Universität Hamburg
DER FORSCHUNG | DER LEHRE | DER BILDUNG

Lösungen zu 'Mathematik II (Elementare Lineare Algebra)'
Blatt 7
Nathan Bowler

A: Präsenzaufgabeni

1. *Vektorraumaxiome überprüfen* Sei Fol die Menge aller Folgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von reelen Zahlen. Wir definieren die Summe $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} + (y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zweier Folgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ als $(x_n + y_n)_{n\in\mathbb{N}}$, und für $\lambda \in \mathbb{R}$ und $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \text{Fol}$ definieren wir das Skalarprodukt $\lambda \cdot (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ als $(\lambda x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Beweisen Sie, dass $(\text{Fol}, +, \cdot)$ ein Vektorraum ist.

   Lösung: Wir müssen die Eigenschaften aus der Definition überprüfen:

   Kommutativität: $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} + (y_n)_{n\in\mathbb{N}} = (x_n + y_n)_{n\in\mathbb{N}} = (y_n + x_n)_{n\in\mathbb{N}} = (y_n)_{n\in\mathbb{N}} + (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

   Assoziativität:

$$\begin{aligned}(x_n)_{n\in\mathbb{N}} + ((y_n)_{n\in\mathbb{N}} + (z_n)_{n\in\mathbb{N}}) &= (x_n)_{n\in\mathbb{N}} + (y_n + z_n)_{n\in\mathbb{N}}\\ &= (x_n + y_n + z_n)_{n\in\mathbb{N}}\\ &= (x_n + y_n)_{n\in\mathbb{N}} + (z_n)_{n\in\mathbb{N}}\\ &= ((x_n)_{n\in\mathbb{N}} + (y_n)_{n\in\mathbb{N}}) + (z_n)_{n\in\mathbb{N}}\end{aligned}$$

   Nullvektor: Wir setzen $0 := (0)_{n\in\mathbb{N}}$. Dann $0 + (x_n)_{n\in\mathbb{N}} = (0 + x_n)_{n\in\mathbb{N}} = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

   Negativen: Wir setzen $-(x_n)_{n\in\mathbb{N}} = (-x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Dann $-(x_n)_{n\in\mathbb{N}} + (x_n)_{n\in\mathbb{N}} = (-x_n + x_n)_{n\in\mathbb{N}} = (0)_{n\in\mathbb{N}} = 0$.

   Distributivität:

$$\begin{aligned}\lambda \cdot ((x_n)_{n\in\mathbb{N}} + (y_n)_{n\in\mathbb{N}}) &= \lambda \cdot (x_n + y_n)_{n\in\mathbb{N}}\\ &= (\lambda(x_n + y_n))_{n\in\mathbb{N}}\\ &= (\lambda x_n + \lambda y_n)_{n\in\mathbb{N}}\\ &= (\lambda x_n)_{n\in\mathbb{N}} + (\lambda y_n)_{n\in\mathbb{N}}\\ &= \lambda \cdot (x_n)_{n\in\mathbb{N}} + \lambda \cdot (y_n)_{n\in\mathbb{N}}\end{aligned}$$

   und

$$\begin{aligned}(\lambda + \mu) \cdot (x_n)_{n\in\mathbb{N}} &= ((\lambda + \mu)x_n)_{n\in\mathbb{N}}\\ &= (\lambda x_n + \mu x_n)_{n\in\mathbb{N}}\\ &= (\lambda x_n)_{n\in\mathbb{N}} + (\mu x_n)_{n\in\mathbb{N}}\\ &= \lambda \cdot (x_n)_{n\in\mathbb{N}} + \mu \cdot (x_n)_{n\in\mathbb{N}}\end{aligned}$$

   Assoziativität der Multiplication: $\lambda \cdot (\mu \cdot (x_n)_{n\in\mathbb{N}}) = \lambda \cdot (\mu x_n)_{n\in\mathbb{N}} = (\lambda\mu x_n)_{n\in\mathbb{N}} = (\lambda\mu) \cdot (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$

   Multiplikation mit 1: $1 \cdot (x_n)_{n\in\mathbb{N}} = (1x_n)_{n\in\mathbb{N}} = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$

2. *Unterräume von $\mathbb{R}^2$ erkennen*
   Welche der folgenden Mengen sind Unterräume von $\mathbb{R}$?

   (a) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x \leq y\}$

   (b) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x = y\}$

(c) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | xy \geq 0\}$

Lösung:

(a) Kein Unterraum denn sie enthält $(0,1)$ aber nicht $(-1) \cdot (0,1) = (0,-1)$.

