

Graphentheorie I: Übungsblatt 3

Wichtige Definition: Ein aufspannender Wurzelbaum in einem Graphen heißt *normal*, falls die Enden jeder Kante des Graphen in der Baumordnung vergleichbar sind.

1. Beweisen Sie, dass die folgenden Aussagen für einen Graphen T äquivalent sind:
 - (a) T ist ein Baum
 - (b) Zwischen je zwei Ecken enthält T genau einen Weg
 - (c) T ist zusammenhängend, aber für jede Kante e von T ist $T - e$ nicht zusammenhängend
 - (d) T ist kreislos, aber für je zwei nicht benachbarte Ecken x und y enthält $T + xy$ einen Kreis.
2. Finden Sie zwei ganz kurze Beweise, dass ein Baum ohne Ecken von Grad 2 mehr Blätter als andere Ecken hat: einen mit Induktion, den Anderen ohne (betrachten Sie den Durchschnittsgrad).
3. (a) Sei G ein zusammenhängender Graph und sei r eine Ecke von G . Für jede Komponente C von $G - r$, sei r_C ein Nachbar von r in C und sei T_C ein normaler Spannbaum von C mit Wurzel r_C . Sei T der Baum, der aus den Bäumen T_C und den Kanten rr_C besteht. Beweisen Sie, dass T ein normaler Spannbaum von G ist.
(b) Finde einen kurzen Induktionsbeweis für die Existenz normaler Spannbäume in zusammenhängenden Graphen.
- 4.⁺ Sei G ein zusammenhängender Graph und $r \in G$ eine Ecke. Von r ausgehend, durchlaufe Kanten von G wie folgt: in jedem schritt gehe wenn möglich zu einer noch nicht besuchten Ecke; ansonsten gehe zurück entlang der Kante, durch die die gegenwärtige Ecke erstmals erreicht wurde. Zeige, dass die insgesamt durchschrittenen Kanten einen normalen Spannbaum in G mit Wurzel r bilden.