pmatrix}$$

Wir subtrahieren das Zweifach der zweiten Zeile von der Ersten:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{7} & \frac{2}{7} & -\frac{8}{7} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{3}{7} & -\frac{1}{7} & \frac{4}{7} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{2}{7} & \frac{3}{7} & -\frac{5}{7} \end{pmatrix}$$

Also ist die inverse Matrix von C

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{7} & \frac{2}{7} & -\frac{8}{7} \\ \frac{3}{7} & -\frac{1}{7} & \frac{4}{7} \\ -\frac{2}{7} & \frac{3}{7} & -\frac{5}{7} \end{pmatrix}$$

4. *Gleichungssystem mithilfe der inversen Matrix lösen*
   Benutzen Sie Ihre Antwort zu Aufgabe 3 um folgendes Gleichungssystem zu lösen:

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &= 6 \\ -x_1 + 3x_2 + 4x_3 &= -1 \\ -x_1 + x_2 + x_3 &= 1 \end{aligned}$$

Lösung: Die eindeutige Lösung ist $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{7} & \frac{2}{7} & -\frac{8}{7} \\ \frac{3}{7} & -\frac{1}{7} & \frac{4}{7} \\ -\frac{2}{7} & \frac{3}{7} & -\frac{5}{7} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{4}{7} \\ \frac{23}{7} \\ -\frac{20}{7} \end{pmatrix}$.

5. *Invertierbarkeit Widerlegen*
   Zeigen Sie, dass die Matrix D nicht invertierbar ist.

Lösung: Die Blockmatrix ist

$$\begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Wir multipilzieren die erste Zeile durch -1:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Wir subtrahieren das 3-Fache der ersten Zeile von der Zweiten, und die erste Zeile von der Dritten:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 4 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 2 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Wir teilen die zweite Zeile durch -6:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{6} & 0 \\ 0 & -3 & 2 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Wir addieren das Dreifache der zweiten Zeile auf die Dritte:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{6} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$$

Die erste 3 Einträge in der dritten Zeile sind jetzt alle 0. Es folgt, dass wenn wir diese Matrix weiter in reduzierte Zeilenstufenform bringen, die linke Hälfte keine Einheitsmatrix wird. Also ist die Matrix D nicht invertierbar.