(b) Unterraum: Nicht leer, weil sie $(0,0)$ enthält. Sind (x_1, y_1) und (x_2, y_2) in diese Menge enthalten, so ist auch $(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$, da $x_1 + x_2 = y_1 + y_2$. Sei λ eine reele Zahl. Ist (x, y) in der Menge, so ist auch $\lambda \cdot (x, y) = (\lambda x, \lambda y)$, da $\lambda x = \lambda y$.

(c) Kein Unterraum, weil sie die Vektoren $(0,1)$ und $(-1,0)$ enthält, aber nicht ihre Summe $(1,-1)$.

3. *Summen von Unterräumen*
Seien U und W Unterräume eines Vektorraums V. Zeigen Sie, dass

$$U + W := \{u + w | u \in U \text{ und } w \in W\}$$

ein Unterraum von V ist.

Lösung: U und W sind nicht leer, also können wir Elementen u von U and w von W finden. Dann $u + w \in U + W$. Deshalb ist $U + W$ nicht leer. Seien v_1, v_2 Elemente von $U + W$. Seien $u_1, u_2 \in U$ und $w_1, w_2 \in W$, sodass $v_1 = u_1 + w_1$ und $v_2 = u_2 + w_2$. Dann $v_1 + v_2 = u_1 + w_1 + u_2 + w_2 = (u_1 + u_2) + (w_1 + w_2) \in U + W$. Sei $\lambda \in \mathbb{R}$ und $v \in U + W$. Sei $u \in U$ und $w \in W$ mit $u + w = v$. Dann $\lambda \cdot v = \lambda \cdot u + \lambda \cdot v \in U + W$.

B: Aufgaben zum 17. Juni

1. *Kartesische Produkte von Vektorräumen*
Seien V und W Vektorräume. Wir definieren die Summe und das Skalarprodukt für das kartesische Produkt $V \times W$ wie folgt:

$$(v_1, w_1) + (v_2, w_2) = (v_1 + v_2, w_1 + w_2) \qquad \lambda \cdot (v, w) = (\lambda \cdot v, \lambda \cdot w)\,.$$

Zeigen Sie, dass $(V \times W, +, \cdot)$ ein Vektorraum ist.

Lösung: Wir müssen die Eigenschaften aus der Definition überprüfen:

Kommutativität: $(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2) = (x_2 + x_1, y_2 + y_1) = (x_2, y_2) + (x_1, y_1)$.

Assoziativität:

$$\begin{aligned}
(x_1, y_1) + ((x_2, y_2) + (x_3, y_3)) &= (x_1, y_1) + (x_2 + x_3, y_2 + y_3) \\
&= (x_1 + x_2 + x_3, y_1 + y_2 + y_3) \\
&= (x_1 + x_2, y_1 + y_2) + (x_3, y_3) \\
&= ((x_1, y_1) + (x_2, y_2)) + (x_3, y_3)
\end{aligned}$$

Nullvektor: Wir setzen $0 := (0,0)$. Dann $0 + (x, y) = (0 + x, 0 + y) = (x, y)$.

Negativen: Wir setzen $-(x, y) = (-x, -y)$. Dann $-(x, y) + (x, y) = (-x + x, -y + y) = (0,0) = 0$.

Distributivität:

$$\begin{aligned}
\lambda \cdot ((x_1, y_1) + (x_2, y_2)) &= \lambda \cdot (x_1 + x_2, y_1 + y_2) \\
&= (\lambda(x_1 + x_2), \lambda(y_1 + y_2)) \\
&= (\lambda x_1 + \lambda x_2, \lambda y_1 + \lambda y_2) \\
&= (\lambda x_1, \lambda y_1) + (\lambda x_2, \lambda y_2) \\
&= \lambda \cdot (x_1, y_1) + \lambda \cdot (x_2, y_2)
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}(\lambda+\mu)\cdot(x,y) &= ((\lambda+\mu)x,(\lambda+\mu)y)\\ &= (\lambda x+\mu x,\lambda y+\mu y)\\ &= (\lambda x,\lambda y)+(\mu x,\mu y)\\ &= \lambda\cdot(x,y)+\mu\cdot(x,y)\end{aligned}$$

Assoziativität der Multiplication: $\lambda\cdot(\mu\cdot(x,y))=\lambda\cdot(\mu x,\mu y)=(\lambda\mu x,\lambda\mu y)=(\lambda\mu)\cdot(x,y)$

Multiplikation mit 1: $1\cdot(x,y)=(1x,1y)=(x,y)$

2. *Unterräume von $\mathbb{R}^3$ erkennen*
   Welche der folgenden Mengen sind Unterräume von $\mathbb{R}^3$?

