Graphentheorie I: Übungsblatt 7

1. Definieren Sie einen Begriff der Einbettung von Graphen in den $\mathbb{R}^3$. Zeigen Sie, dass jeder Graph geradlinig in den $\mathbb{R}^3$ einbettbar ist.

2. Hier ist ein Induktionsbeweis für die Aussage, dass jeder maximal ebene Graph G mit mindestens vier Ecken ein ebener Dreiecksgraph mit Minimalgrad 3 ist. Der Induktionsanfang steht mit K^4. Zum Induktionsschritt für Eckenzahlen $n \to n+1$ nehmen wir an, dass jeder maximal ebene Graph G mit n Ecken ein ebener Dreiecksgraph mit Minimalgrad 3 ist. Füge nun auf beliebige Weise zu G eine $(n+1)$-te Ecke v hinzu, so dass der erweiterte Graph G' wieder maximal eben ist. Offenbar liegt v in einem Gebiet f von G, und da G' maximal eben ist, ist v zu allen Ecken auf dem Rand von f benachbart (und zu keinen weiteren Ecken). Da G ein ebener Dreiecksgraph ist, sind dies genau drei Ecken, d.h. auch G' ist ein ebener Dreiecksgraph mit Minimalgrad 3.

   Finden Sie den Fehler im skizzierten Beweis. Finden Sie weiterhin ein Gegenbeispiel zur behaupteten Aussage und Zeigen Sie, weshalb der falsche Beweis dieses Gegenbeispiel übersieht.

3. Ein Fußball ist aus beliebig geformten Fünfecken und Sechsecken so zusammengenäht, dass die Nähte einen kubischen Graphen bilden. Wie viele Fünfecke hat der Fußball?

4.⁺ Zeigen Sie, dass zu jedem ebenen Graphen ein kombinatorisch isomorpher Graph existiert, bei dem alle Kanten Strecken in $\mathbb{R}^2$ sind. (Betrachten Sie oBdA einen ebenen Dreiecksgraphen und konstruieren Sie einen graphentheoretisch isomorphen geradlinigen ebenen Graphen induktiv. Welche zusätzliche Eigenschaft der entstehende Innengebiete könnte der Fortgang der Induktion sichern?)