Universität Hamburg
DER FORSCHUNG | DER LEHRE | DER BILDUNG

FAKULTÄT
FÜR MATHEMATIK, INFORMATIK
UND NATURWISSENSCHAFTEN

WISE 2018/19 | GRAPHENTHEORIE II

ÜBUNGSBLATT 11

Die Besprechung der Aufgaben findet in den Übungen am **17. Januar** statt.

AUFGABE 1. Auf einer Menge A sei eine Quasiordnung $\leq$ definiert und für Teilmengen $X \subseteq A$ sei $Forb(X) := \{a \in A; a \geq x \text{ für kein } x \in X\}$. Zeige, dass $\leq$ genau dann eine Wohlquasiordnung auf A ist, wenn jede unter $\geq$ abgeschlossene Teilmenge B (d.h. jedes $B \subseteq A$ mit $x \leq y \in B \to x \in B$) die Form $B = Forb(X)$ für ein endliches $X \subseteq A$ hat.

AUFGABE 2. Zeige, dass die endlichen Bäume durch die Teilgraphenrelation nicht wohlquasigeordnet sind.

AUFGABE 3. Erweitere den Satz von Kruskal auf Bäume, deren Ecken mit Farben aus einer wohlquasigeordneten Menge gefärbt sind. Die Ordnung zwischen Bäumen ist definiert wie zuvor, außer dass die Eckeneinbettung jetzt auch die Ordnung der Farben respektieren muss.

AUFGABE 4.$^+$ Schwäche die Minorenrelation ab durch Verzicht auf die Forderung, dass Verzweigungsmengen zusammenhängend sein müssen. Zeige, dass die endlichen Graphen durch die Relation wohlquasigeordnet sind.

AUFGABE 5. Es sei G ein Graph, T eine Menge und $(V_t)_{t \in T}$ eine Familie von Teilmengen von $V(G)$, die die Bedingungen (T1) und (T2) aus der Definition einer Baumzerlegung erfüllt. Zeige, dass genau dann ein Baum auf T existiert, der (T3) wahr macht, wenn T eine Aufzählung $t_1, \dots, t_n$ hat, bei der es zu jedem $k = 2, \dots, n$ ein $j < k$ gibt mit $V_{t_k} \cap \bigcup_{i<k} V_{t_i} \subseteq V_{t_j}$.