   (a) $\{(x,y,z)|x+y+z=0\}$
   (b) $\{(x,y,z)|xy=z\}$
   (c) $\{(x,y,z)|x=y=z\}$

   Lösung:

   (a) Wir nennen diese Menge U_1. Sie ist ein Unterraum. Sie ist nicht leer, weil $(0,0,0)\in U_1$. Für (x_1,y_1,z_1) und (x_2,y_2,z_2) in U_1 gilt auch $(x_1,y_1,z_1)+(x_2,y_2,z_2)=(x_1+x_2,y_1+y_2,z_1+z_2)\in U_1$ denn $(x_1+x_2)+(y_1+y_2)+(z_1+z_2)=(x_1+y_1+z_1)+(x_2+y_2+z_2)=0+0=0$. Für $\lambda\in\mathbb{R}$ und $(x,y,z)\in U_1$ gilt auch $\lambda\cdot(x,y,z)=(\lambda x,\lambda y,\lambda z)\in U_1$ denn $\lambda x+\lambda y+\lambda z=\lambda(x+y+z)=\lambda\times 0=0$.
   (b) Diese Menge ist kein Unterraum denn sie enthält die Vektoren $(1,0,0)$ und $(0,1,0)$ aber nicht deren Summe $(1,1,0)$.
   (c) Wir nennen diese Menge U_3. Sie ist ein Unterraum. Sie ist nicht leer, weil $(0,0,0)\in U_3$. Für (x_1,y_1,z_1) und (x_2,y_2,z_2) in U_3 gilt auch $(x_1,y_1,z_1)+(x_2,y_2,z_2)=(x_1+x_2,y_1+y_2,z_1+z_2)\in U_3$ denn $x_1+x_2=y_1+y_2=z_1+z_2$. Für $\lambda\in\mathbb{R}$ und $(x,y,z)\in U_3$ gilt auch $\lambda\cdot(x,y,z)=(\lambda x,\lambda y,\lambda z)\in U_3$ denn $\lambda x=\lambda y=\lambda z$.

3. *Matrixgleichungen umformen*
   Seien A und B Matrizen in $\mathbb{R}^{m\times n}$. Zeigen Sie, dass $\{x\in\mathbb{R}^n|Ax=Bx\}$ ein Unterraum von $\mathbb{R}^n$ ist.

   Lösung: Diese Menge ist die Lösungsmenge des homogenen Gleichungssystems $(A-B)x=0$.

4. *Unterraumaxiome überprüfen*
   Sei Fol der Vektorraum von Folgen aus der ersten Präsenzaufgabe. Beweisen Sie, dass

   $$\{(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\in \mathrm{Fol}\,|\lim_{n\to\infty}x_n=0\}$$

   ein Unterraum von Fol ist.

   Lösung: Wir nennen diese Menge U. Sie ist nicht leer, weil sie die Folge $(0)_{n\in\mathbb{N}}$ enthält. Für $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in U gilt auch $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}+(y_n)_{n\in\mathbb{N}}=(x_n+y_n)_{n\in\mathbb{N}}\in U$ denn $\lim_{n\to\infty}(x_n+y_n)=\lim_{n\to\infty}x_n=\lim_{n\to\infty}y_n=0+0=0$. Für $\lambda\in\mathbb{R}$ und $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\in U$ gilt auch $\lambda\cdot(x_n)_{n\in\mathbb{N}}=(\lambda x_n)_{n\in\mathbb{N}}\in U$ denn $\lim_{n\to\infty}\lambda x_n=\lambda\lim_{n\to\infty}x_n=\lambda 0=0$.

5. *Schnitte und Vereinigungen von Unterräumen*
   Seien U und W Unterräume eines Vektorraums V. Zeigen Sie, dass der Schnitt $U\cap W$ auch ein Unterraum von V ist. Finden Sie solchen V, U und W, sodass die Vereinigung $U\cup W$ kein Unterraum von V ist.

Lösung: Weil U nicht leer ist, gibt es ein Vektor $u \in U$. Dann $0 = 0 \cdot u \in U$. Ähnlicherweise gilt $0 \in W$. Also gilt $0 \in U \cap W$. Deshalb ist $U \cap W$ nicht leer. Seien v_1 und v_2 in $U \cap W$. Dann $v_1 + v_2 \in U$, weil U ein Unterraum ist, und $v_1 + v_2 \in W$, weil W ein Unterraum ist. Deshalb gilt $v_1 + v_2 \in U \cap W$. Sei nun λ eine reele Zahl und v ein Vektor in $U \cap W$. Dann $\lambda v \in U$, weil U ein Unterraum ist, und $\lambda v \in W$, weil W ein Unterraum ist. Deshalb gilt $\lambda v \in U cap W$.

Sei nun $V := \mathbb{R}^2$, $U := \{(x, y) \in V | y = 0\}$ und $V := \{(x, y) \in V | x = 0\}$. Dann ist $U + W$ kein Unterraum von V, weil sie die Vektoren $(1, 0)$ und $(0, 1)$ aber nicht deren Summe enthält.